

Introdução à dinâmica das estruturas

Humberto Lima Soriano



Introdução à dinâmica das estruturas

Humberto Lima Soriano



© 2014, Elsevier Editora Ltda.

Todos os direitos reservados e protegidos pela Lei nº 9.610, de 19/2/1998.
Nenhuma parte deste livro, sem autorização prévia por escrito da editora, poderá ser reproduzida ou transmitida sejam quais forem os meios empregados: eletrônicos, mecânicos, fotográficos, gravação ou quaisquer outros.

Revisão: Marco Antonio Correa
Editoração Eletrônica: Thomson Digital

Elsevier Editora Ltda.
Conhecimento sem Fronteiras
Rua Sete de Setembro, 111 – 16º andar
20050-006 – Centro – Rio de Janeiro – RJ – Brasil

Rua Quintana, 753 – 8º andar
04569-011 – Brooklin – São Paulo – SP – Brasil

Serviço de Atendimento ao Cliente
0800-0265340
atendimento1@elsevier.com.br

ISBN 978-85-352-5153-1
ISBN (versão eletrônica) 978-85-352-5154-8

Nota: Muito zelo e técnica foram empregados na edição desta obra. No entanto, podem ocorrer erros de digitação, impressão ou dúvida conceitual. Em qualquer das hipóteses, solicitamos a comunicação ao nosso Serviço de Atendimento ao Cliente, para que possamos esclarecer ou encaminhar a questão.
Nem a editora nem o autor assumem qualquer responsabilidade por eventuais danos ou perdas a pessoas ou bens, originados do uso desta publicação.

**CIP-BRASIL. CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO
SINDICATO NACIONAL DOS EDITORES DE LIVROS, RJ**

S691i

Soriano, Humberto Lima
Introdução à dinâmica das estruturas / Humberto Lima Soriano. - 1. ed. - Rio de Janeiro: Elsevier, 2014.
il. ; 24 cm.

Inclui bibliografia e índice
ISBN 978-85-352-5153-1

1. Teoria das estruturas. 2. Engenharia de estruturas. . I. Título.

14-08796

CDD: 624.171
CDU: 624

*À minha dedicada esposa, Carmina,
e aos meus queridos filhos,
Humberto e Luciana.*



*“Se eu fosse recomençar meus estudos,
seguiria o conselho de Platão e
começaria pela matemática.”*

Galileo Galilei





Prefácio

A *Dinâmica das Estruturas* é um fascinante tema comumente incluído em disciplina optativa nos currículos de graduação em engenharia e é matéria obrigatória em cursos de pós-graduação na ênfase de estruturas. Isso porque a disponibilidade de diversos eficientes programas de computador, aliada ao aumento da eficiência de processamento dos micro-computadores, tem tornado cada vez mais frequente análise dinâmica. Principalmente em projeto de estrutura arrojada, por questões econômicas e de segurança, é imperativo determinar com acurácia o comportamento estrutural. No caso, não se justifica o uso de procedimentos aproximativos através de forças pseudoestáticas (equivalentes às ações dinâmicas), sendo a compreensão da *Dinâmica das Estruturas* a limitação para efetuar sofisticadas análises com aqueles programas. Assim, desenvolver essa compreensão é um desafio aos novos engenheiros, e o objetivo deste livro é facilitar esse desafio.

Escrevi este livro a partir dos dois últimos capítulos da obra *Método dos Elementos Finitos – Formulação e Aplicação em Estática e Dinâmica das Estruturas*, em que abordei essa dinâmica de forma condensada e no contexto do referido método. Neste novo livro autônomo, desenvolvo a dinâmica de forma ampla.

Apresento os conceitos, princípios e usuais métodos da *Dinâmica das Estruturas*, nos domínios do tempo e da frequência, além dos temas específicos de análise sísmica e de resolução do problema de autovalor em obtenção eficaz das características dinâmicas. Isto é, a determinação computacional das frequências e modos naturais de vibração de modelos com qualquer número de graus de liberdade. Nos exemplos numéricos processados através de computador, para controle da automatização dos diversos métodos, utilizei os algoritmos aqui apresentados e desenvolvidos por mim. Para confiabilidade, resultados de métodos diferentes foram cotejados entre si e, para possibilitar a conferência de tais resultados, todos os dados dos exemplos foram fornecidos.

Esforcei-me em apresentar a *Dinâmica das Estruturas* com rigor matemático, embora de forma simples e clara, com o objetivo de torná-la acessível aos iniciantes, e o seu estudo, na medida do possível, prazeroso pela oportunidade de compreender uma importante área de conhecimento da engenharia. Espero que tenha conseguido alcançar esse ambicioso intento.

O termo *introdução* que consta no nome deste livro se justifica pela grande amplitude da *Dinâmica das Estruturas*, que inclui, além dos tópicos aqui tratados, sistemas contínuos, dinâmica aleatória, dinâmica aeroelástica, propagação de onda, técnicas de medição de vibrações e critérios quanto ao conforto humano em ambiente vibratório. Contudo, como esses temas são de

aplicação muito específica e os usuais métodos de análise dinâmica são aqui desenvolvidos de forma consistente, com muitos exemplos e orientações de aplicação, este livro atenderá a disciplinas de graduação e de pós-graduação, assim como a engenheiros que projetam estruturas.

Ao leitor autodidata esclareço que são necessários conhecimentos básicos de *Estática (dos corpos rígidos)*, *Resistência dos Materiais*, *Álgebra Matricial* e *Cálculo Diferencial e Integral*. Além disso, é desejável uma iniciação em *Dinâmica dos Corpos Rígidos*, *Análise Matricial de Estruturas* e *Método dos Elementos Finitos*. Não obstante, para suprir eventual deficiência desses conhecimentos, os princípios e conceitos fundamentais da *Dinâmica Clássica* estão incluídos no Capítulo 1, e resumos da *Análise Matricial de Estruturas* e do *Método dos Elementos Finitos* estão apresentados no Capítulo 5. Além disso, para que possa automatizar os algoritmos dos métodos aqui desenvolvidos, é aconselhável que o leitor tenha familiaridade com uma linguagem computacional. Isso porque, embora existam diversos eficientes programas comerciais de análise dinâmica, o desenvolvimento próprio e a utilização de programações simples constituem a melhor maneira de compreender o funcionamento e a aplicabilidade dos métodos dessa análise.

No estudo deste livro, o foco principal deve ser o entendimento das premissas e da lógica do desenvolvimento dos métodos, e não propriamente a checagem dos desenvolvimentos analíticos. Nesse sentido, ao final de cada capítulo são propostos diversos exercícios (com as respectivas respostas), além da proposição de muitas questões para reflexão, que permitirão testar, melhorar e consolidar a aprendizagem. A habilidade em efetuar análises dinâmicas só é adquirida em experimentação, após a compreensão dos seus fundamentos e dos correspondentes métodos. Não basta saber “funcionar” um programa de computador, é necessário entender o que está por trás das opções oferecidas pelo mesmo, assim como saber interpretar e validar os seus resultados.

Em suma, espero que o leitor tenha apreço pela matemática, computação e comportamento de estruturas, além de estar inclinado a exercitar experimentação.

Sou grato ao saudoso professor *Fernando Lobo Barboza Carneiro*, que me apresentou à *Análise Matricial de Estruturas*, ao saudoso professor *Fernando Venancio Filho*, que despertou o meu interesse pela *Dinâmica das Estruturas*, e aos colegas que apresentaram sugestões ao presente texto.

Agradeço à Escola Politécnica da UFRJ e à COPPE-UFRJ, onde fui professor por muitos anos, ao CNPq – Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, que me apoiou como pesquisador, à Faculdade de Engenharia da UERJ, que me propiciou a oportunidade do desenvolvimento dos manuscritos deste livro, e à *Editora Elsevier*, pela produção gráfica deste livro. Antecipadamente agradeço aos leitores que enviarem comentários, sugestões e críticas ao endereço eletrônico sorianohls@gmail.com, de modo que possam contribuir ao melhoramento deste texto para futuras edições. A um livro técnico sempre se pode agregar valor, independentemente da necessidade de sua contínua atualização. Além do que, a receptividade de meus livros é o grande incentivo para continuar como autor.

Importa também registrar o inestimável apoio e a carinhosa compreensão de minha esposa *Carmina* e de meus filhos *Humberto* e *Luciana*, sem os quais este livro não viria a se tornar realidade.

Humberto Lima Soriano



CAPÍTULO 1

Fundamentos

O QUE É E QUAL A IMPORTÂNCIA DA DINÂMICA DAS ESTRUTURAS?

As estruturas são sistemas físicos sujeitos a ações externas, capazes de transmitir esforços. Essas ações usualmente variam com o tempo (em magnitude, posição, direção e/ou sentido) e são qualificadas como *dinâmicas* em caso de desenvolvimento de forças de inércia relevantes. Comumente são decorrentes de atividade humana (tal como correr, pular e dançar), de equipamentos móveis (como veículos e pontes rolantes) ou com partes móveis (como vibradores, compactadores, turbinas, centrifugadores, peneiras giratórias), como também provenientes de vento, explosões, ondas marítimas e sismos. Tais ações causam vibrações nas estruturas, que podem não só danificá-las como também provocar fadiga em seus materiais e afetar a utilidade destas no que se refere ao conforto de seus usuários e ao funcionamento de equipamentos suportados pelas mesmas. Contudo, às vezes, as vibrações são benéficas, como em instrumentos musicais e em equipamentos separadores por granulometria, em parques de diversão, adensamento de concreto, limpeza ultrassônica, entre outros.

Em particular na Engenharia Civil, com o aumento dos limites da resistência do concreto e do aço, como também do desenvolvimento da tecnologia de construção, têm sido projetadas e construídas edificações cada vez mais esbeltas e de grandes vãos, mais suscetíveis a vibrações e com reduzida capacidade de dissipação de energia. Nas Engenharias Mecânica e Aeronáutica, a fabricação de equipamentos cada vez mais eficientes tem requerido acentuado controle de vibrações.

Assim, em projeto de estruturas, é necessário caracterizar matematicamente as ações externas dinâmicas e determinar o efeito e a relevância das consequentes oscilações, para o controle destas, com o adequado dimensionamento dos componentes estruturais e de suas ligações. O estudo desse efeito é chamado de *Dinâmica das Estruturas* e é imprescindível ao engenheiro que milita em projeto estrutural.

Ações externas dinâmicas são idealizadas como *determinísticas* (definidas analítica ou numericamente em função do tempo) ou como *aleatórias*, também denominadas *ações randômicas* (sem valores definidos em cada instante e tratadas de forma probabilística). Com essas idealizações, os métodos de análise dinâmica são divididos em *determinísticos* e em *probabilísticos*. Através dos primeiros, definidas as ações dinâmicas, obtém-se o comportamento temporal da estrutura. Com os métodos probabilísticos, a partir de informações estatísticas daquelas ações determinam-se características probabilísticas desse comportamento.

As ações determinísticas são forças externas (funções do tempo ou que se deslocam sobre a estrutura) e/ou movimentos impostos aos apoios (independentes entre si ou como resultantes do movimento de base rígida) que podem ser simulados através de forças dinâmicas equivalentes, de maneira a se obterem equações de movimento em semelhança às daquelas forças. A construção e resolução dessas equações através de métodos matriciais e técnicas numéricas programadas em computador, assim como a interpretação dos correspondentes resultados, é o que se denomina *análise dinâmica de estrutura*.

O desenvolvimento da teoria de dinâmica em engenharia iniciou-se, a partir do início do século passado, com o estudo do comportamento de equipamentos mecânicos através de modelos simples. Grandes contribuições se devem ao croata Stephen Prokofyevich Timoshenko (1878-1972) e ao holandês Jacob Pieter Den Hartog (1901-1989). No decorrer do tempo, esse estudo estendeu-se às demais áreas que lidam com o projeto de estruturas e, com a disponibilidade e o aumento da capacidade de processamento dos computadores, os modelos e métodos de análise dinâmica foram aprimorados de maneira a possibilitar a simulação, com grande acurácia, do comportamento das mais sofisticadas estruturas. Contudo, modelos simples são úteis para evidenciar conceitos e aplicações dos referidos métodos, desenvolver a intuição do engenheiro quanto ao comportamento de estruturas, orientar a construção de modelos mais elaborados e balizar a interpretação e checagem dos resultados desses últimos modelos.

Este livro apresenta os fundamentos e os principais métodos numéricos determinísticos dessa dinâmica, juntamente com exemplos ilustrativos e orientações de ordem prática. Buscou-se simplicidade, na medida em que o tema a permitiu, para que o leitor possa vir a entender o que está por trás das programações comerciais de análise dinâmica, assim como venha a ter subsídios para o desenvolvimento de seus próprios programas automáticos.

Adianta-se que uma análise dinâmica requer mais conhecimento e experiência do que uma análise em que as forças de inércia sejam consideradas desprezíveis. Este é o caso em que as ações externas são qualificadas como *estáticas* e a resolução do correspondente problema, chamada de *análise estática*, não utiliza variável tempo. Não só o estabelecimento das ações dinâmicas é mais elaborado do que em caso das ações estáticas, como é necessário naquela análise identificar e utilizar o método mais adequado em cada situação. Além disso, uma análise dinâmica é mais demorada computacionalmente e requer mais ampla interpretação de resultados do que uma análise estática. Entretanto, o leitor compreenderá que os métodos daquela análise são, em grande parte, de concepção simples, como entenderá que a escolha do método depende do modelo idealizado para a estrutura, das ações externas dinâmicas, dos resultados desejados, dos recursos computacionais disponíveis e de sua própria experiência. Assim, a sensibilidade do engenheiro analista experiente indicará o caminho a tomar em cada caso.

Na estruturação deste livro, o primeiro número atribuído a um exemplo, equação, figura ou tabela se refere ao capítulo, o segundo diz respeito à seção do capítulo, e o consecutivo, à ordem do item dentro da correspondente seção, independentemente de que esta tenha subdivisões ou não.

Quanto às notações, o significado de cada variável é definido quando da primeira ocorrência no texto, e as principais notações são descritas em conjunto após o último capítulo. Neste capítulo, as grandezas vetoriais são representadas por letras em **negrito**, e as suas intensidades, pelas correspondentes letras sem **negrito**. Ao longo do texto, as matrizes

quadradas e retangulares são denotadas com letras maiúsculas em negrito, e os seus coeficientes, denotados preferencialmente pelas mesmas letras em minúsculo, sem negrito. Os vetores colunas são preferencialmente designados por letras minúsculas em negrito, e os seus coeficientes, sem negrito. Além disso, a vírgula como subscrito indica derivada em relação à(s) variável(eis) que lhe segue(m) também como subscrito(s), e o ponto sobre uma notação indica derivada em relação à variável tempo.¹

Quanto a este capítulo, as suas seções tratam dos seguintes temas:

- 1-1 Fornecimento de informações de modelagem de sistemas físico-mecânicos.
- 1-2 Apresentação dos fundamentos e principais definições da *Dinâmica Clássica*, tais como: *leis de Newton*, referencial inercial, momento de inércia de massa, quantidade de movimento, força de inércia, impulso e *princípio de d'Alembert*.
- 1-3 Caracterização dos modelos contínuos e discretos de sistemas físicos, a partir da conceituação de grau de liberdade.
- 1-4 Descrição dos diversos procedimentos de obtenção das equações de movimento de sistemas mecânicos, com a apresentação dos conceitos de trabalho e das diversas formas de energia mecânica.
- 1-5 Detalhamento do comportamento de diversos tipos de pêndulos (que são os sistemas mecânicos oscilatórios mais simples), através da construção e resolução das correspondentes equações de movimento e com a caracterização dos conceitos de vibração livre não amortecida, solução harmônica, frequência natural e período natural, centro de oscilação e equilíbrios estável e indiferente, assim como de instabilidade de equilíbrio.
- 1-6 Sugestão de exercícios para resolução.
- 1-7 Proposição de questões para reflexão.

Dessa forma, o propósito deste capítulo é disponibilizar conceitos, princípios, grandezas e equações fundamentais à *Dinâmica das Estruturas*, antes de enveredar pelo seu estudo que se inicia no capítulo subsequente. Contudo, como os tópicos relacionados anteriormente são tratados em livros de Mecânica de cursos de graduação em Engenharia, parte do conteúdo deste capítulo poderá ser de domínio do leitor, que saberá escolher as seções necessárias a ele.

1-1 INTRODUÇÃO

Em análise de sistemas físicos, devido à complexidade da natureza, é necessário construir modelos matemáticos (analíticos) que simulem os comportamentos desses sistemas sob ações externas diversas, o que requer a adoção de princípios e leis físicas, além de hipóteses

¹ A maior parte das citações históricas apresentadas foi retirada das referências: Oravas, G.A. & McLean, L., 1966, *Historical Development of Energetical Principles in Elastomechanics*, Applied Mechanics Reviews, part I, vol. 19, nº 8, p. 647–658, e part II, vol. 19, nº 11, p. 919–933; Hamilton, S.B., 1952, *The Historical Development of Structural Theory*, Proceedings – The Institution of Civil Engineering, part III, p. 374–419; Truesdell, C., 1982, “História da Mecânica Clássica”, *Revista Brasileira de Ciências Mecânicas*, parte I, vol. IV, nº 2, p. 3–7, e parte II, vol. V, nº 3, p. 3–21; e Timoshenko, S.P., *History of Strength of Materials*, 1983. E parte da terminologia foi retirada de *Vibrações Mecânicas e Choques*, NBR 7497, 1982, ABNT.

de cunho aproximativo. Foram, então, desenvolvidos diversos modelos e teorias ratificadas em experimentação física que têm validade e acurácia dentro das condições limites impostas por esses princípios, leis e hipóteses. Tais modelos devem ser utilizados dependentemente dos recursos de cálculo disponíveis, em compromisso entre simplicidade e acurácia, sob o crivo do engenheiro.

Entre as teorias, tem-se a *Dinâmica*, parte da *Mecânica Clássica*, que trata do movimento de partículas, sistemas de partículas e corpos rígidos, sob a ação de forças. Com base nos princípios e conceitos fundamentais dessa dinâmica, foi desenvolvida a *Dinâmica das Estruturas*.

No contexto da referida mecânica, define-se *partícula* ou *ponto material* como uma quantidade finita de matéria cujas dimensões possam ser consideradas desprezíveis no estudo de seu movimento, o que implica em desconsiderar rotação. Assim, uma partícula fica associada a um ponto no espaço euclidiano, e um conjunto de partículas constitui um *modelo discreto*. Diferentemente dessa idealização, define-se *corpo* como uma quantidade de matéria formada por inúmeros elementos infinitesimais de volume e massa, com a denominação de *modelo contínuo*, em abstração à estrutura real da matéria em átomos e em partículas subatômicas, como elétrons, prótons e nêutrons (esses dois últimos constituídos de partículas ainda mais elementares denominadas *quarks*).

Além disso, o modelo corpo pode ser concebido como *rígido* ou como *deformável*. Em *corpo rígido*, os elementos infinitesimais constituintes são considerados com posições relativas fixas entre si, o que equivale a supor que o corpo não sofra alterações de dimensões e de forma, quando submetido a forças. Já na idealização de *corpo deformável*, as posições relativas de seus elementos infinitesimais se alteraram em função de propriedades da matéria e das ações externas, de maneira a ser utilizável o cálculo infinitesimal iniciado por *Newton* e *Leibniz*.² Além disso, a idealização de um sistema físico constituído de uma ou mais partes deformáveis, intercaladas ou não de componentes rígidos, capazes de receber e transmitir esforços, é denominada *estrutura*.

As equações de governo do movimento de um corpo rígido são diferenciais apenas na variável tempo, e as equações de movimento de um corpo deformável (e consequentemente das estruturas) são diferenciais nessa variável e nas coordenadas de especificação do domínio geométrico do correspondente modelo. Essas equações podem ser lineares ou não lineares e, por serem diferenciais parciais, têm soluções analíticas apenas em casos muito particulares. Devido a esse fato, é usual discretizar o domínio geométrico, com a transformação de um modelo contínuo em um modelo discreto, o que permite a substituição daquelas equações diferenciais parciais por equações ordinárias com respeito à variável temporal. Isso é o que ocorre de forma natural ao se idealizar uma estrutura como constituída de elementos unidimensionais de barra, juntamente com um procedimento de discretização de massa, recaindo-se em um modelo em que as incógnitas primárias dizem respeito a um número discreto de deslocamentos em pontos qualificados como *nodais*. É também o que acontece em modelos contínuos laminares ou de caráter tridimensional, quando se adota o *Método dos Elementos Finitos*.

² Sir Isaac Newton (1642-1727), filósofo, físico, astrônomo e matemático inglês. Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716), filósofo e matemático alemão.

Contudo, como as equações de movimento dos modelos discretos são ainda diferenciais, a resolução das mesmas pode não ser evidente a um leitor pouco familiarizado com o cálculo diferencial. Isso, entretanto, não deve obstar o estudo e a aplicação dos métodos aqui desenvolvidos, porque o essencial é: (1) compreender a realidade física do sistema estrutural que se deseja analisar, (2) conhecer os princípios, leis e hipóteses que embasam a construção do correspondente modelo matemático, (3) entender a extensão da aplicação das equações de movimento que expressam o comportamento desse modelo e (4) saber como obter e interpretar de forma crítica os correspondentes resultados. Em ocasião posterior, dependendo da necessidade acadêmica do leitor, este poderá se dedicar a um estudo mais detalhado do desenvolvimento e aplicação de cada um dos métodos de análise tratados neste livro.

1-2 FUNDAMENTOS HISTÓRICOS

O conhecimento é sempre um processo evolutivo. Os princípios e conceitos fundamentais da *Dinâmica Clássica* surgiram a partir do século XVII, notadamente através de Galileu, Newton, Leibniz, Euler, Lagrange, d'Alembert e Hamilton, e são tratados concisamente nesta seção, por serem necessários ao desenvolvimento da *Dinâmica das Estruturas*. Além disso, a presente revisão, com dados históricos, é motivadora à continuidade do estudo das demais seções.

Consta que Galileu Galilei, nos seus 19 anos, percebeu coincidência das oscilações de um candelabro da Catedral de Pisa e o ritmo de seu pulso. Identificou que o período do movimento pendular independe da massa oscilante e da amplitude da oscilação, e utilizou pêndulo em medida de tempo.³ Estimulado por essa descoberta, estudou, de forma sistemática e com experimentos, o movimento dos corpos na proximidade da Terra. Entre outras relevantes contribuições ao início da *Mecânica Clássica*, formulou o conceito de referencial e identificou que os corpos caem em movimento acelerado independentemente de suas massas.⁴ Contudo, não identificou que a aceleração de queda depende da distância à Terra e não relacionou os movimentos acelerados dos corpos com as forças que os produzem.

Tem-se como lenda que o gênio Isaac Newton, aos seus 23 anos, quando em observação da queda de uma maçã, teria compreendido o fenômeno da atração entre os corpos. Com essa compreensão relacionou o movimento dos corpos com as forças que são aplicadas neles e, entre muitas importantes contribuições à ciência, apresentou quatro leis ou princípios

³ O pêndulo era conhecido nas antigas culturas gregas e chinesas. E o filósofo, astrônomo e matemático italiano Galileu Galilei (1564-1642) não percebeu que pêndulo de trajetória em arco circular pode ser considerado isócrono apenas em caso de pequenas oscilações. Coube ao matemático, físico e astrônomo holandês Christiaan Huygens (1629-1695) identificar o isocronismo de pêndulos de trajetória cicloidal e registrar a patente do relógio de pêndulo em 1656. Neste, a dissipação de energia devido à oposição do ar e ao atrito entre as partes móveis é compensada pela redução da energia potencial gravitacional de uma massa suspensa por um fio.

⁴ Desde o filósofo natural grego Aristóteles (384-322a.C.), acreditava-se que os corpos caíssem com velocidade constante dependente de seus pesos e que era necessária uma força para manter o movimento de um corpo, mesmo em velocidade constante. Essa concepção foi alterada por Galileu em sua obra *Discorsi e Dimostrazione Matematiche Intorno a due Nuove Scienze*, em 1638, conhecida como *Discorsi*. Galileu demonstrou que corpos de pesos diferentes caem com a mesma aceleração (o que se cumpre em ausência da resistência do ar) e concebeu a propriedade de inércia.

físicos que fundamentam a *Mecânica Clássica*.⁵ Os três primeiros são conhecidos como *leis do movimento*, que, em texto modernizado simples, são as seguintes:

1. Toda partícula permanece em estado de repouso ou em movimento retilíneo uniforme, a menos que a resultante das forças que atuam sobre a mesma seja diferente de zero. É o *princípio da inércia* ou *primeira lei de Newton*, nome que não leva em consideração que esse princípio já fosse do conhecimento de Galileu.

Diz-se que a partícula está em equilíbrio quando aquela resultante é nula. Esse princípio se estende a sistemas de partículas e a corpos (rígidos ou deformáveis). Estabelece a propriedade da matéria em resistir a qualquer modificação de estado de repouso ou de movimento uniforme, propriedade esta denominada *inércia translacional*.

2. A derivada, em relação ao tempo, do produto da massa de uma partícula pela velocidade da mesma é proporcional à resultante das forças que lhe são aplicadas e tem a direção desta. É a *segunda lei de Newton*, também conhecida como *princípio fundamental da dinâmica*, que se escreve:⁶

$$\mathbf{f} \propto \frac{d}{dt} \left(m \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right) \rightarrow \mathbf{f} \propto \frac{d}{dt} (m\dot{\mathbf{u}}) \rightarrow \mathbf{f} \propto \frac{d}{dt} (m\mathbf{v}) \quad (1-2.1)$$

onde t denota a variável tempo, m é a massa da partícula, \mathbf{u} representa o vetor deslocamento (translacional), \mathbf{v} é o vetor velocidade e $m\mathbf{v}$ é o vetor *quantidade de movimento* (linear).⁷

Em caso de massa invariante no tempo e unidade de massa adequada para que a constante de proporcionalidade seja unitária, a resultante das forças aplicadas à partícula foi escrita por Euler,⁸ em 1752, como igual ao produto da massa pela aceleração. Ou seja:

$$\mathbf{f} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \rightarrow \boxed{\mathbf{f} = m\ddot{\mathbf{u}} = m\mathbf{a}} \quad (1-2.2)$$

onde \mathbf{a} denota o vetor aceleração.⁹

⁵ Newton apresentou esses princípios na obra *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, em 1687, conhecida como *Principia*.

⁶ As leis de movimento de Newton, válidas em caso de velocidade pequena em relação à da luz, requerem um referencial fixo absoluto, dito *referencial inercial* ou *newtoniano*. Contudo, em *Dinâmica das Estruturas*, mesmo com o movimento da Terra, um referencial idealmente fixado à mesma é considerado como inercial (com excelente aproximação) e denominado *referencial de Galileu*.

⁷ O conceito de quantidade de movimento é atribuído a René Descartes du Perón (1596-1650), filósofo, físico e matemático francês.

⁸ Leonhard Euler (1707-1783), matemático, astrônomo e físico suíço.

⁹ Essa é uma equação diferencial de solução única determinada a partir de uma posição da partícula e da correspondente velocidade, em dado instante. A unidade de força no SI é denominada *newton*: expressa pelo símbolo N, refere-se à força que imprime à massa de 1 kg a aceleração de 1 m/s².

É imediato concluir que essa lei inclui o *princípio da inércia*, em caso de se ter conservação da quantidade de movimento, quando então a velocidade é constante. Isto é, quando a referida resultante é nula e, conseqüentemente, a partícula esteja em repouso ou em movimento de translação uniforme.

Euler estendeu essa lei ao movimento de rotação de corpo rígido em torno de um ponto fixo. Um caso particular é o de rotação de um corpo C em torno de um eixo o-o', sob a ação de um torque \mathbf{t} (também denominado *momento de força*), como ilustra a próxima figura. Nesse caso, cada elemento infinitesimal de massa “dm” tem trajetória circular de raio r em um plano perpendicular a esse eixo, com o vetor velocidade angular de intensidade ($\omega = d\theta/dt = \dot{\theta}$) e de mesma direção e mesmo sentido que o vetor torque, sendo θ o ângulo de rotação.¹⁰

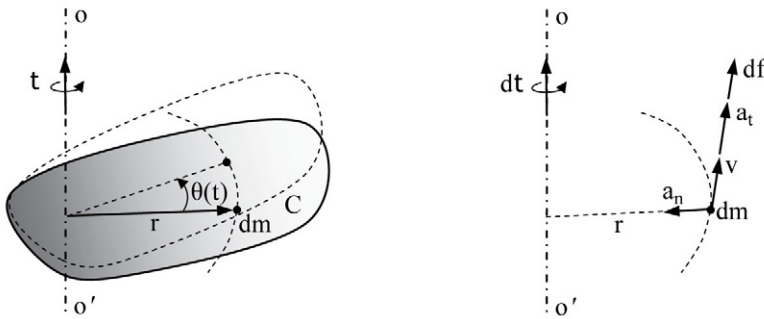


FIGURA 1-2.1 Rotação plana de corpo rígido.

A velocidade (linear) do referido elemento infinitesimal é um vetor tangente à trajetória circular, de intensidade ($v = \omega r = r\dot{\theta}$). Já o vetor aceleração tem um componente tangencial a essa trajetória, de mesmo sentido que a referida velocidade e de intensidade ($a_t = dv/dt = r\ddot{\theta}$). Esse vetor tem também um componente normal à trajetória, de intensidade ($a_n = v^2/r = \dot{\theta}^2 r$) e denominado *aceleração centrípeta* porque é direcionado para o centro de curvatura da trajetória. Logo, de acordo com a Equação 1-2.2, a massa infinitesimal dm está sujeita a uma força elementar tangencial e de intensidade ($df = a_t dm = r\ddot{\theta} dm$), que é igual ao torque elementar ($dt = r^2 \ddot{\theta} dm \mathbf{n}$), em que \mathbf{n} é um vetor unitário adimensional na direção e sentido que o vetor \mathbf{t} .

Conseqüentemente, o torque total tem a expressão:

$$\mathbf{t} = \int_C r^2 \ddot{\theta} dm \mathbf{n} = (\int_C r^2 dm) \ddot{\theta} \mathbf{n} \quad \rightarrow \quad \boxed{\mathbf{t} = I_o \ddot{\theta} \mathbf{n}} \quad (1-2.3)$$

em que

$$\boxed{I_o = \int_C r^2 dm} \quad (1-2.4)$$

é o *momento de inércia (polar) de massa* ou *inércia rotacional*, em relação ao eixo o-o'.

¹⁰ Velocidade e aceleração angulares são grandezas vetoriais, embora deslocamento angular finito não o seja.

De acordo com o *teorema de Steiner*,¹¹ também denominado *teorema dos eixos paralelos*, tendo-se o momento de inércia de massa I_G em relação a um eixo que passa pelo centro de massa do corpo, o momento de inércia em relação a outro eixo que lhe seja paralelo se escreve:

$$I_o = I_G + md^2 \quad (1-2.5)$$

onde d é a distância entre os referidos eixos, e m , a massa do corpo.

Além disso, de forma mais geral do que o expresso na Equação 1-2.3, o torque é igual à derivada temporal do vetor *quantidade de movimento angular* em torno do referido eixo, ($I_o \omega \mathbf{n}$). Isto é:

$$\mathbf{t} = \frac{d}{dt} (I_o \omega \mathbf{n}) \quad (1-2.6)$$

3. Como força é uma ação entre duas partículas, por contato ou por efeito de campo, a toda força corresponde uma reação igual e oposta, ao longo da linha que une as partículas.¹² Este é o *princípio da ação e reação*, ou *terceira lei de Newton*.

Finalmente, o quarto axioma de Newton é a *lei da gravitação universal* segundo a qual a força de atração mútua entre duas partículas é proporcional às suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas.¹³ Assim, essa força tem a expressão matemática:

$$\mathbf{f} = G \frac{m_1 m_2}{d^2} \mathbf{n} \quad (1-2.7)$$

em que m_1 e m_2 são as massas das partículas, d é a distância entre as mesmas, G é a constante de proporcionalidade denominada *constante universal da gravidade* e \mathbf{n} é um vetor unitário adimensional na linha de ação que liga as partículas.¹⁴ Essa lei define a *força gravitacional* que é um caso particular de *força de campo* ou de *ação à distância*.¹⁵

Logo, para um corpo de massa m , escreve-se o seu peso sob a forma:

¹¹ Jacob Steiner (1796-1863), matemático suíço.

¹² Forças de interação entre partículas carregadas em campos elétricos não são necessariamente colineares.

¹³ Com essa lei, cuja equação não foi escrita por Newton, a crença de que os corpos caem com aceleração constante foi alterada, uma vez que a força gravitacional terrestre depende da distância dos corpos em relação ao centro de massa da Terra.

¹⁴ O valor dessa constante foi determinado experimentalmente e é aceito como ($G=6,673 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$). Em 1798, o físico e químico britânico Henry Cavendish (1731-1821) utilizou um pêndulo de torção constituído essencialmente de duas pequenas esferas de mesma massa, fixas nas extremidades de uma haste horizontal suspensa a partir de seu centro de massa por uma fina fibra metálica. A aproximação de duas grandes massas a essas esferas provocou a torção do pêndulo, a partir da qual foi obtida a densidade média da Terra. E com os dados e resultados de Cavendish, foi determinado o valor de G com três algarismos significativos, em 1872.

¹⁵ Essa lei é válida para campos gravitacionais fracos. De acordo com a mesma, os corpos gravitam em direção à Terra, da mesma forma que esta gravita em direção a todos os corpos, celestes ou não, e estes gravitam entre si. Contudo, para os corpos e estruturas estudadas na Engenharia e posicionadas próximos à superfície da Terra (devido à grande massa desta e à pequena distância entre ela e esses corpos), é relevante apenas a força gravitacional terrestre, que recebe o nome de *peso*.

$$\mathbf{f} = m \left(G \frac{M}{d^2} \right) \mathbf{n} \rightarrow \boxed{\mathbf{f} = m\mathbf{g}} \quad (1-2.8)$$

onde M é a massa da Terra, \mathbf{n} é um vetor unitário adimensional dirigido para o centro da Terra e

$$\boxed{\mathbf{g} = G \frac{M}{d^2} \mathbf{n}} \quad (1-2.9)$$

é o vetor aceleração gravitacional ou aceleração da gravidade (terrestre).¹⁶

A segunda lei de Newton pode ser escrita sob a forma:

$$\boxed{\mathbf{f} - m\mathbf{a} = \mathbf{0}} \quad (1-2.10)$$

que, por vezes, é considerado como o *princípio de d'Alembert*.¹⁷ Isto é, uma vez que se considere uma força fictícia de intensidade “ $m\mathbf{a}$ ”, em um referencial inercial e em sentido contrário à aceleração, denominada *força de inércia*, recai-se na expressão de uma resultante de forças de intensidade nula.¹⁸

Para um corpo sob a ação de um torque \mathbf{t} , a equação anterior modifica-se para a forma:

$$\boxed{\mathbf{t} - I_0 \ddot{\theta} \mathbf{n} = \mathbf{0}} \quad (1-2.11)$$

onde \mathbf{n} é o vetor unitário na direção e sentido de \mathbf{t} , e $-I_0 \ddot{\theta} \mathbf{n}$ é chamado de *torque de inércia*.

Em resumo, a concepção de força de inércia (ou torque de inércia) conduz a uma soma de forças (ou de momentos de força) de resultado nulo, de forma análoga ao caso estático, denominada *equação de equilíbrio dinâmico*. Ou seja, o *princípio de d'Alembert* é uma extensão do equilíbrio estático ao comportamento dinâmico e nada mais é do que a *segunda lei de Newton* escrita em forma modificada.

Além disso, devido ao fato de força, torque e aceleração serem grandezas vetoriais, o referido princípio pode ser escrito em termos dos componentes escalares dessas grandezas, em um sistema cartesiano xyz. Logo, com base na Equação 1-2.10, escrevem-se as equações escalares de equilíbrio dinâmico:

$$\begin{cases} f_x - ma_x = 0 \\ f_y - ma_y = 0 \\ f_z - ma_z = 0 \end{cases} \quad (1-2.12)$$

¹⁶ Com a massa da Terra estimada em $5,976 \cdot 10^{24}$ kg e o correspondente raio considerado como $6,371 \cdot 10^6$ m, através da Equação 1-2.9 obtém-se ($g = 9,825 \text{ m/s}^2$), que é uma aproximação ao valor $9,81 \text{ m/s}^2$ usualmente adotado, devido ao fato de a Terra ter rotação e não ser uma esfera homogênea.

¹⁷ Não há unanimidade quanto à forma de apresentação desse princípio, que é apenas um artifício matemático de obtenção das equações de movimento, divulgado pelo matemático, físico e filósofo francês Jean Baptiste Le Rond d'Alembert (1717-1783), em 1743.

¹⁸ No caso de estruturas, \mathbf{f} é a resultante das forças externas, juntamente com as forças elásticas e as forças de amortecimento que se opõem ao movimento.

Já em caso de rotação de um corpo paralelamente ao plano xy, têm-se as equações de equilíbrio dinâmico sob as formas:

$$\begin{cases} f_x - ma_x = 0 \\ f_y - ma_y = 0 \\ t_z - I_o \ddot{\theta}_z = 0 \end{cases} \quad (1-2.13)$$

em que I_o é o momento de inércia de massa em relação ao eixo do torque, sendo t_z a intensidade do momento das forças externas em relação a esse eixo.

Outra importante grandeza em dinâmica é o *impulso de uma força*, que é definido pela integral da expressão da Equação 1-2.2, entre dois instantes t_1 e t_2 , usualmente muito próximos entre si:

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f} \, dt = \int_{t_1}^{t_2} m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \, dt \quad \rightarrow \quad \boxed{\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f} \, dt = m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1} \quad (1-2.14)$$

Assim, impulso é a alteração da quantidade de movimento entre os referidos instantes e, portanto, em caso de força nula, recai-se no *princípio da conservação da quantidade de movimento (linear)*, cuja forma primitiva é o princípio da inércia. E em generalização daquele princípio, há o da *conservação da quantidade de movimento angular*.

1-3 MODELOS DISCRETOS E MODELOS CONTÍNUOS

Na introdução deste capítulo, referiu-se a modelos *contínuos* e a modelos *discretos*. Nesta seção, apresenta-se uma abordagem mais esclarecedora do tema.

Um modelo discreto é uma idealização em que a configuração geométrica de um sistema mecânico (em um instante qualquer) é especificada por um número finito de parâmetros cinematicamente independentes entre si, denominados *graus de liberdade* ou *coordenadas (de deslocamentos ou generalizadas)*.¹⁹ E como consequência dessa idealização, a massa, a rigidez e as forças atuantes no sistema são consideradas de forma discreta.

Para exemplificação, quatro modelos discretos simples estão esquematizados na próxima figura. O primeiro é um pêndulo constituído de uma massa m (idealizada como partícula) suspensa por um fio inextensível sem massa e de comprimento ℓ . A massa é suposta oscilar em um plano vertical, sob a ação de peso próprio, após ser dada à mesma uma perturbação lateral. Seu movimento é descrito pelo ângulo $\theta(t)$ que, portanto, é grau de liberdade. Embora uma posição da massa possa ser especificada pelos componentes de deslocamentos $u_x(t)$ e $u_y(t)$ indicados na mesma figura, tais componentes não são todos graus de liberdade, por não serem independentes entre si. Isso porque, tem-se a *equação de restrição* para esses componentes:²⁰

¹⁹ Em *Estática* a palavra *coordenada* é utilizada para a localização de um ponto da estrutura, como as coordenadas cartesianas, por exemplo. Em *Dinâmica*, é usada em especificação do movimento de um ponto em relação a uma configuração de referência.

²⁰ Trata-se de uma restrição geométrica ou holonômico.

$$(\ell - u_Y)^2 + u_X^2 = \ell^2 \quad \rightarrow \quad u_X = \sqrt{2\ell u_Y - u_Y^2} \quad (1-3.1)$$

Trata-se, então, de modelo de um grau de liberdade, embora em lugar de $\theta(t)$ possa ser utilizado $u_X(t)$, $u_Y(t)$ ou qualquer outro parâmetro que se relacione biunivocamente com $\theta(t)$, o qual recebe o nome de *coordenada generalizada*.

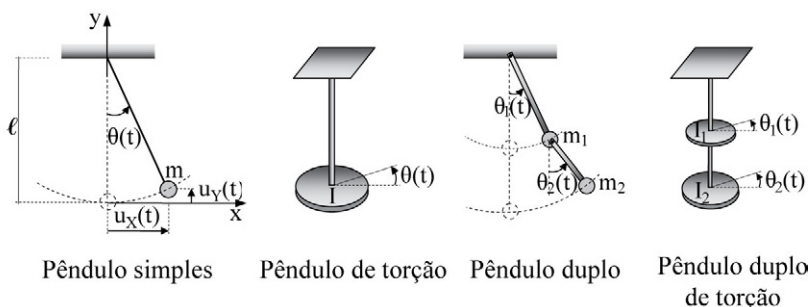


FIGURA 1-3.1 Pêndulos.

A segunda representação da [Figura 1-3.1](#) é a de um disco homogêneo de momento de inércia de massa I , suspenso a partir de seu centro de gravidade por um eixo elástico delgado. É o chamado *pêndulo de torção*, pelo fato de o disco poder oscilar em rotações horizontais $\theta(t)$, sob a ação da força elástica de torção desenvolvida no eixo, após ser dada ao disco uma perturbação de rotação. Assim, esse modelo tem também apenas um grau de liberdade. E as duas últimas representações da mesma figura são modelos de dois graus de liberdade, generalizações dos dois primeiros pêndulos.

Diferentemente de modelo discreto, um *modelo contínuo* de sistema estrutural tem configuração especificada por uma ou mais funções das coordenadas espaciais e do tempo. Consequentemente, a rigidez e a massa são consideradas distribuídas de forma contínua ao longo do modelo.²¹ É o caso das duas vigas representadas na parte superior da [Figura 1-3.2](#), que são idealizadas em seus eixos geométricos em que cada ponto tem o deslocamento vertical $u(X,t)$. Logo, pelo fato de esses eixos serem constituídos de infinitos pontos, essas idealizações têm infinitos graus de liberdade.

Em *teoria clássica de viga*, que adota a *hipótese da seção plana* e desconsidera a inércia rotacional, a função deslocamento transversal é a solução da equação diferencial no espaço e no tempo:²²

$$\rho A \ddot{u} + EI u_{,xxxx} - p = 0 \quad (1-3.2)$$

²¹ Uma partícula livre no espaço tem três graus de liberdade, que são os três componentes (em determinado referencial) do vetor deslocamento de translação, enquanto um corpo rígido tem seis graus de liberdade, aqueles três mais três ângulos que definem sua orientação. Consequentemente, cada ponto de um sólido elástico tem três graus de liberdade, e cada ponto representativo de seção transversal de barra de pórtico espacial tem seis graus, três que definem a posição do ponto e três que especificam a orientação da seção, todos denominados *componentes de deslocamentos*, ou simplesmente *deslocamentos*.

²² Vide Soriano (2009), p. 370.

com as condições de contorno e as condições iniciais de cada caso.²³ Nessa equação, ρ é a massa específica, A é a área da seção transversal, EI é o módulo de rigidez à flexão e p é a intensidade da força transversal distribuída ao longo da viga.

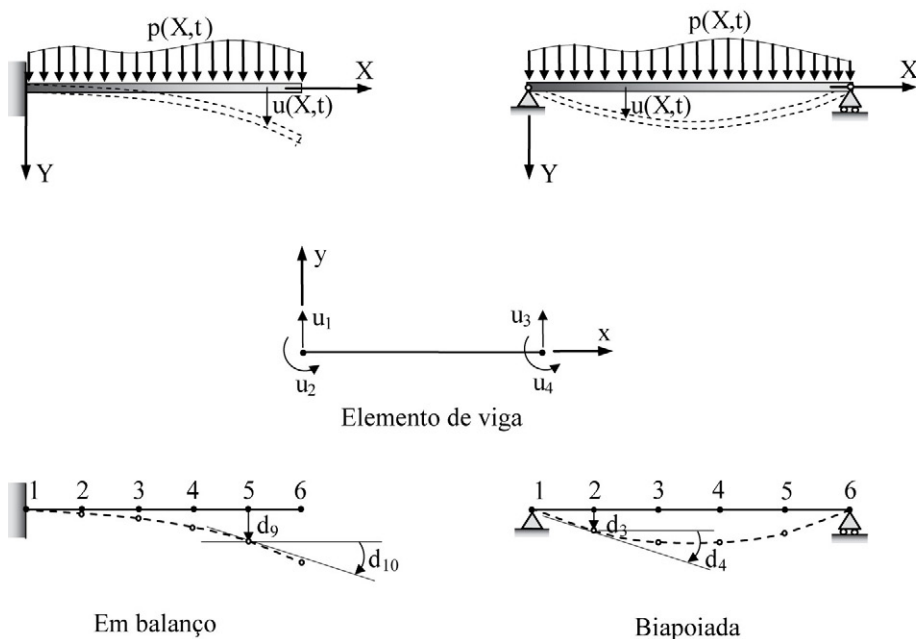


FIGURA 1-3.2 Vigas simples e correspondentes discretizações.

As equações de movimento dos modelos contínuos são diferenciais parciais na variável temporal e nas coordenadas do espaço geométrico de estudo desses modelos. Por essa razão, essas equações só têm soluções explícitas em casos muito simples. Já as equações de movimento dos modelos discretos (que costumam ser obtidas por discretização dos modelos contínuos através do *Método dos Elementos Finitos*, com a transformação dos infinitos graus de liberdade em um número finito de graus) são apenas diferenciais ordinárias na variável tempo. É o caso das discretizações mostradas na figura anterior, com a utilização do elemento de viga representado na parte intermediária da mesma figura, cujo comportamento é descrito pelos deslocamentos u_1 a u_4 indicados em seus pontos extremos.²⁴

Na discretização da viga em balanço da referida figura, os deslocamentos (em sentido generalizado que inclui translações verticais e rotações, de seções transversais) nos pontos nodais 2 a 6 são os graus de liberdade. Já na viga biapoiada, as rotações nos pontos 1 a

²³ As condições de contorno dizem respeito a valores conhecidos de deslocamentos (condições geométricas) e/ou de esforços em pontos do contorno (condições naturais), e as condições iniciais se referem a deslocamentos e velocidades dos pontos do domínio geométrico no instante inicial de estudo do movimento.

²⁴ O deslocamento rotacional em um ponto (do eixo geométrico de uma viga) diz respeito à rotação da correspondente seção transversal, rotação esta que é igual à declividade da linha elástica (eixo geométrico deformado) no referido ponto. Neste livro serão tratados apenas modelos discretos.

6, e os deslocamentos nos pontos 2 a 5 são os graus de liberdade. Com a discretização, obtém-se um sistema de equações diferenciais ordinárias em número igual ao dos graus de liberdade. Contudo, ainda assim, a integração dessas equações não é uma tarefa trivial, costuma requerer o uso de computador e ser levada a efeito através de superposição de soluções de modelos de um grau de liberdade ou de integração numérica direta, como será detalhado no Capítulo 6.

A discretização de um modelo introduz aproximações que se reduzem à medida que se refina a discretização. Entretanto, não é indicado um refinamento muito aprimorado, uma vez que o modelo contínuo já guarda aproximações em relação ao sistema físico original e porque aprimorar refinamento demanda mais trabalho de geração do modelo discreto e mais tempo de processamento automático, assim como dispêndio de tempo do engenheiro analista em interpretação e validação dos resultados computacionais.

1-4 FORMULAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

As equações de movimento de sistema mecânico podem ser obtidas com base na *segunda lei de Newton* (estendida a sistema de partículas e a corpos rígidos) ou com base no *princípio de d'Alembert*, que é derivado dessa lei. Cada componente do sistema é então considerado separadamente, com forças de interação entre os diversos componentes e com eventuais equações de restrição entre variáveis de movimento. São utilizadas coordenadas e grandezas vetoriais, o que motivou o nome de *Mecânica Vetorial* para essa abordagem. Alternativamente, aquelas equações podem ser formuladas com a consideração direta de todo o sistema, sem a utilização de forças de interação, mas através de grandezas escalares relacionadas com a noção de trabalho. É a chamada *Mecânica Analítica*, atribuída a Leibniz e a Lagrange. Seguidamente são apresentados conceitos fundamentais dessa mecânica, que é particularmente útil em análise de sistemas complexos, com múltiplas restrições.

Define-se o *trabalho* de uma força \mathbf{f} em um deslocamento infinitesimal $d\mathbf{u}$ de uma partícula que se move ao longo de uma trajetória curva, como mostra a parte esquerda da [Figura 1-4.1](#), como o produto escalar de vetores:

$$dW = \mathbf{f} \cdot d\mathbf{u} \quad \rightarrow \quad dW = f du \cos \alpha \quad (1-4.1)$$

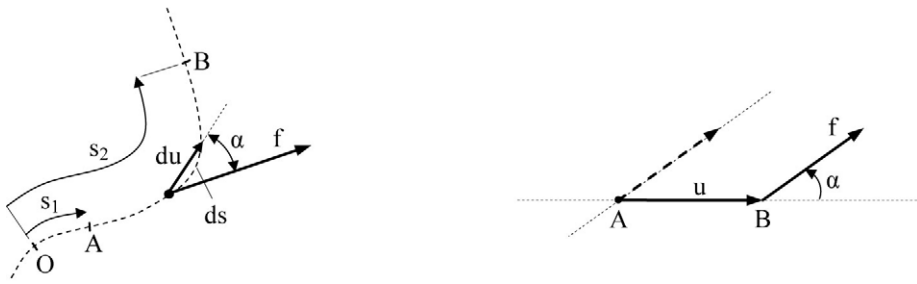
onde α é o ângulo formado entre as direções dos vetores \mathbf{f} e $d\mathbf{u}$. Assim, no conceito de trabalho não se tem referência ao tempo.

Com base no trabalho infinitesimal, escreve-se o trabalho no deslocamento finito da partícula ao longo da trajetória curvilínea, entre os pontos A e B:

$$W = \int_A^B \mathbf{f} \cdot d\mathbf{u} \quad \rightarrow \quad W = \int_{s_1}^{s_2} f \cos \alpha ds \quad (1-4.2)$$

em que ds é o comprimento do arco elementar que se confunde com o módulo do vetor $d\mathbf{u}$.²⁵

²⁵ No SI, a unidade de trabalho é denominada *joule*: expressa pelo símbolo J, refere-se ao trabalho realizado por uma força de 1N ao longo de um deslocamento de 1m.



$$dW = \mathbf{f} \cdot d\mathbf{u} = f du \cos \alpha$$

$$W = \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} = f u \cos \alpha$$

FIGURA 1-4.1 Trabalho de uma força.

Em caso de força constante e trajetória retilínea, como mostra a parte direita da mesma figura, tem-se o trabalho:

$$W = \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \rightarrow \boxed{W = f u \cos \alpha} \quad (1-4.3)$$

Assim, dependendo da inclinação da força, esse trabalho pode ser positivo ou negativo. Isto é, o trabalho é igual ao componente escalar do vetor força na direção do vetor deslocamento, vezes a intensidade desse último vetor.²⁶

Entre as diversas formas de energia, a mais relevante no presente contexto é a denominada *energia mecânica*, que pode ter a forma de *energia cinética (translacional ou rotacional)* e/ou a forma de *energia potencial (gravitacional ou elástica)*, como exposto seguidamente.

A *energia cinética translacional* é o trabalho realizado para levar uma massa m do estado de repouso até o estado de velocidade \mathbf{v} e se escreve:

$$E_c = \int_0^u \mathbf{f} \cdot d\mathbf{u} = \int_0^u m \mathbf{a} \cdot d\mathbf{u}$$

Além disso, de ($\mathbf{v} = d\mathbf{u}/dt$) e ($\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$) obtém-se ($\mathbf{a} \cdot d\mathbf{u} = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}$) e, portanto, a equação anterior toma a nova forma:²⁷

$$E_c = \int_0^v m \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} \rightarrow \boxed{E_c = \frac{1}{2} m v^2} \quad (1-4.4)$$

Essa energia é sempre positiva, depende da velocidade do corpo e diz-se que o corpo a possui.

Quanto a um corpo C que gira em torno de um eixo $o-o'$ com velocidade angular ω , tem-se, como foi ilustrado na [Figura 1-2.1](#), a velocidade tangencial de intensidade ωr de cada elemento infinitesimal distante r do referido eixo. Logo, de maneira semelhante ao caso anterior, escreve-se a *energia cinética rotacional*:

²⁶ De forma semelhante, o momento (de força) realiza trabalho igual ao componente escalar do vetor momento em um eixo perpendicular ao plano em que ocorre rotação, vezes o valor dessa rotação.

²⁷ Concepção preliminar de energia cinética foi desenvolvida por Leibniz, através da definição de “força viva” como o produto de massa pelo quadrado de sua velocidade.

$$E_c = \frac{1}{2} \int_C (\omega r)^2 dm = \frac{1}{2} \omega^2 \int_C r^2 dm \rightarrow E_c = \frac{1}{2} I_o \omega^2 \quad (1-4.5)$$

onde I_o é o momento de inércia de massa em relação ao eixo.

A *energia potencial gravitacional* é o trabalho realizado ao elevar um corpo de massa m a uma altura h acima de um nível de referência e se escreve:²⁸

$$E_{pg} = mgh \quad (1-4.6)$$

onde mg é a intensidade do peso correspondente à massa. Assim, a energia potencial de um corpo é a energia dependente da posição desse corpo.

Já a *energia potencial de deformação*, também denominada *energia de deformação elástica ou energia potencial elástica*, é o trabalho requerido para deformar um corpo elástico.²⁹ E a forma mais simples de caracterizar essa energia é através do esforço de distensão ou de compressão de uma barra de comprimento inicial ℓ e de área de seção transversal constante A , como ilustra a [Figura 1-4.2](#) no caso de esforço de tração.

À barra aplica-se uma força axial, de forma lenta e a partir de zero até o valor f que corresponde a um alongamento u , tendo-se, em caso de material elástico linear (caracterizado pela proporcionalidade entre força e alongamento, até um valor limite), o diagrama mostrado na parte intermediária da mesma figura. Com a retirada da força, a barra retorna ao seu comprimento inicial, em caracterização de comportamento elástico.

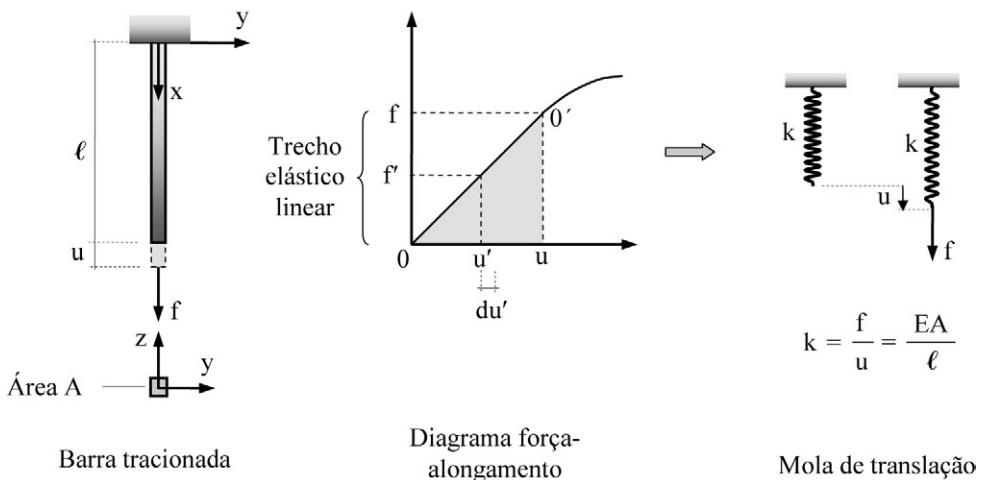


FIGURA 1-4.2 Idealização de mola de translação.

²⁸ O conceito de energia potencial gravitacional é devido a Jordanus de Nemora, na Alemanha, no início do século XIII.

²⁹ Essa energia de deformação foi concebida pelo matemático holandês Daniel Bernoulli (1700-1782), em 1738, mas a correspondente expressão como uma função quadrática dos componentes de deformação, como é hoje utilizada nos princípios variacionais da *Mecânica dos Sólidos Deformáveis*, foi apresentada pelo matemático e físico inglês George Green (1793-1841), em 1837, com o nome de *função potencial*.

Logo, escreve-se a energia potencial elástica (linear):

$$E_{pe} = \int_0^u f' du' \rightarrow E_{pe} = \frac{1}{2} f u \quad (1-4.7)$$

que é igual à área sob o segmento 0-0' do referido diagrama.

Verifica-se experimentalmente que a alteração de comprimento é proporcional à força aplicada e ao comprimento inicial da barra, além de inversamente proporcional à área da seção transversal da mesma, o que é expresso pela *lei de Hooke*:

$$u = \frac{f \ell}{EA} \quad (1-4.8)$$

onde E é o inverso da constante de proporcionalidade, característico do material e denominado *módulo de elasticidade (longitudinal)* ou *módulo de Young*.³⁰ Dessa lei, tem-se a intensidade de força:

$$f = \frac{EA}{\ell} u \rightarrow f = ku \quad (1-4.9)$$

onde

$$k = \frac{EA}{\ell} \quad (1-4.10)$$

é o *coeficiente de rigidez axial* da barra. Observa-se que esse coeficiente é numericamente igual à força que provoca uma alteração unitária ao comprimento da barra e, portanto, tem a unidade de força dividida pela unidade de comprimento. Além disso, é prático simular esse comportamento axial através de uma *mola de translação* sem massa e de comportamento elástico linear, como ilustra a parte direita da figura anterior. Diz-se, então, que se trata de *coeficiente (de rigidez) de mola de translação*.³¹

Com a substituição da Equação 1-4.9 na Equação 1-4.7, obtém-se a seguinte nova expressão para a energia potencial elástica:

$$E_{pe} = \frac{ku^2}{2} \quad (1-4.11)$$

De forma semelhante ao comportamento axial de barra descrito, tem-se o comportamento de torção, ilustrado na próxima figura, onde θ é o ângulo de rotação total de uma barra de comprimento ℓ , devido à aplicação de forma lenta do momento de torção t . Em caso de material elástico linear, tem-se o diagrama momento-ângulo de torção, mostrado na mesma figura, e a disciplina *Resistência dos Materiais* fornece a expressão:

$$\theta = \frac{t \ell}{GJ} \quad (1-4.12)$$

onde G é o *módulo de elasticidade transversal* do material e J é a *constante de torção* da seção transversal. Em caso de seção de simetria circular, cheia ou vazada, esta constante

³⁰ Robert Hooke (1635-1703), cientista inglês, foi o primeiro a utilizar o nome *potencial* para expressar a capacidade de um corpo elástico em recuperar a configuração não deformada inicial. Contudo, o nome *módulo de Young* é em homenagem ao físico e médico britânico Thomas Young (1773-1829), que estabeleceu esse módulo.

³¹ Neste livro, mola é considerada sem massa, pelo fato de ser apenas uma idealização.

é igual ao *momento de inércia polar* da seção em relação ao seu centroide, isto é $\pi r^4/2$ ou $\pi(r_e^4 - r_i^4)/2$, onde r_e é o raio externo e r_i é o raio interno da seção.

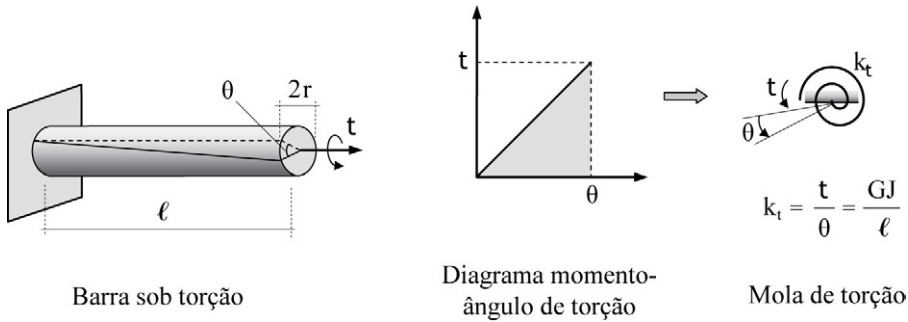


FIGURA 1-4.3 Idealização de mola de torção.

Da equação anterior, tem-se:

$$t = \frac{GJ}{\ell} \theta \rightarrow \boxed{t = k_t \theta} \quad (1-4.13)$$

onde

$$\boxed{k_t = \frac{GJ}{\ell}} \quad (1-4.14)$$

é o *coeficiente de rigidez de torção* da barra. Identifica-se que esse coeficiente é numericamente igual ao momento que provoca rotação unitária de torção à barra e que, portanto, tem a unidade de força vezes unidade de comprimento, por radiano. Logo, associa-se esse coeficiente a uma *mola de torção* sem massa (de comportamento linear), como mostra a parte direita da figura anterior.

Além disso, semelhantemente à Equação 1- 4.11, escreve-se a energia potencial elástica de torção:

$$\boxed{E_{pe} = \frac{1}{2} k_t \theta^2} \quad (1-4.15)$$

Em caso de não haver forças externas além da gravitacional e com a suposição de que não ocorra geração nem dissipação de calor, a energia mecânica:

$$\boxed{E_m = E_c + E_{pg} + E_{pe}} \quad (1-4.16)$$

é constante, o sistema permanece em oscilação após uma perturbação inicial e o mesmo é dito *conservativo*.³² Nesse caso, as transformações entre energia cinética e energia potencial (gravitacional e/ou elástica) são realizadas por forças também qualificadas como *conservativas*, cujo trabalho entre duas configurações do sistema independe da trajetória de seus

³² A noção de conservação da soma da energia potencial gravitacional com a energia cinética é devida a Leibniz. E a concepção de conservação de energia mecânica é devida ao matemático francês Gaspard-Gustave Coriolis (1792-1843), em 1829.

pontos e, portanto, é nulo o trabalho em qualquer percurso fechado. Logo, a energia cinética é máxima no instante em que a energia potencial é nula, e essa energia atinge o máximo no instante em que aquela se anula, com valores iguais. E, com base na Equação 1- 4.16, escreve-se a condição de invariância no tempo:

$$\frac{d}{dt}(E_c + E_{pg} + E_{pe}) = 0 \quad (1-4.17)$$

a partir da qual podem ser obtidas as equações de movimento sem a necessidade de forças de inércia.

Procedimento mais geral de obtenção das referidas equações é desenvolvido com o *princípio dos deslocamentos virtuais* que, em caso de movimento de translação de um corpo rígido, pode ser obtido a partir do equilíbrio dinâmico expresso na Equação 1-2.10. Para isso, faz-se o produto escalar dos termos dessa equação por um deslocamento imaginário arbitrário $\delta \mathbf{u}$, dito *deslocamento virtual*, obtendo-se:

$$\mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} - m \mathbf{a} \cdot \delta \mathbf{u} = 0 \quad (1-4.18)$$

que, por ter a dimensão de trabalho e $\delta \mathbf{u}$ ser virtual, é denominado *trabalho virtual*.³³ Além disso, como $\delta \mathbf{u}$ é qualquer (não necessariamente infinitesimal), $\delta \mathbf{u}$ pode ser cancelado na equação anterior, obtendo-se de volta a equação de equilíbrio dinâmico. O movimento de rotação pode ser tratado de forma semelhante ao caso anterior com a consideração da equação de equilíbrio dinâmico na forma da Equação 1-2.11, mas com rotação virtual infinitesimal. Assim, diz-se que *o trabalho virtual é nulo se o corpo está em equilíbrio (dinâmico ou estático)* e, de forma inversa, que *o corpo está em equilíbrio se esse trabalho for nulo*.

Em estrutura, há forças externas (ativas e reativas) e forças internas consideradas sob a forma de componentes de tensão (que são forças por unidade de área) ou de resultantes de tensão. Logo, como as forças externas equilibram as internas, o produto $\mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u}$ que ocorre na equação anterior se desdobra no trabalho virtual dessas forças menos o trabalho virtual daquelas, independentemente das propriedades de material, quando então a equação do referido princípio fica com a forma conceitual:

$$\begin{array}{|c|} \hline \text{Trabalho virtual das} \\ \text{forças internas} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \text{Trabalho virtual das} \\ \text{forças de inércia} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \text{Trabalho virtual das} \\ \text{forças externas} \\ \hline \end{array} \quad (1-4.19)$$

O primeiro membro dessa forma é denominado *trabalho virtual interno* e o segundo, *trabalho virtual externo*.³⁴ E esse princípio é condição necessária e suficiente de equilíbrio.

³³ Na *Mecânica Analítica*, essa extensão do princípio dos deslocamentos virtuais costuma ser considerada como o princípio de d'Alembert, com a condição desses deslocamentos serem infinitesimais e consistentes com os vínculos.

³⁴ O conceito de trabalho virtual remonta a Jordanus de Nemore, matemático europeu do século XIII, e foi generalizado por John Bernoulli (1667-1748). Trata-se apenas de um artifício matemático e não de um princípio físico. Os deslocamentos virtuais são arbitrados sem modificação das forças atuantes, com a suposição de tempo inalterado. Na *Mecânica Analítica*, esses deslocamentos são considerados infinitesimais, e em análise de estruturas, dependendo da aplicação, são supostos infinitesimais ou apenas pequenos, para validade do *princípio da superposição*, com o atendimento ou não dos vínculos externos. Poder arbitrar parte dos deslocamentos virtuais como nulos é uma das vantagens daquele princípio em relação à *segunda lei de Newton* e ao *princípio de d'Alembert*, porque permite excluir algumas variáveis do sistema.

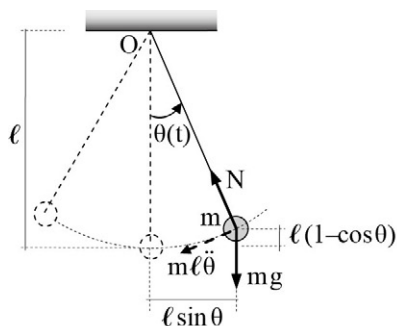
Nos sistemas dinâmicos reais sempre há dissipação de energia que tende a reduzir as amplitudes das oscilações, o que é simulado através de forças que se opõem ao movimento, denominadas *forças de amortecimento*. Com a inclusão do trabalho virtual dessas forças (e de quaisquer outras forças não conservativas) no primeiro membro da expressão anterior, obtém-se o princípio dos deslocamentos virtuais em forma mais geral. Com a integração da expressão resultante entre dois instantes e conceitos de cálculo variacional, chega-se ao *princípio de Hamilton*.³⁵

1-5 PÊNDULOS

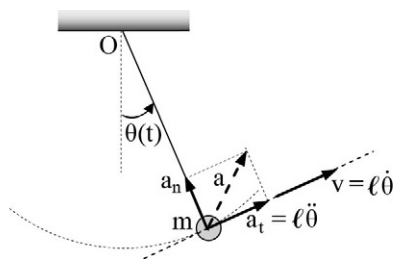
O estudo de pêndulos tem a vantagem de facilitar o entendimento de importantes conceitos de dinâmica e do trato das equações de movimento de sistemas mecânicos simples. No caso, como a oscilação é devida apenas a uma perturbação inicial, diz-se *vibração livre* e, por se desconsiderar a dissipação de energia, diz-se *vibração livre não amortecida*.

1-5.1 Pêndulo simples

Considera-se uma massa m suspensa por um fio inextensível de comprimento ℓ e massa desprezível, que oscila em trajetória circular, após uma perturbação a partir da configuração vertical de equilíbrio estático, sob a ação do seu peso mg e do esforço N exercido pelo fio, como ilustra a [Figura 1-5.1](#). É o denominado *pêndulo simples*, em que, para uma inclinação



Forças atuantes na massa



Velocidade e componentes de aceleração

FIGURA 1-5.1 Pêndulo simples.

³⁵ A denominação desse princípio homenageia o matemático, astrônomo e físico irlandês Sir Willian Rowan Hamilton (1805-1865), primeiro a estudar sistemas mecânicos com a referida integração. Diferentemente da *segunda lei de Newton* e do *princípio de d'Alembert* (que exprimem lei de movimento em termos de uma configuração instantânea, e também diferente do *princípio dos deslocamentos virtuais* que expressa lei em termos de desvios da referida configuração), o *princípio de Hamilton* considera o fenômeno durante um intervalo finito de tempo e fornece as equações de movimento de sistemas físicos complexos, através da condição de extremo da chamada *função lagrangeana*. Embora tenham sido citadas diversas sistemáticas de obtenção dessas equações, dá-se prioridade neste capítulo ao uso de diagramas de corpo livre com forças de inércia, por fornecer diretamente as equações de movimento dos sistemas simples aqui tratados.

$\theta(t)$ do fio em movimento ascendente, a massa tem a velocidade (tangencial) $\ell\dot{\theta}$ e a aceleração tangencial $\ell\ddot{\theta}$.³⁶

Seguidamente, obtém-se a correspondente equação de movimento, com a utilização do conceito de força de inércia e, posteriormente, com os conceitos de energia e de trabalho.

Inicialmente supõe-se a força de inércia $m\ell\ddot{\theta}$, tangente à trajetória em arco circular e em sentido contrário à aceleração \mathbf{a}_t , como representado em tracejado na figura anterior, o que permite a escrita da seguinte expressão de momento nulo em relação ao ponto de sustentação do pêndulo:

$$m\ell\ddot{\theta} + mg\ell \sin \theta = 0 \quad \rightarrow \quad (m\ell^2)\ddot{\theta} + mg\ell \sin \theta = 0 \quad (1-5.1)$$

Essa é a equação de movimento da massa do pêndulo, em que se omitiu, por simplicidade, a indicação de que θ é função do tempo.

A equação anterior contém, entre parênteses, o momento de inércia de massa em relação ao ponto de sustentação do pêndulo e pode ser escrita sob a forma mais simples:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0 \quad (1-5.2)$$

Segue a obtenção da mesma equação de movimento, com a condição de conservação da energia mecânica. Para isso, têm-se as expressões de energia:

$$\begin{cases} E_c = m(\ell\dot{\theta})^2 / 2 \\ E_{pg} = mg\ell(1 - \cos \theta) \end{cases} \quad \rightarrow \quad E_m = m\ell^2\dot{\theta}^2 / 2 + mg\ell(1 - \cos \theta) \quad (1-5.3)$$

Logo, com a condição do sistema ser conservativo, escreve-se:

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad m\ell^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mg\ell \sin \theta \dot{\theta} = 0 \quad \rightarrow \quad m\ell^2\ddot{\theta} + mg\ell \sin \theta = 0$$

que é o mesmo resultado expresso na Equação 1-5.1.

Obtém-se, a seguir, a equação anterior com base no princípio dos deslocamentos virtuais. Para isso, arbitra-se o deslocamento angular infinitesimal virtual $\delta\theta$, como mostra a [Figura 1-5.2](#), quando então se tem apenas o trabalho virtual (externo) devido à força de inércia $m\ell\ddot{\theta}$ e ao peso mg , o que se escreve:

$$(m\ell\ddot{\theta})\ell\delta\theta + (mg)\ell\delta\theta \sin \theta = 0 \quad \rightarrow \quad (m\ell^2\ddot{\theta})\delta\theta + (mg\ell \sin \theta)\delta\theta = 0 \quad (1-5.4)$$

Logo, como o deslocamento virtual é qualquer, pode ser cancelado na equação anterior, obtendo-se a referida equação de movimento.

³⁶ É um pêndulo ideal, por se desconsiderar a resistência ao arraste em meio fluídico (o ar) e se supor oscilações livres em um plano vertical. Em 1851, o matemático, físico e astrônomo francês Jean Bernard Léon Foucault (1819-1868) mostrou experimentalmente que ocorre uma rotação do plano de oscilação do pêndulo, devido à rotação da Terra e porque se considera um referencial fixo à superfície da Terra como inercial.

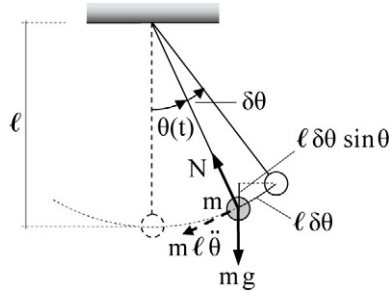


FIGURA 1-5.2 Deslocamento virtual $\delta\theta$ em um pêndulo simples.

A equação diferencial ordinária expressa na Equação 1-5.2, por ser não linear, é de trabalhosa resolução. Com pequenas oscilações, $|\theta| \ll 1$, considera-se ($\sin\theta = \theta$ em radianos) para obter a equação linear:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0 \quad (1-5.5)$$

É imediato verificar que essa equação admite as soluções harmônicas:

$$\begin{cases} \theta(t) = a_1 \cos(\omega_n t) \\ \theta(t) = a_2 \sin(\omega_n t) \end{cases} \quad (1-5.6)$$

onde a_1 e a_2 são constantes a serem determinadas com as condições iniciais do movimento, e ω_n é uma característica do descrito sistema mecânico também a ser determinada.

Logo, com a substituição da primeira das soluções anteriores na equação diferencial linear, chega-se ao resultado:

$$\left(-\omega_n^2 + \frac{g}{\ell}\right) a_1 \cos(\omega_n t) = 0$$

que só se cumpre, para qualquer valor de t , em caso da parcela entre parênteses ser nula. Assim, deve-se ter:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \quad (1-5.7)$$

que é a *frequência natural angular* ou *circular*, em rad/s.³⁷ Esse mesmo resultado, que independe da amplitude e da massa, pode também ser obtido com a segunda das soluções expressas na Equação 1-5.6.

³⁷ O termo *natural* advém do fato de que, dada uma perturbação inicial, o pêndulo oscilará *naturalmente* na frequência ω_n . Vê-se que a independência dessa frequência em relação à amplitude da oscilação se deve à consideração de pequenas oscilações. O matemático, astrônomo e físico holandês Christiaan Huygens (1629-1695) mostrou que, para oscilações quaisquer, essa frequência independe da amplitude quando se impõe que a massa do pêndulo percorra um arco de cicloide.

Além disso, a partir da frequência anterior, tem-se o *período natural*:

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \quad (1-5.8)$$

$$\rightarrow T_n = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad (1-5.9)$$

que é o intervalo de tempo de uma oscilação completa (em segundos). O recíproco desse resultado é a *frequência natural cíclica* ou *de oscilação*, que é o número de ciclos por segundo ou hertz (Hz):³⁸

$$\ell_n = \frac{1}{T_n} = \frac{\omega_n}{2\pi} \quad (1-5.10)$$

$$\rightarrow \ell_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\ell}} \quad (1-5.11)$$

Logo, tem-se a relação entre a frequência angular e a frequência cíclica:

$$\omega_n = 2\pi \ell_n \quad (1-5.12)$$

Pelo fato de a equação de movimento expressa na Equação 1-5.5 ser diferencial de segunda ordem, esta tem solução geral com duas constantes de integração que são determinadas a partir das condições iniciais ao movimento. Assim, essa solução pode ser escrita como a soma das soluções parciais expressas na Equação 1-5.6, sob a forma:

$$\theta(t) = a_1 \cos(\omega_n t) + a_2 \sin(\omega_n t) \quad (1-5.13)$$

Dessa solução, tem-se a velocidade angular:

$$\dot{\theta}(t) = -a_1 \omega_n \sin(\omega_n t) + a_2 \omega_n \cos(\omega_n t) \quad (1-5.14)$$

E com as condições iniciais de deslocamento angular, θ_0 , e de velocidade angular, $\dot{\theta}_0$, chega-se à solução geral sob a nova forma:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_n t) + \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_n} \sin(\omega_n t) \quad (1-5.15)$$

Assim, em caso de liberação do pêndulo com velocidade nula a partir de uma inclinação θ_0 , a solução anterior se particulariza na primeira das soluções expressas na Equação 1.5.6, com ($a_1 = \theta_0$). Uma representação dessa solução pode ser visualizada com a suposição de uma fonte luminosa presa à massa do pêndulo, que é solta a partir de uma inclinação θ_0 , simultaneamente com o movimento vertical uniforme de uma tira de filme sensível à luz, para o registro da oscilação da massa, como ilustra a [Figura 1-5.3](#).³⁹ Alternativamente, em

³⁸ O nome dessa unidade é uma homenagem ao físico alemão Heinrich Rudolf Hertz (1857-1894), que fez experimentos com ondas de rádio e deu importantes contribuições ao desenvolvimento do eletromagnetismo. E importa esclarecer que a frequência cíclica foi denotada por ℓ para distingui-la da notação f de força.

³⁹ Representação semelhante é encontrada em Thomson, S.T., *Teoria da Vibração*, 1973.

caso de se imprimir ao pêndulo uma velocidade angular inicial $\dot{\theta}_0$ a partir de sua posição vertical, a solução expressa na Equação 1-5.15 recai na segunda solução parcial que ocorre na Equação 1-5.6, quando então ($a_2 = \dot{\theta}_0 / \omega_n$).

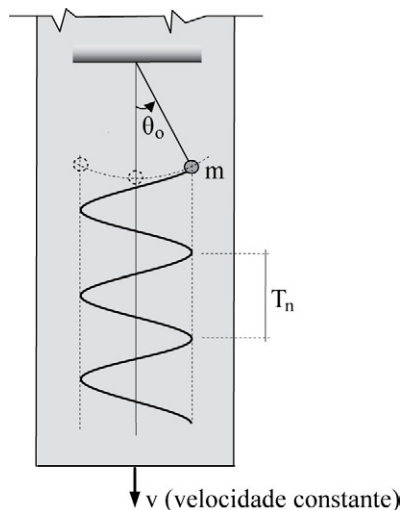


FIGURA 1-5.3 Registro do movimento da massa de um pêndulo simples.

Quando o pêndulo está na configuração de deslocamento angular máximo, a energia cinética é nula e a energia potencial é máxima. Já na configuração de deslocamento angular nulo, que é a da posição vertical, a energia cinética é máxima e a energia potencial é nula, o que expressa simetria de comportamento. Logo, ao longo da trajetória da massa há conversão entre essas energias, que é representada na Figura 1-5.4 no caso de um

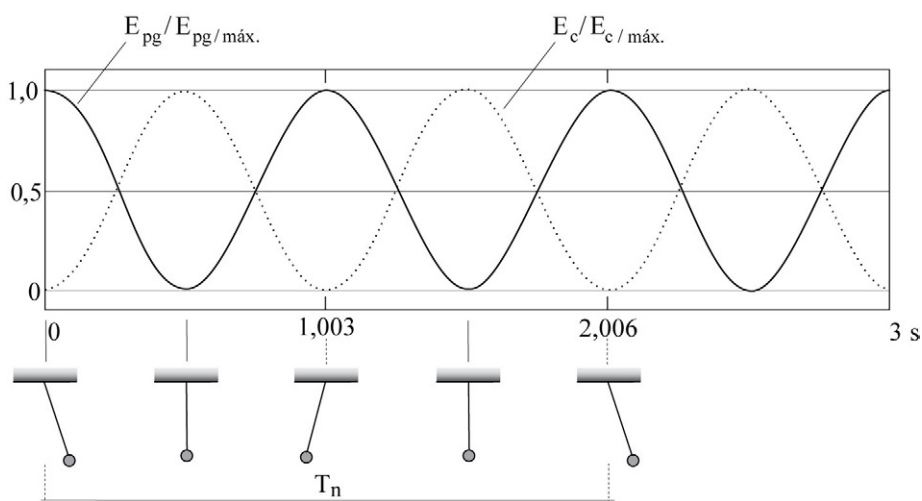


FIGURA 1-5.4 Conversão entre energias de um oscilador simples, no caso de ($\theta_0 = 10^\circ$).

pêndulo de ($\ell = 1\text{m}$), ($\theta_0 = 10^\circ = 0,1745\text{ rad}$) e ($\dot{\theta}_0 = 0$), que corresponde a ($\sin\theta_0 = 0,1736$) e ($T_n = 2,006\text{ s}$).

A partir de oscilações maiores do que 20° , a solução anterior começa a apresentar visíveis diferenças em relação à da equação de movimento sem a aproximação de pequenos deslocamentos. Isso fica evidenciado em representação gráfica da descrita conversão de energia, agora com ($\theta_0 = 40^\circ = 0,6981\text{ rad}$), como mostra a [Figura 1-5.5](#). Nota-se que os picos de energia cinética são maiores do que os de energia potencial, o que contraria a conservação de energia.

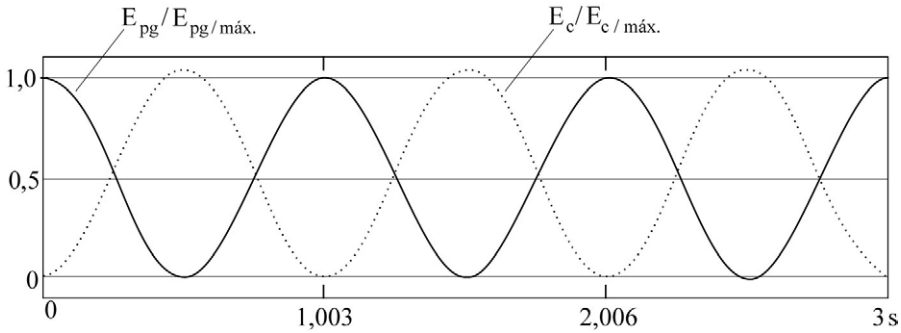


FIGURA 1-5.5 Conversão entre energias de um oscilador simples, no caso de ($\theta_0 = 40^\circ$).

Um procedimento alternativo de obtenção de frequência natural se baseia na igualdade de energias ($E_{pg/máx.} = E_{c/máx.}$), o que costuma ser vantajoso em estudo de sistema de vários graus de liberdade. Assim, para o presente pêndulo escreve-se:⁴⁰

$$\begin{cases} E_{pg/máx.} = mg\ell(1 - \cos\theta_0) \cong mg\ell\theta_0^2 / 2 \\ E_{c/máx.} = m(\ell\dot{\theta}_{máx.})^2 / 2 \end{cases} \quad (1-5.16)$$

Além disso, a partir da solução parcial ($\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_n t)$), tem-se a velocidade angular:

$$\dot{\theta}(t) = -\theta_0 \omega_n \sin(\omega_n t) \quad \rightarrow \quad \dot{\theta}_{máx.} = \dot{\theta}(t)_{|\sin(\omega_n t)=1} = -\theta_0 \omega_n$$

e, portanto:

$$E_{c/máx.} = m\ell^2 \theta_0^2 \omega_n^2 / 2 \quad (1-5.17)$$

Logo, da referida igualdade de energias, obtém-se:

$$mg\ell\theta_0^2 / 2 = m\ell^2 \theta_0^2 \omega_n^2 / 2 \quad \rightarrow \quad \omega_n = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

que é o mesmo resultado de frequência angular expresso na Equação 1-5.7.

⁴⁰ Na escrita da primeira expressão da Equação 1-5.16, considerou-se ($\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$) \rightarrow ($1 - \cos\theta = 2\sin^2(\theta/2)$), que fornece ($1 - \cos\theta = \theta^2/2$) em caso de pequenas oscilações, quando então se pode fazer $\sin(\theta/2) \approx \theta/2$.

1-5.2 Pêndulo sólido

Considera-se, a seguir, um corpo de massa m que pode pivotar, sem atrito, em torno de um eixo horizontal que passa por um ponto O não coincidente com o centro de gravidade CG do corpo, em caracterização do chamado *pêndulo sólido*, ilustrado na [Figura 1-5.6](#). Nessa figura está também indicada a inclusão do torque de inércia de intensidade $I_o \ddot{\theta}$.

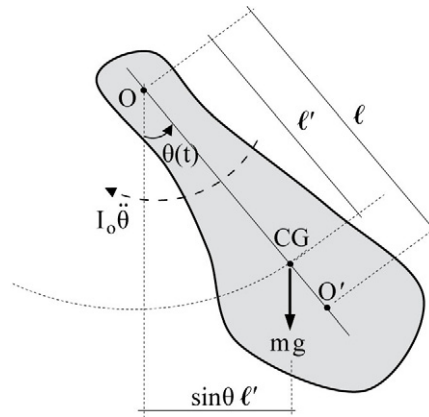


FIGURA 1-5.6 Pêndulo sólido.

De forma análoga à obtenção da equação de movimento do pêndulo simples, para o presente pêndulo e com o conceito de torque de inércia escreve-se a equação de equilíbrio dinâmico:

$$I_o \ddot{\theta} + mg \ell' \sin \theta = 0 \quad (1-5.18)$$

onde ℓ' é a distância entre o centro de gravidade e o ponto O . Além disso, em caso de oscilações pequenas, adota-se ($\sin \theta = \theta$) de maneira a obter a equação de movimento linear, que é mais simples:

$$\ddot{\theta} + \frac{mg \ell'}{I_o} \theta = 0 \quad (1-5.19)$$

Logo, de forma semelhante ao apresentado na subseção anterior, tem-se a frequência natural angular:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{mg \ell'}{I_o}} \quad (1-5.20)$$

assim como tem-se o período natural:

$$T_n = 2\pi \sqrt{\frac{I_o}{mg \ell'}} \quad (1-5.21)$$

Em comparação desse último resultado com o período natural do pêndulo simples expresso na Equação 1-5.9, identifica-se que com a notação:

$$\ell = I_o / (m\ell') \quad (1-5.22)$$

recai-se no caso desse pêndulo. Isto é, ℓ designa a posição de um ponto O' onde pode ser suposta concentrada a massa do corpo (em concepção de partícula), para recair na idealização de um pêndulo simples.⁴¹ Aquele ponto é denominado *centro de oscilação*. Além disso, é simples verificar que se o mesmo corpo for posto em oscilação em torno de um eixo paralelo ao anterior e que passa por esse ponto, o período de oscilação não se modifica.

No caso de o corpo ser uma chapa de espessura “e” e de massa específica ρ , o momento de inércia de massa em relação ao eixo de suporte se calcula:

$$I_o = \int_C r^2 dm = \int_A r^2 \rho e dA \quad \rightarrow \quad I_o = \rho e \left(\int_A r^2 dA \right) \quad (1-5.23)$$

onde a parcela entre parênteses é o *momento de inércia polar* da figura plana definida pela forma da chapa, com respeito ao ponto pivô do pêndulo.

EXEMPLO 1-5.1

Determina-se o centro de oscilação e o período natural de uma haste rígida de comprimento “a”, massa específica ρ e seção transversal retangular bxe, suspensa sem atrito por uma de suas extremidades, como ilustra a Figura E1-5.1.

No caso, considera-se o elemento infinitesimal de área ($dA = bdr$), com o qual e, a partir da Equação 1-5.23, escreve-se o momento de inércia de massa em relação ao ponto pivô:

$$I_o = \rho e \int_0^a r^2 b dr \quad \rightarrow \quad I_o = \rho e b a^3 / 3$$

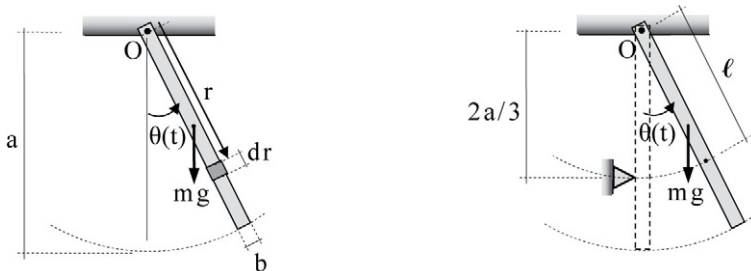


FIGURA E1-5.1 Haste oscilante como pêndulo.

Além disso, como a haste tem a massa total ($m = V\rho = abep$), o momento de inércia anterior toma a nova forma ($I_o = ma^2/3$).

Logo, com a substituição desse resultado na Equação 1-5.22, chega-se ao seguinte comprimento equivalente de pêndulo simples:

$$\ell = \frac{ma^2}{3ma/2} \quad \rightarrow \quad \boxed{\ell = \frac{2a}{3}}$$

⁴¹ Este centro foi identificado por Christiaan Huygens.

Com esse resultado e a partir da Equação 1-5.9, obtém-se o período de oscilação:

$$T_n = 2\pi \sqrt{\frac{2a}{3g}}$$

O centro de oscilação tem importância no desenvolvimento de equipamentos oscilantes de impacto, pois caso a oscilação seja interrompida por um obstáculo na altura desse centro, como ilustra a parte direita da figura anterior, não ocorre flexão na peça de impacto. Por essa razão, esse centro é também denominado *centro de percussão*. Naturalmente, esse mesmo resultado pode ser obtido a partir da Equação 1-5.21.

1-5.3 Pêndulo de torção

As oscilações dos pêndulos anteriores são comandadas pela ação da gravidade. Com oscilações sob força elástica, considera-se o *pêndulo de torção* representado na [Figura 1-5.7](#), que é constituído de um disco homogêneo de massa específica ρ , raio R e espessura “ e ”, fixado em seu centro de massa a um eixo delgado vertical de comprimento ℓ , seção circular de raio r , módulo de elasticidade transversal G e massa desprezível.⁴²

Após ser dada uma rotação horizontal pequena ao disco, este passa a oscilar em rotação plana, sob a força elástica de torção desenvolvida no descrito eixo. Logo, como foi ilustrado com o auxílio da [Figura 1-4.3](#), esse eixo pode ser idealizado como uma mola de torção de constante ($k_t = GJ/\ell$), onde ($J = \pi r^4/2$) é o momento de inércia polar da seção transversal, de maneira a se ter:

$$k_t = \frac{\pi G r^4}{2\ell} \quad (1-5.24)$$

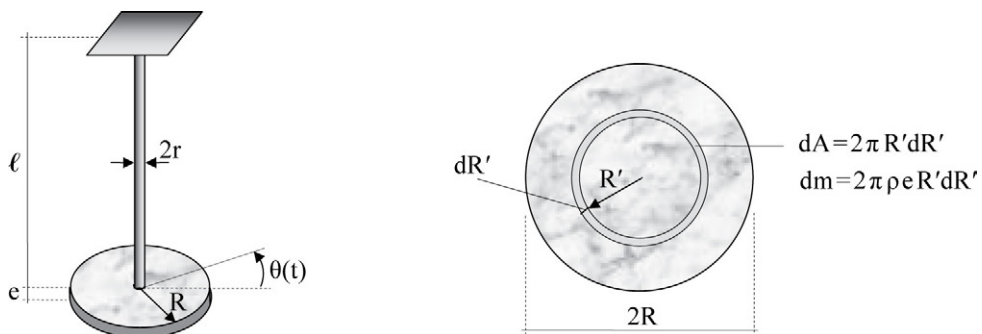


FIGURA 1-5.7 Pêndulo de torção.

Além disso, com o elemento infinitesimal de massa indicado na parte direita da mesma figura, calcula-se o momento de inércia de massa do disco com respeito ao eixo vertical que passa pelo seu centro de massa:

$$I_o = \int_C R'^2 dm = \int_0^R R'^2 2\pi \rho e R' dR' = 2\pi \rho e \int_0^R R'^3 dR'$$

⁴² Esse pêndulo foi estudado pelo físico francês Charles Augustin de Coulomb (1736-1806), em 1784.

$$\rightarrow I_o = \frac{\pi \rho e R^4}{2} \quad (1-5.25)$$

Logo, obtêm-se a equação de movimento:

$$I_o \ddot{\theta} + k_t \theta = 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{k_t}{I_o} \theta = 0 \quad (1-5.26)$$

Essa equação diferencial tem a mesma forma que a do pêndulo simples expressa na Equação 1-5.5 e, portanto, tem a solução constante na Equação 1-5.15, agora com a seguinte expressão de frequência natural angular:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_t}{I_o}} \quad (1-5.27)$$

Com a substituição das Equações 1-5.24 e 1-5.25 nessa última equação, obtém-se:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{Gr^4}{\rho e \ell R^4}} \quad (1-5.28)$$

Alternativamente, com base em considerações de energia, escreve-se:

$$\begin{cases} E_{pe/máx.} = k_t \theta_{máx.}^2 / 2 \\ E_{c/máx.} = I_o \dot{\theta}_{máx.}^2 / 2 \end{cases} \quad (1-5.29)$$

A partir da solução ($\theta(t) = \theta_o \cos(\omega_n t)$), tem-se ($\theta_{máx.} = \theta_o$) e a velocidade:

$$\dot{\theta}(t) = -\theta_o \omega_n \sin(\omega_n t) \quad \rightarrow \quad \dot{\theta}_{máx.} = -\theta_o \omega_n \quad (1-5.30)$$

Logo, da condição de conservação de energia, $E_{pe/máx.} = E_{c/máx.}$, obtém-se a frequência:

$$k_t \theta_o^2 / 2 = I_o \dot{\theta}_o^2 \omega_n^2 / 2 \quad \rightarrow \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k_t}{I_o}}$$

que é o mesmo resultado expresso na Equação 1-5.27.

1-5.4 Pêndulo sólido com mola de torção

Considera-se, agora, um pêndulo em que as oscilações são comandadas por ação da gravidade e de força elástica. Trata-se de uma haste rígida, de comprimento ℓ , massa total m_1 e massa m_2 na extremidade inferior, haste esta que pode pivotar em torno de sua outra extremidade que é conectada a uma mola de torção de coeficiente k_t , como esquematizado na [Figura 1-5.8](#).

Com o resultado de momento de inércia da haste do Exemplo 1-5.1, tem-se o momento de inércia de massa em relação ao eixo horizontal, que passa pelo ponto de sustentação do pêndulo:

$$I_o = \frac{m_1 \ell^2}{3} + m_2 \ell^2 \quad (1-5.31)$$

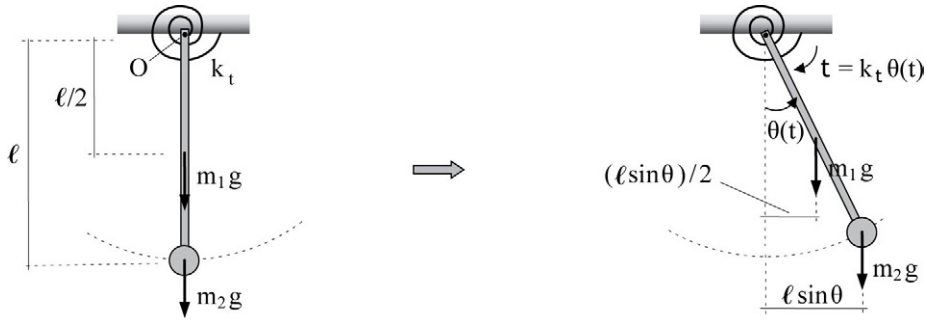


FIGURA 1-5.8 Pêndulo sólido com mola de torção.

Logo, tendo-se em conta torque de inércia, escreve-se a equação de momento nulo em relação ao ponto pivô, que é a equação de equilíbrio dinâmico:

$$\left(\frac{m_1}{3} + m_2\right) \ell^2 \ddot{\theta} + k_t \theta + m_1 g \frac{\ell}{2} \sin \theta + m_2 g \ell \sin \theta = 0 \quad (1-5.32)$$

Em caso de pequenas oscilações, a equação anterior simplifica-se para a forma linear:

$$\left(\frac{m_1}{3} + m_2\right) \ell^2 \ddot{\theta} + \left(k_t + \frac{m_1 g \ell}{2} + m_2 g \ell\right) \theta = 0 \rightarrow \ddot{\theta} + \frac{k_t + m_1 g \ell / 2 + m_2 g \ell}{(m_1 / 3 + m_2) \ell^2} \theta = 0 \quad (1-5.33)$$

Logo, de forma semelhante ao pêndulo simples, escreve-se a frequência natural:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_t + m_1 g \ell / 2 + m_2 g \ell}{(m_1 / 3 + m_2) \ell^2}} \quad (1-5.34)$$

e o período natural:

$$T_n = 2\pi \sqrt{\frac{(m_1 / 3 + m_2) \ell^2}{k_t + m_1 g \ell / 2 + m_2 g \ell}} \quad (1-5.35)$$

Na idealização do presente pêndulo, a massa m_2 foi considerada como partícula na extremidade inferior da haste. Em idealização mais refinada, pode-se considerar essa massa com dimensão finita, determinar o seu momento de inércia I_G em relação ao eixo horizontal que contém o seu centro de massa e transferir esse momento ao eixo paralelo, que passa pelo ponto de sustentação do pêndulo, através do *teorema de Steiner* expresso na Equação 1-2.5. Assim, a equação de equilíbrio dinâmico do pêndulo toma a nova forma:

$$\left(\frac{m_1 \ell^2}{3} + I_G + m_2 \ell^2\right) \ddot{\theta} + \left(k_t + \frac{m_1 g \ell}{2} + m_2 g \ell\right) \theta = 0 \quad (1-5.36)$$

a partir da qual se tem a nova expressão de frequência:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_t + m_1 g \ell / 2 + m_2 g \ell}{m_1 \ell^2 / 3 + I_G + m_2 \ell^2}} \quad (1-5.37)$$

EXEMPLO 1-5.2

A Figura E1-5.2 mostra uma viga rígida, de massa m e comprimento ℓ , em equilíbrio estático sobre uma rótula fixa e um flutuador. Esse é paralelepípedo, de massa M e com cada face horizontal de área A . Sem considerar dissipação de energia, determina-se a equação de equilíbrio dinâmico e a frequência natural do sistema.

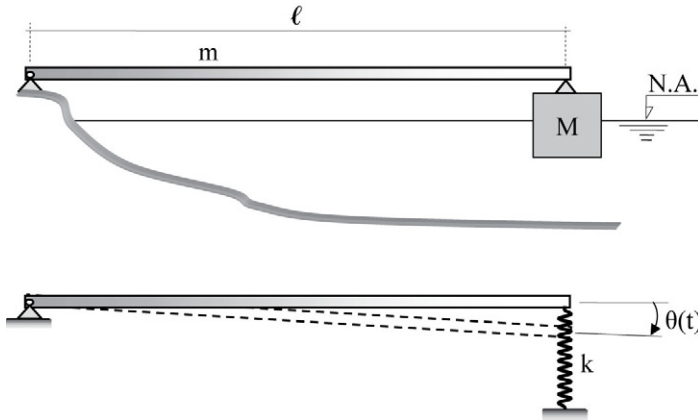


FIGURA E1-5.2 Viga apoiada em uma rótula fixa e em um flutuador.

Um deslocamento unitário vertical no flutuador provoca o empuxo ($k = A\rho_{\text{água}}g$) que é numericamente igual ao coeficiente de rigidez da idealização em apoio elástico mostrado na parte inferior da mesma figura, desconsiderando que parte da água acompanha o movimento do flutuador. Assim, com a rotação $\theta(t)$ indicada, tem-se o momento exercido pela mola em relação à rótula fixa, $(k\ell\sin\theta)\cdot\ell\cos\theta$, que é aproximadamente igual a $k\ell^2\theta$ em caso de rotação pequena. Nesse resultado, identifica-se o coeficiente de rigidez de torção $k\ell^2$.

Logo, escreve-se a equação de equilíbrio dinâmico:

$$(M\ell^2 + m\ell^2/3)\ddot{\theta} + k\ell^2\theta = 0 \quad \rightarrow \quad (M\ell^2 + m\ell^2/3)\ddot{\theta} + (A\rho_{\text{água}}g\ell^2)\theta = 0$$

Assim, a partir dessa equação, tem-se a frequência natural:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{A\rho_{\text{água}}g\ell^2}{M\ell^2 + m\ell^2/3}}$$

Esse é um caso em que a ação da gravidade (responsável pela configuração de equilíbrio estático) e a força elástica (resultante do empuxo) têm a mesma linha de ação.

1-5.5 Pêndulo invertido com mola de translação

A seguir, considera-se o caso em que a ação de gravidade age como força desestabilizadora, o que permite apresentar os importantes conceitos de *equilíbrio estável* e *equilíbrio indiferente*, assim como o de *instabilidade* dinâmica. Trata-se de uma haste rígida de comprimento ℓ e massa m , que pode pivotar (com pequenas rotações e sem atrito) em torno de sua extremidade inferior e que está conectada a uma mola de translação de coeficiente k na sua outra extremidade, em constituição de um *pêndulo invertido*, como mostrado na Figura 1-5.9.

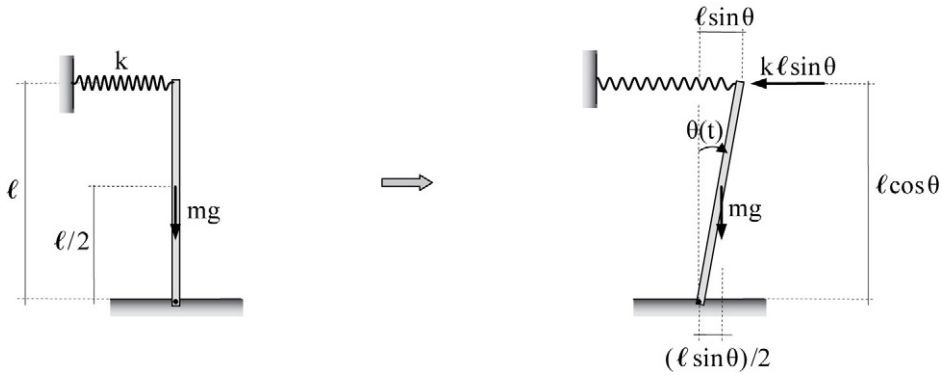


FIGURA 1-5.9 Pêndulo invertido com mola de translação.

Com torque de inércia e a aproximação de que a força desenvolvida na mola seja horizontal, escreve-se a equação de equilíbrio de momento nulo em relação ao ponto de articulação da haste:

$$\frac{m\ell^2}{3}\ddot{\theta} + k\ell \sin \theta \cdot \ell \cos \theta - mg \frac{\ell \sin \theta}{2} = 0 \quad (1-5.38)$$

Essa equação pode também ser obtida com base nas energias cinética e potencial:

$$\begin{cases} E_c = \frac{1}{2} \frac{m\ell^2}{3} \dot{\theta}^2 \\ E_{pe} + E_{pg} = \frac{1}{2} k(\ell \sin \theta)^2 - mg \frac{\ell(1 - \cos \theta)}{2} \end{cases} \quad (1-5.39)$$

que, com a condição de invariância da energia mecânica, fornece

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{6} m\ell^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} k\ell^2 \sin^2 \theta - \frac{1}{2} mg\ell(1 - \cos \theta) \right) = 0$$

Logo, obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{m\ell^2}{3} \ddot{\theta} + k\ell^2 \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot \dot{\theta} - \frac{1}{2} mg\ell \sin \theta \cdot \dot{\theta} &= 0 \\ \rightarrow \frac{m\ell^2}{3} \ddot{\theta} + k\ell^2 \sin \theta \cdot \cos \theta - \frac{1}{2} mg\ell \sin \theta &= 0 \end{aligned} \quad (1-5.40)$$

Essa expressão recai na equação de movimento expressa na Equação 1-5.38, que, em caso de pequenas oscilações, toma a forma linear, mais simples:

$$\frac{m\ell}{3} \ddot{\theta} + \left(k\ell - \frac{mg}{2} \right) \theta = 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{6k\ell - 3mg}{2m\ell} \theta = 0 \quad (1-5.41)$$

Em resolução dessa equação diferencial homogênea, utiliza-se a equação característica:

$$p^2 + \frac{6k\ell - 3mg}{2m\ell} = 0 \quad (1-5.42)$$

de soluções

$$p_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{3mg - 6k\ell}{2m\ell}} \quad (1-5.43)$$

Logo, escreve-se a solução da equação diferencial sob a forma:

$$\theta(t) = b_1 e^{p_1 t} + b_2 e^{p_2 t} \quad (1-5.44)$$

onde b_1 e b_2 são constantes de integração a serem determinadas.

Quanto às soluções da Equação 1-5.43, têm-se as três seguintes possibilidades:

1. O radicando que ocorre na Equação 1-5.43 é menor do que zero, isto é:

$$\frac{3mg - 6k\ell}{2m\ell} < 0 \rightarrow k > \frac{mg}{2\ell} \quad (1-5.45)$$

Consequentemente, aquelas soluções são os números complexos conjugados

$$p_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{6k\ell - 3mg}{2m\ell}} = \pm i\omega_n \quad (1-5.46)$$

onde se utiliza o símbolo complexo ($i \equiv \sqrt{-1}$) e a notação de frequência natural angular (dependente das propriedades do pêndulo e da aceleração da gravidade):

$$\omega_n = \sqrt{\frac{6k\ell - 3mg}{2m\ell}} \quad (1-5.47)$$

Logo, a solução da equação diferencial anterior toma a forma:

$$\theta(t) = b_1 e^{i\omega_n t} + b_2 e^{-i\omega_n t} \quad (1-5.48)$$

E com a *Equação de Euler*:

$$e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x \quad (1-5.49)$$

que relaciona funções exponenciais com funções trigonométricas, a solução anterior se escreve:

$$\begin{aligned} \theta(t) &= b_1 (\cos(\omega_n t) + i \sin(\omega_n t)) + b_2 (\cos(\omega_n t) - i \sin(\omega_n t)) \\ \rightarrow \theta(t) &= (b_1 + b_2) \cos(\omega_n t) + i(b_1 - b_2) \sin(\omega_n t) \rightarrow \theta(t) = a_1 \cos(\omega_n t) + a_2 \sin(\omega_n t) \end{aligned} \quad (1-5.50)$$

Essa é a mesma solução que foi expressa na Equação 1-5.13 e que, com as condições iniciais θ_0 e $\dot{\theta}_0$, fornece a Equação 1-5.15 que expressa *oscilação estável* ou *equilíbrio dinâmico estável*.

2. O radicando que ocorre na Equação 1-5.43 é igual a zero, ou seja:

$$3mg - 6k\ell = 0 \rightarrow k = mg / (2\ell) \quad (1-5.51)$$

Com isso, a equação de movimento Equação 1-5.41 se reduz a ($\ddot{\theta} \neq 0$), de solução ($\theta(t) = b_1 t + b_2$), que, com as condições iniciais ($\theta_0 \neq 0$) e ($\dot{\theta}_0 \neq 0$), toma a forma:

$$\theta(t) = \dot{\theta}_0 t + \theta_0 \quad (1-5.52)$$

Essa solução expressa que o deslocamento angular aumenta linearmente com o tempo. Além disso, em caso de velocidade inicial nula, expressa que o pêndulo permanece com a configuração inicial que lhe for imposta, em caracterização de *equilíbrio indiferente*.

3. O radicando que ocorre na Equação 1-5.43 é maior do zero, o que acontece em caso de coeficiente de rigidez:

$$k < \frac{mg}{2\ell} \quad (1-5.53)$$

Logo, com a notação:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{3mg - 6k\ell}{2m\ell}} \quad (1-5.54)$$

têm-se as soluções ($p_{1,2} = \pm \omega^*$) e a equação diferencial anteriormente obtida tem a solução:

$$\theta(t) = b_1 e^{\omega^* t} + b_2 e^{-\omega^* t} \quad (1-5.55)$$

Essa solução, com condições iniciais ($\theta_0 \neq 0$) e ($\dot{\theta}_0 \neq 0$), toma a forma:

$$\theta(t) = \frac{\theta_0 \omega^* + \dot{\theta}_0}{2\omega^*} e^{\omega^* t} + \frac{\theta_0 \omega^* - \dot{\theta}_0}{2\omega^*} e^{-\omega^* t} \quad (1-5.56)$$

que, em caso de ($\dot{\theta}_0 = 0$), simplifica-se em:

$$\theta(t) = \frac{\theta_0}{2} (e^{\omega^* t} + e^{-\omega^* t}) \rightarrow \frac{2\theta(t)}{\theta_0} = e^{\omega^* t} + e^{-\omega^* t} \quad (1-5.57)$$

A Figura 1-5.10 mostra representações das duas parcelas do deslocamento angular normalizado como na última equação, em caso de ($\omega^* = 0,1 \rightarrow k = 0,993 \text{ mg}/(2\ell)$). Observa-se que a primeira parcela dessa equação expressa intenso crescimento exponencial, e a segunda parcela, moderado decréscimo exponencial. Consequentemente, o referido deslocamento angular aumenta com o tempo, sem retorno à configuração inicial. O movimento é não oscilatório, em caracterização de *instabilidade* e que se deve ao momento da força elástica restauradora ser menor do que o “momento de tombamento” provocado pelo peso da haste.⁴³

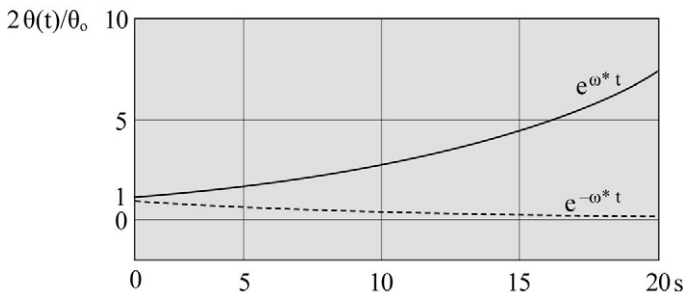


FIGURA 1-5.10 Representações das parcelas da Equação 1-5.57.

⁴³ Esse resultado foi obtido com a consideração de deslocamento angular pequeno e, portanto, a equação anterior guarda aproximações de idealização ao fenômeno de instabilidade.

Os três descritos comportamentos podem ser associados aos de uma esfera sob a ação da gravidade, que é afastada de sua posição inicial de equilíbrio como mostrado nas três representações da [Figura 1-5.11](#). Na primeira representação, a esfera fica em repouso na posição para a qual for deslocada, em *equilíbrio indiferente*. Na segunda, após uma pequena perturbação, a esfera oscila internamente a um arco circular e em torno da posição inferior, em movimento análogo ao da massa de um pêndulo simples, em caracterização de *equilíbrio estável*. Naturalmente, em sistema físico real, a esfera retorna assintoticamente à sua posição inicial, devido à dissipação de energia. Já quanto à última das representações, qualquer deslocamento transversal imposto à esfera a faz se afastar cada vez mais de sua posição inicial, em caracterização de *instabilidade* a partir dessa posição de *equilíbrio instável*.

Equilíbrio indiferente é o que ocorre em estruturas autoequilibradas, como em pontes rolantes, em que se pode impor deslocamento de corpo rígido. Equilíbrio dinâmico estável é o que se busca para as estruturas civis e se caracteriza por oscilações em níveis aceitáveis que decaem, com o cessar da ação externa, por dissipação de energia. Instabilidade dinâmica se caracteriza pela amplificação continuada das oscilações até eventual danificação da estrutura.⁴⁴

A determinação da interação entre forças aerodinâmicas (que são as provenientes da ação do vento) e oscilações de estruturas (que envolvem forças de inércia, de amortecimento e restitutivas elásticas) é denominada *análise aeroelástica* (vide Simiu & Sacanlan, 1978).⁴⁵

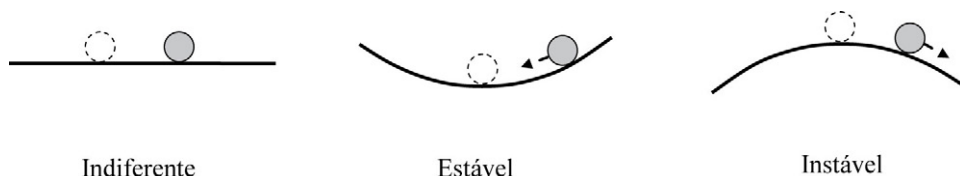


FIGURA 1-5.11 Condições de equilíbrio de uma esfera.

⁴⁴ Um exemplo de instabilidade dinâmica é o de *instabilidade aeroelástica*, que pode ocorrer em estrutura flexível inserida em um fluido que, ao se escoar em torno da estrutura com uma oscilação inicial, transfere energia a esta, cuja vibração, por sua vez, aumenta a pressão dinâmica do fluido que intensifica essa vibração, em fenômeno denominado *flutter*. Consequentemente, em caso de insuficiência de mecanismo de dissipação de energia, há contínuo crescimento das oscilações (usualmente acoplamento entre flexão e torção) que resulta em ruína da estrutura. Foi o que ocorreu com a primeira *Ponte de Tacoma*, nos Estados Unidos, que se rompeu devido a *flutter* de torção provocado pelo vento, em novembro de 1940. Vide Billah, K.Y. & Scanlan, R.H., 1991, *Resonance, Tacoma Narrows bridge failure, and undergraduate physics textbooks*, American Journal of Physics, vol. 59, n.2.

⁴⁵ Importa acrescentar que instabilidade pode ter razão física ou ser devida à resolução numérica (como é o caso de certos métodos de integração das equações diferenciais de movimento). E em comportamento estático, pode ocorrer instabilidade física devido a esforço de compressão e a imperfeições geométricas, o que é denominado *flambagem*.

Além da revisão das *leis de Newton*, a importância deste capítulo encontra-se nos conceitos, entre outros, de momento de inércia de massa, impulso, força (e torque) de inércia, equilíbrio dinâmico, grau de liberdade, modelos contínuos e discretos, energias cinética e potencial, coeficiente de rigidez, período natural e frequência natural.

Vale registrar que força de inércia que implica o *princípio de d'Alembert* será amplamente utilizada nas futuras formulações de equações de movimento; o conceito de modelo discreto será fundamental ao tratamento dos modelos de multigraus de liberdade, a partir do Capítulo 4; o conceito de momento de inércia de massa será necessário à formação da matriz de massa discreta do elemento de grelha no Capítulo 5, e o conceito de impulso será utilizado nos Capítulos 3 e 7.

1-6 EXERCÍCIOS PROPOSTOS

- 1-6.1** Determine o momento de inércia de massa de uma placa retangular de dimensões $a \times b$, espessura “ e ” e massa específica ρ , em relação ao eixo normal ao plano da placa e que passa pelo centro de massa. Transforme o resultado para um eixo paralelo ao anterior passando por um dos vértices da placa.
- 1-6.2** Determine o momento de inércia de massa de uma esfera de raio r e massa m , em relação a um eixo que passa pelo centro de massa.
- 1-6.3** Determine os coeficientes de rigidez axial e de torção da barra cônica esquematizada na [Figura 1-6.3](#) e de propriedades elásticas E e G .

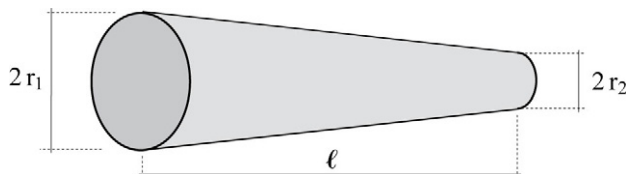


FIGURA 1-6.3 Barra cônica.

- 1-6.4** Com o *princípio dos deslocamentos virtuais*, determine a reação do apoio B da viga biapoiada da [Figura 1-6.4](#).

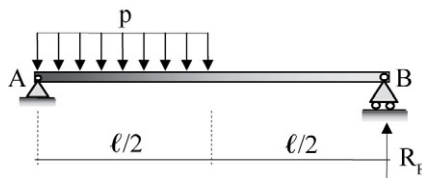


FIGURA 1-6.4 Viga biapoiada.

- 1-6.5** Uma haste rígida de comprimento $r/2$ é suspensa por cabos de massa desprezível, de maneira a constituir o pêndulo mostrado na [Figura 1-6.5](#). Em caso de pequenas rotações e na condição de que os cabos estejam sempre tracionados, pedem-se as

frequências naturais para as oscilações nos planos xy e yz . Entre essas oscilações, qual é a de maior período natural?

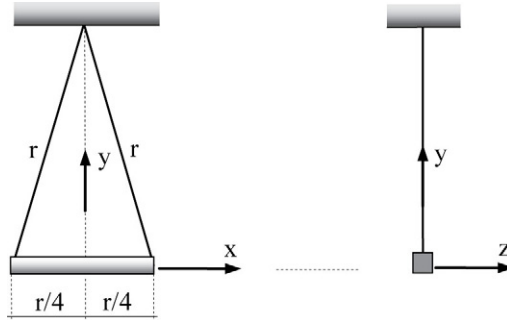


FIGURA 1-6.5 Pêndulo de comportamento tridimensional.

1-6.6 A Figura 1-6.6 mostra uma viga rígida, de massa m' por unidade de comprimento e com apoios elásticos nas extremidades. Obtenha a equação de movimento e a frequência natural do sistema.

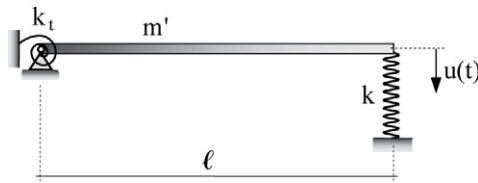


FIGURA 1-6.6 Viga com molas de torção e de translação.

1-6.7 As hastes com restrições elásticas mostradas na Figura 1-6.7 são indeformáveis, de massa m e rotuladas na extremidade inferior, além de ter a massa M concentrada na extremidade superior. Pedem-se as correspondentes equações de movimento em caso dessas hastes serem soltas de uma inclinação pequena. Pede-se, também, a identificação das correspondentes condições de estabilidade e frequências naturais.

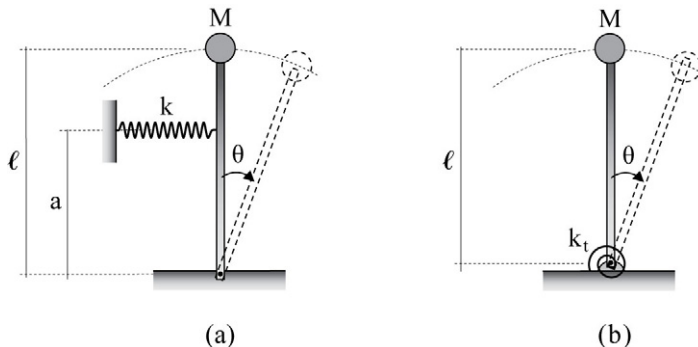


FIGURA 1-6.7 Pêndulo invertido com restrição elástica.

1-6.8 Na Figura 1-6.8 estão esquematizados quatro sistemas mecânicos. Identifique o número de graus de liberdade de modelos para esses sistemas.

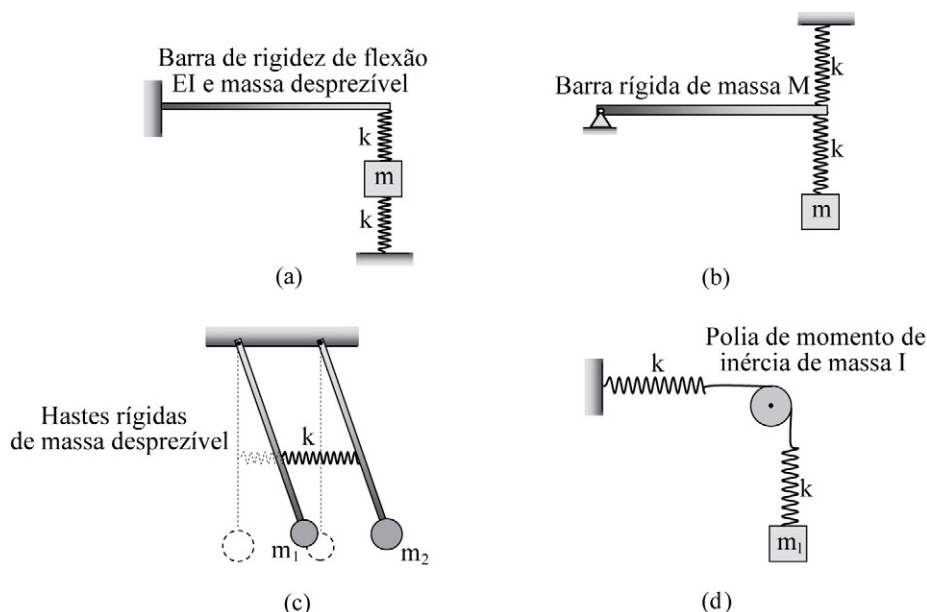


FIGURA 1-6.8 Sistemas mecânicos.

1-6.9 Um conjunto de doze pêndulos de comprimentos desiguais deve ser construído como ilustra a Figura 1-6.9 e de maneira que, dada uma pequena inclinação inicial para todos os pêndulos (na direção transversal ao plano de representação), o conjunto passe pela posição vertical quando o primeiro pêndulo completar 48 ciclos. Pede-se determinar o comprimento dos diversos pêndulos, com a condição de que a diferença entre o número de ciclos de um pêndulo para o que lhe é

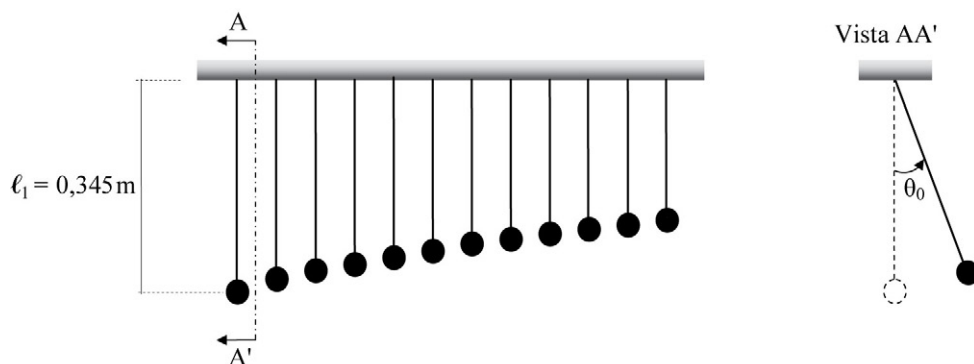


FIGURA 1-6.9 Conjunto de doze pêndulos simples.

consecutivo seja um número inteiro e que a diferença de comprimento entre os pêndulos seja a menor possível. Um protótipo construído em atendimento a essas condições evidencia interessantes evoluções.

1-7 QUESTÕES PARA REFLEXÃO

- 1-7.1** O que é *vibração* e o que significa um *sistema mecânico dinâmico*?
- 1-7.2** O que distingue uma *análise estática* de uma *análise dinâmica* de estrutura? Quais são as forças envolvidas em cada uma dessas análises? E qual é a diferença entre uma *análise dinâmica determinística* e uma *análise dinâmica aleatória*?
- 1-7.3** Por que os modelos matemáticos que representam sistemas físicos têm limitações de aplicabilidade? Como considerar a questão de simplicidade versus acurácia desses modelos?
- 1-7.4** O que é um *referencial inercial*? Por que, em problemas de engenharia, é usual utilizar um referencial fixo à Terra como inercial?
- 1-7.5** Como explicar as *leis de Newton* que fundamentam a *Mecânica Clássica*? Por que a primeira e a segunda dessas leis requerem um referencial inercial?
- 1-7.6** Qual é a diferença entre as constantes físicas g e G ? Por que, a rigor, o valor de g diminui com a altura?
- 1-7.7** Uma pedra e uma pluma são soltas a partir do repouso, de uma mesma altura e em uma câmara de vácuo. Por que ambas percorrem a mesma distância em um mesmo intervalo de tempo?
- 1-7.8** Como conceituar *inércia*, *matéria*, *massa*, *força*, *peso*, *força de inércia* e *trabalho de uma força*?
- 1-7.9** Quais são as diferenças entre *momento de inércia de massa*, *momento de inércia polar* e *momento de uma força*? E quais são as correspondentes unidades no SI?
- 1-7.10** O que é *força de campo*? E *força de contato*? E *força concentrada*?
- 1-7.11** Qual é a razão de se conceber *força de inércia*? E quais são as expressões dessa força nos casos de aceleração linear e aceleração angular?
- 1-7.12** Por que o *princípio da ação e reação* não se aplica em caso de força de inércia? E por que não se pode dizer que uma ação equilibra a correspondente reação?
- 1-7.13** Qual é a diferença entre diagrama de corpo livre na estática e na dinâmica? O que significa *equilíbrio dinâmico*?
- 1-7.14** Como conceituar e exemplificar *graus de liberdades*? Qual é a diferença entre graus de liberdade e coordenadas de especificação do domínio geométrico de um modelo de estrutura? Como exemplificar?

- 1-7.15** O que distingue um *modelo contínuo* de um *modelo discreto*? Qual é a vantagem de um em relação ao outro? E por que a matéria costuma ser idealizada como contínua (em análise de estruturas) se é formada por partículas elementares com espaços entre si?
- 1-7.16** Por que se diz que os corpos elásticos são elementos armazenadores de energia? E como são conceituadas as formas de energia *potencial gravitacional*, *potencial elástica*, *cinética* e *mecânica*?
- 1-7.17** O que são coeficientes de *rigidez axial* e *rigidez de torção* de uma barra? Quais as unidades desses coeficientes no S.I? E por que esses coeficientes são associados a molas?
- 1-7.18** O que é *modelo estrutural linear*? Qual é a vantagem desse tipo de modelo em relação ao não linear?
- 1-7.19** O que é *força conservativa*? Por que se diz que as forças elásticas e de inércia são conservativas?
- 1-7.20** O que é um *sistema mecânico conservativo*? Por que essa é uma idealização aproximativa ao correspondente sistema real? Como se processa a conversão de energia em oscilação de um sistema mecânico conservativo?
- 1-7.21** Qual é o requisito para a validade da *lei de Hooke*?
- 1-7.22** Em que consiste o *princípio de d'Alembert*? Qual é a vantagem desse princípio?
- 1-7.23** Como explicar o *princípio dos deslocamentos virtuais*? Qual é a vantagem desse princípio? Os deslocamentos virtuais são necessariamente infinitesimais? E esses deslocamentos precisam sempre atender aos vínculos externos à estrutura?
- 1-7.24** Quais são os requisitos para a superposição de resultados de análises determinísticas de uma estrutura sob diferentes ações externas?
- 1-7.25** O que é *frequência natural* de um sistema mecânico? Qual é a diferença entre *frequência angular* e *frequência cíclica*? Quais as unidades em cada caso? E o que é *período natural* de vibração?
- 1-7.26** O que é um *pêndulo ideal*? E como se ajusta um relógio de pêndulo?
- 1-7.27** O que significa *isocronismo pendular*? Qual é a trajetória da massa de um pêndulo que tem esse isocronismo?
- 1-7.28** O que é um *pêndulo de torção*? Quais são as hipóteses que embasam o comportamento desse pêndulo?
- 1-7.29** Qual é a diferença entre *equilíbrio estável* e *equilíbrio instável* de um sistema mecânico? Por que se diz que a ação da gravidade é estabilizadora no pêndulo simples e é destabilizadora no pêndulo invertido?
- 1-7.30** O que é *comportamento aeroelástico*? Qual é a importância da dissipação de energia nesse comportamento?



CAPÍTULO 2

Oscilador Simples Não Amortecido

O QUE É UM OSCILADOR SIMPLES?

No capítulo anterior foram estudados vários pêndulos de um grau de liberdade sob oscilações causadas por perturbações iniciais, em idealização agora denominada *oscilador simples não amortecido em vibração livre* ou, simplesmente, *oscilador harmônico*. Oscilador simples é também o que resulta da modelagem de uma estrutura em um grau de liberdade, quando então também se diz *modelo* ou *sistema massa-mola*.¹

Este capítulo é dedicado ao oscilador simples não amortecido ou conservativo. Embora sempre ocorra dissipação de energia, que tende a diminuir as amplitudes das oscilações em fenômeno denominado *amortecimento*, essa dissipação costuma ser desconsiderada quando de pequena relevância. É o que ocorre em análise de estrutura sob força de impacto, em que o relevante é o comportamento de curta duração, que praticamente independe do amortecimento. Além disso, o estudo do oscilador não amortecido, como desenvolvido neste capítulo, é fundamental à abordagem do oscilador amortecido, tema do próximo capítulo.

As seções deste capítulo têm a seguinte estruturação:

- 1-1 Apresentação da equação de movimento do oscilador simples não amortecido, em relação à configuração original não deformada como também em relação à configuração de equilíbrio estático.
- 1-2 Detalhamento da oscilação em vibração livre não amortecida.
- 1-3 Determinação da solução de vibração sob força harmônica, com a caracterização do *fator de amplificação dinâmica*, *frequência ressonante* e *fenômeno de batimento*.
- 1-4 Concepção do oscilador simples equivalente, em particular em casos de vigas simples.
- 1-5 Obtenção de *coeficientes de rigidez equivalentes* a associações de molas.
- 1-6 Proposição de exercícios.
- 1-7 Oferecimento de questões para reflexão.

¹ A partir deste ponto, o termo *sistema* passa a ter a conotação de *modelo*, a menos que se escreva *sistema físico*, em referência ao processo físico real, ou que se especifique que se trata de um *sistema de equações*.

2-1 EQUAÇÃO DE MOVIMENTO

Considera-se o modelo constituído por uma massa m suspensa por uma mola de translação de coeficiente k e de massa desprezível, como esquematizado na Figura 2-1.1, sem mecanismo de dissipação de energia, em constituição do denominado *oscilador simples não amortecido*, em vibração de translação vertical.

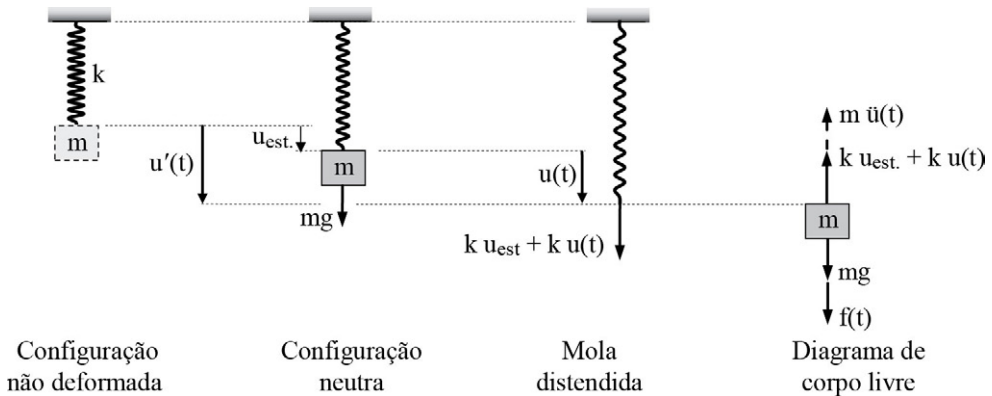


FIGURA 2-1.1 Concepção de oscilador simples não amortecido.

Devido ao peso mg , o oscilador tem uma configuração de equilíbrio estático caracterizada pela *deflexão estática* de notação $u_{est.}$. Essa é a *configuração neutra*, em que a mola sustenta a massa com uma força de baixo para cima expressa por:²

$$mg = k u_{est.} \rightarrow u_{est.} = mg/k \quad (2-1.1)$$

Com a aplicação à massa de uma força $f(t)$ de cima para baixo, ocorre um deslocamento adicional função do tempo, denominado *deslocamento dinâmico* e de notação $u(t)$. Logo, com a suposição da força de inércia $m\ddot{u}(t)$ (em sentido contrário à aceleração), tem-se o diagrama de corpo livre mostrado na parte direita da figura anterior e que permite escrever a equação de equilíbrio dinâmico:

$$m\ddot{u}(t) + k(u_{est.} + u(t)) = mg + f(t) \quad (2-1.2)$$

Essa equação simplifica-se para a forma independente da força gravitacional:

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = f(t) \quad (2-1.3)$$

que é uma equação diferencial de segunda ordem, não homogênea, característica de *vibração não amortecida forçada*. Além disso, como k e m são constantes, essa é uma equação linear.

² A partir deste capítulo não se fará distinção de representação entre uma grandeza vetorial e a correspondente intensidade ou a correspondente lei de definição.

Alternativamente, tem-se, em relação à configuração não deformada, o *deslocamento total*:

$$u'(t) = u_{\text{est}} + u(t) \quad (2-1.4)$$

com o qual se escreve a equação de movimento sob a nova forma:

$$m\ddot{u}'(t) + ku'(t) = mg + f(t) \quad (2-1.5)$$

A equação de movimento em termos do deslocamento dinâmico é mais vantajosa, por ser compacta, além do que, por se considerar comportamento linear, ao resultado dessa equação pode ser acrescentado o da ação da gravidade, para obter o esforço elástico total. A solução completa dessa equação é constituída por uma *solução particular* acrescida da solução da correspondente equação homogênea, denominada *solução complementar*. Na seção seguinte, determina-se essa última e, na Seção 2-3, obtém-se a solução particular para o importante caso de força harmônica. Utiliza-se o termo *resposta* com o significado da variação no tempo de um parâmetro que expresse o comportamento do modelo, como deslocamento, velocidade, aceleração ou esforço, por exemplo.

2-2 VIBRAÇÃO LIVRE

Quando a força externa é nula e o sistema não tem amortecimento, diz-se *vibração livre não amortecida* e a equação diferencial de movimento expressa na [Equação 2-1.3](#) simplifica-se para a forma homogênea:

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{u}(t) + \frac{k}{m} u(t) = 0 \quad (2-2.1)$$

cujas soluções não triviais dependem de condições iniciais ao movimento.³

A equação anterior tem a mesma forma que as equações de movimento dos pêndulos de um grau de liberdade estudados no capítulo anterior. Assim, essa equação tem as soluções reduzidas:

$$\begin{cases} u(t) = a_1 \cos(\omega_n t) \\ u(t) = a_2 \sin(\omega_n t) \end{cases} \quad (2-2.2)$$

e a solução completa:

$$u(t) = a_1 \cos(\omega_n t) + a_2 \sin(\omega_n t) \quad (2-2.3)$$

Essa última, com as condições iniciais de deslocamento u_0 e de velocidade v_0 , em semelhança à Equação 1-5.15, toma a nova forma:

$$u(t) = u_0 \cos(\omega_n t) + \frac{v_0}{\omega_n} \sin(\omega_n t) \quad (2-2.4)$$

³ A solução dessa equação foi apresentada pelo matemático holandês Daniel Bernoulli (1700-1782), em 1739.

onde se tem a *frequência natural angular*, característica dinâmica do oscilador simples:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2-2.5)$$

Com essa notação de frequência, a equação de movimento em vibração livre não amortecida se escreve sob a nova forma:

$$\ddot{u}(t) + \omega_n^2 u(t) = 0 \quad (2-2.6)$$

Logo, em coerência com a Equação 1-5.9, tem-se o *período natural de vibração*:

$$T_n = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (2-2.7)$$

que corresponde à frequência cíclica natural:

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2-2.8)$$

Além disso, com as notações ($a_1 = a \cos \phi$) e ($a_2 = a \sin \phi$), escreve-se ($a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$) e ($\phi = \arctg(a_2/a_1)$). Com a substituição dessas notações na [Equação 2-2.3](#) obtém-se a solução geral:

$$u(t) = a \cos \phi \cos(\omega_n t) + a \sin \phi \sin(\omega_n t) \quad (2-2.9)$$

$$\rightarrow u(t) = a \cos(\omega_n t - \phi) \quad (2-2.10)$$

Essa equação expressa um *movimento harmônico simples*, em que “a” e ϕ denotam, respectivamente, a *amplitude* (deslocamento máximo do oscilador) e o *ângulo de fase*, ambos dependentes das condições iniciais, u_o e v_o .⁴

Comparando as Equações 2-2.9 e 2-2.4, identifica-se que:

$$\begin{cases} u_o = a \cos \phi \\ \frac{v_o}{\omega_n} = a \sin \phi \end{cases} \quad (2-2.11)$$

E a resolução desse sistema fornece a *amplitude*:

$$a = \sqrt{u_o^2 + (v_o/\omega_n)^2} \quad (2-2.12)$$

⁴ Esse ângulo especifica a defasagem da solução $u(t)$ em relação à função $\cos(\omega_n t)$, em caso de $v_o \neq 0$.

e o ângulo de fase:

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{v_o}{u_o \omega_n} \rightarrow \phi = \arctg \left(\frac{v_o}{u_o \omega_n} \right) \quad (2-2.13)$$

A resposta livre não amortecida expressa na [Equação 2-2.10](#) está representada na parte direita da [Figura 2-2.1](#). É simples verificar que essa representação corresponde à projeção de um ponto P que se move em sentido anti-horário sobre uma circunferência de raio igual à amplitude de vibração e em velocidade angular constante ω_n , como indicado na parte esquerda da mesma figura.

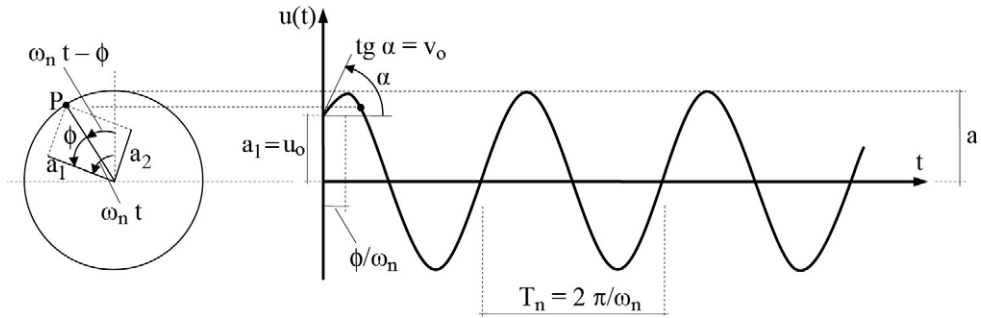


FIGURA 2-2.1 Vibração livre de oscilador simples não amortecido.

Com base na expressão de deslocamento contida na [Equação 2-2.10](#), têm-se as derivadas:

$$\dot{u}(t) = -a \omega_n \sin(\omega_n t - \phi) = a \omega_n \cos(\omega_n t - \phi + \pi/2) \quad (2-2.14)$$

$$\ddot{u}(t) = -a \omega_n^2 \cos(\omega_n t - \phi) = a \omega_n^2 \cos(\omega_n t - \phi + \pi) \quad (2-2.15)$$

Assim, as equações de velocidade e de aceleração são harmônicas simples com a mesma frequência que a equação de deslocamento, mas defasadas à frente desta, respectivamente, de $\pi/2$ e de π . Essas soluções estão representadas na [Figura 2-2.2](#), em caso de ($u_o \neq 0$) e ($v_o = 0$), em que ($\phi = 0$).

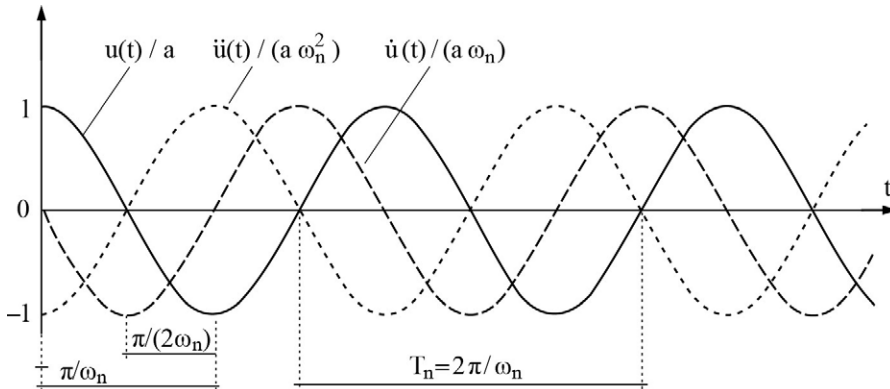


FIGURA 2-2.2 Soluções normalizadas no caso das condições iniciais $u_o \neq 0$ e $v_o = 0$.

A comparação da última equação com a [Equação 2-2.10](#) mostra que:

$$\ddot{u}(t) = -\omega_n^2 u(t) \quad (2-2.16)$$

Isto é, em movimento harmônico simples, a aceleração é proporcional e de sentido contrário à oscilação. Além disso, tendo-se a expressão da força elástica na mola, $f_e(t) = ku(t)$, obtém-se:

$$f_e(t) = -k\ddot{u}(t)/\omega_n^2 = -m\ddot{u}(t) \quad (2-2.17)$$

o que mostra que os valores extremos dessa força ocorrem nos instantes de acelerações extremas.⁵

Por desprezar dissipação de energia, a energia mecânica é igual à energia (inicial) fornecida ao oscilador:

$$E_m = m\dot{u}(t)^2/2 + ku(t)^2/2 = mv_o^2/2 + ku_o^2/2 \quad (2-2.18)$$

e também igual aos valores máximos das energias cinética e de deformação elástica linear:

$$E_m = m\dot{u}_{\text{máx.}}^2/2 = ku_{\text{máx.}}^2/2 \quad (2-2.19)$$

A partir da [Equação 2-2.10](#), tem-se ($u_{\text{máx.}} = a$) e da [Equação 2-2.14](#) obtém-se ($\dot{u}_{\text{máx.}} = a\omega_n$). Logo, escreve-se:

$$\dot{u}_{\text{máx.}} = \omega_n u_{\text{máx.}} \quad (2-2.20)$$

que substituído na [Equação 2-2.19](#) fornece a frequência natural expressa na [Equação 2-2.5](#)

Por outro lado, se o grau de liberdade do oscilador for de rotação, o momento restitutivo elástico e a inércia são considerados através, respectivamente, do coeficiente de mola de torção, k_t , e do momento de inércia de massa em relação ao eixo de rotação, I_o . Logo, sendo θ_o e $\dot{\theta}_o$, respectivamente, a rotação inicial e a velocidade angular inicial, são válidas as equações anteriores de vibração livre não amortecida, agora com as seguintes expressões:

- Equação de movimento:

$$\text{Equação 2 - 2.1} \rightarrow I_o \ddot{\theta}(t) + k_t \theta(t) = 0 \quad (2-2.21a)$$

- Frequência natural:

$$\text{Equação 2 - 2.5} \rightarrow \omega_n = \sqrt{k_t/I_o} \quad (2-2.21b)$$

- Solução geral:

$$\text{Equação 2 - 2.4} \rightarrow \theta(t) = \theta_o \cos(\omega_n t) + \frac{\dot{\theta}_o}{\omega_n} \sin(\omega_n t) = a \cos(\omega_n t - \phi) \quad (2-2.21c)$$

⁵ Essa é uma importante conclusão quando a excitação ocorre por aceleração da base do sistema.

- Amplitude:

$$\text{Equação 2-2.12} \rightarrow a = \sqrt{\theta_o^2 + (\dot{\theta}_o / \omega_n)^2} \quad (2-2.21d)$$

- Ângulo de fase:

$$\text{Equação 2-2.13} \rightarrow \phi = \arctg \frac{\dot{\theta}_o}{\theta_o \omega_n} \quad (2-2.21e)$$

2-3 VIBRAÇÃO SOB FORÇA HARMÔNICA

Forças harmônicas são expressas em termos de seno ou de cosseno e têm grande importância em *Dinâmica das Estruturas*. Isso porque, não só ações externas costumam ser idealizadas como harmônicas, como também porque força periódica arbitrária pode ser decomposta em série de funções harmônicas, e força aperiódica pode ser decomposta em distribuição contínua de componentes harmônicos. Além disso, forças harmônicas costumam ser o resultado de idealizações de excitações provocadas por rotores com massa excêntrica, como está descrito a seguir.

Considera-se uma máquina rotativa fixada a uma bancada constituída de um anteparo horizontal rígido, engastado a dois componentes verticais indeformáveis axialmente e de coeficiente de rigidez de flexão ($k' = 12EI/\ell^3$), como ilustra a [Figura 2-3.1](#).⁶ Assim, esses componentes podem ser simulados através de duas molas de translação e de rigidez ($k' = 12EI/\ell^3$) ligadas em paralelo, de maneira que o coeficiente de mola equivalente a ambos os componentes é igual a ($k = 2k'$).⁷ Além disso, desconsiderando a massa desses componentes e designando a massa da máquina e do anteparo horizontal por m , obtém-se, como idealização do sistema, o oscilador simples representado na parte direita da mesma figura.

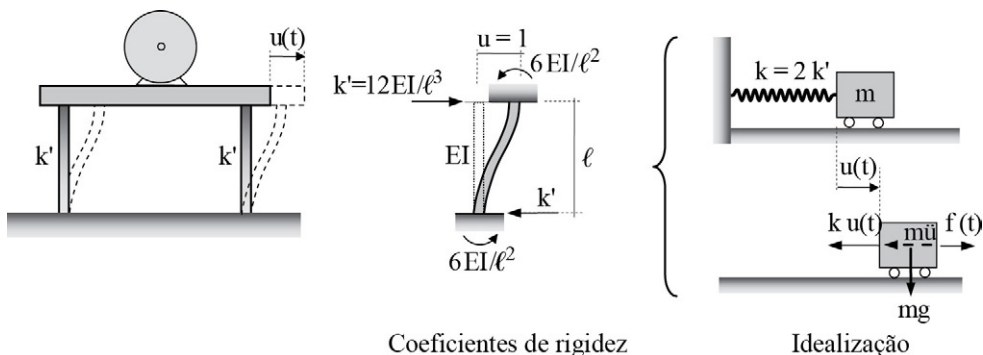


FIGURA 2-3.1 Conjunto bancada-máquina idealizado como oscilador simples não amortecido.

⁶ Coeficiente de rigidez, como foi apresentado no capítulo anterior, é numericamente igual à força que provoca deslocamento unitário em sua própria direção. Generalização desse conceito será apresentada na Seção 4-1.

⁷ Coeficiente de mola equivalente a uma associação de molas é o tema da Seção 2-5.

O referido desbalanceamento é representado por uma massa m' de excentricidade r em relação ao eixo do rotor, que gira com velocidade angular constante ω , como esquematizado na [Figura 2-3.2](#). Logo, essa massa tem aceleração tangencial nula e a aceleração normal ($a_n = v^2/r = \omega^2 r$). Em sentido contrário a essa aceleração, supõe-se a *força de inércia centrífuga* $m' \omega^2 r$, que se projeta na direção do grau de liberdade horizontal $u(t)$, sob a forma:⁸

$$f(t) = (m' \omega^2 r) \cos(\omega t) = f_o \cos(\omega t) \quad (2-3.1)$$

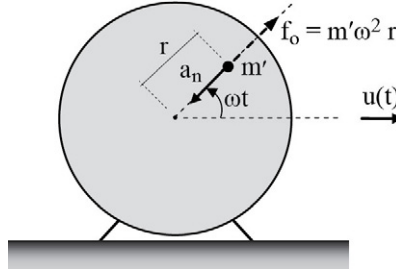


FIGURA 2-3.2 Massa excêntrica com velocidade angular constante.

Assim, com a consideração dessa força e para o deslocamento horizontal $u(t)$, tem-se o diagrama de corpo livre mostrado na parte direita da [Figura 2-3.1](#), em que $ku(t)$ é a força elástica e $m\ddot{u}(t)$ é a força de inércia. Logo, escreve-se equação de movimento do conjunto bancada-rotor:

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = f_o \cos(\omega t) = m' \omega^2 r \cos(\omega t) \quad (2-3.2)$$

Vale notar que a força transmitida ao suporte (dos componentes verticais) é igual à força elástica $ku(t)$.

A solução geral da equação anterior é igual à solução da forma homogênea que foi obtida na seção anterior, mais a solução particular:

$$u_p(t) = a_p \cos(\omega t) \quad (2-3.3)$$

em que a_p é *amplitude* e ω , *frequência (angular) forçante*. Essa é a resposta forçada.

Com a substituição da última solução na equação diferencial que lhe antecede, obtém-se:

$$-ma_p \omega^2 \cos(\omega t) + ka_p \cos(\omega t) = f_o \cos(\omega t) \rightarrow a_p(k - m\omega^2) = f_o$$

que, com a condição de $k \neq m\omega^2$, fornece a amplitude:

$$a_p = \frac{f_o}{k - m\omega^2} = \frac{f_o}{k} \frac{1}{1 - m\omega^2/k} \rightarrow a_p = \frac{f_o}{k} \frac{1}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \quad (2-3.4)$$

⁸ O conceito de força centrífuga foi apresentado por Christiaan Huygens, em 1673. O fator $m'r$ que ocorre na [Equação 2-3.1](#) pode ser obtido experimentalmente.

Além disso, com a notação:

$$u_{\text{est.}} = f_o/k \quad (2-3.5)$$

denominada deslocamento pseudoestático e com a notação:

$$r = \omega / \omega_n \quad (2-3.6)$$

chamada de *razão de frequências*, escreve-se a amplitude anterior sob a nova forma:

$$a_p = \frac{u_{\text{est.}}}{1-r^2} \quad (2-3.7)$$

na condição de $r \neq 1$. E assim, a solução particular toma a nova forma:

$$u_p(t) = \frac{u_{\text{est.}}}{1-r^2} \cos(\omega t) \quad (2-3.8)$$

Logo, a solução completa da equação diferencial de movimento é a soma da solução anterior com a solução complementar expressa na [Equação 2-2.3](#), isto é:

$$u(t) = a_1 \cos(\omega_n t) + a_2 \sin(\omega_n t) + \frac{u_{\text{est.}}}{1-r^2} \cos(\omega t) \quad (2-3.9)$$

em que as constantes a_1 e a_2 são obtidas com base nas condições iniciais, u_o e v_o , e se escrevem:

$$\begin{cases} a_1 = u_o - \frac{u_{\text{est.}}}{1-r^2} \\ a_2 = \frac{v_o}{\omega_n} \end{cases} \quad (2-3.10)$$

Em caso de $\omega_n > \omega$ e ($v_o = 0$), as soluções particular e completa anteriores estão ilustradas na [Figura 2-3.3](#), juntamente com a solução de vibração livre de condições iniciais ($u_o = f_o/k$) e ($v_o = 0$). Observa-se que essa última solução tem sinal contrário e o mesmo período que

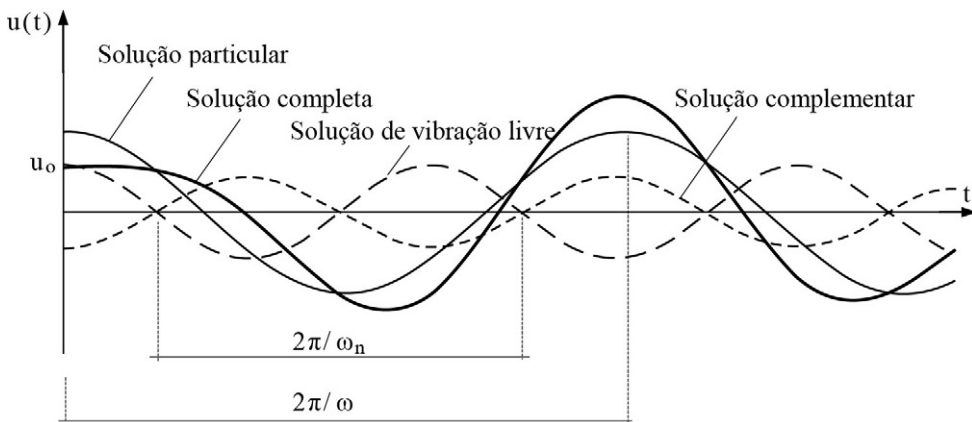


FIGURA 2-3.3 Composição da solução completa sob força harmônica.

a solução complementar, com amplitudes iguais em valores absolutos. Vê-se, também, que a solução completa apresenta amplitude maior do que a particular, na duração de tempo adotada na representação.⁹ Além disso, como se considera conservação de energia, a soma da energia cinética $\frac{m\dot{u}^2(t)}{2}$ com a energia potencial elástica $\frac{k u^2(t)}{2}$ é igual, em cada instante, à energia fornecida ao sistema pela força excitadora.

Um conceito muito importante é o *fator de amplificação dinâmica* definido como a razão entre a amplitude da solução particular de deslocamento e o deslocamento pseudoestático, que se escreve:

$$A_d = \frac{a_p}{u_{est.}} \rightarrow A_d = \frac{1}{1-r^2} \quad (2-3.11)$$

Devido à alternância da oscilação, esse fator é considerado em valor absoluto e, como representado na [Figura 2-3.4](#), cresce indefinidamente à medida que r se aproxima da unidade. Isto é, a amplitude tende ao infinito à medida que a frequência forçante se aproxima da frequência natural.¹⁰

Fator de amplificação dinâmica

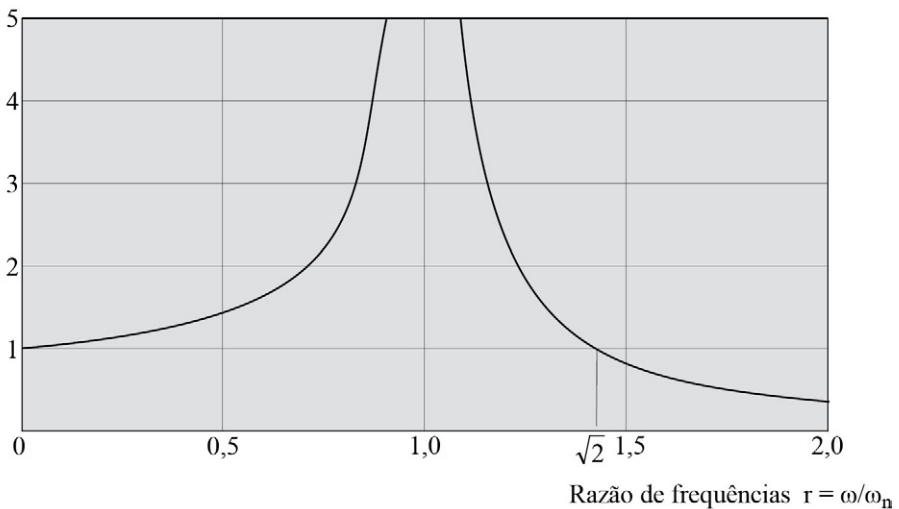


FIGURA 2-3.4 Fator de amplificação dinâmica *versus* razão de frequências.

Com $(\omega = \omega_n)$, a solução particular anterior fica indeterminada, diz-se *condição de ressonância* e que ω é a *frequência ressonante* ao sistema.

⁹ Como sempre há dissipação de energia em sistema físico, a solução complementar tende a desaparecer após alguns ciclos, quando então o sistema passa a oscilar na frequência forçante, embora defasada com respeito à excitação.

¹⁰ Em sistema real, a dissipação de energia limita o crescimento desproporcional da amplitude, que pode, contudo, atingir valor intolerável pelo sistema.

Com condições iniciais nulas, a solução de deslocamento expressa na [Equação 2-3.9](#) particulariza-se em:

$$u(t) = \frac{u_{\text{est.}}}{1-r^2} (\cos(\omega t) - \cos(\omega_n t)) \quad (2-3.12)$$

As duas funções harmônicas dessa solução, ao se combinarem, podem ter amplitudes somadas e/ou subtraídas uma da outra. Assim, dependendo do afastamento relativo entre ω e ω_n , a amplitude dessa solução aumenta e diminui em forma padrão, como ilustra a [Figura 2-3.5](#) no caso de ($u_{\text{est.}} = 0,0075$), ($\omega_n = 9,6 \text{ rad/s}$) e ($r = 1,087$), onde também estão representadas envoltórias. É o chamado fenômeno de *batimento*, que será novamente abordado na Seção 4-3.

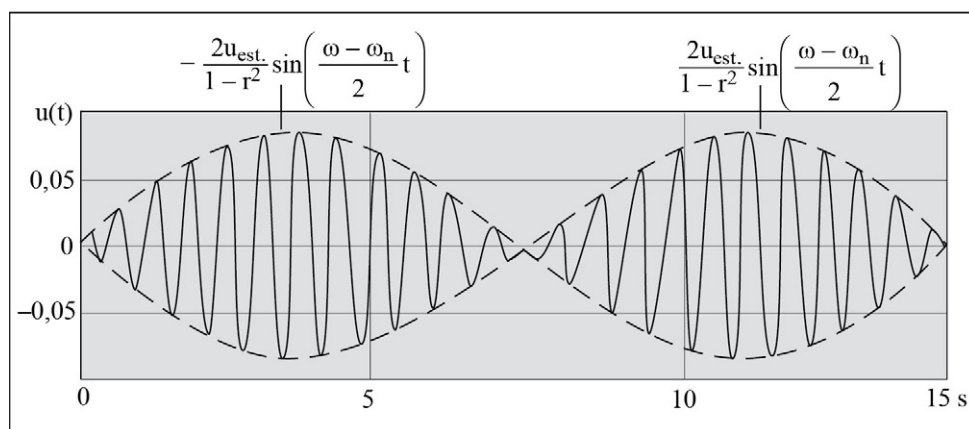


FIGURA 2-3.5 Representação de batimento.

2-4 OSCILADOR SIMPLES EQUIVALENTE

Foi argumentado que a construção de um modelo matemático que simule o comportamento de um sistema físico sempre guarda aproximações à realidade. Isto é, a solução encontrada com o modelo apenas expressa comportamento aproximado àquele sistema. Também foi informado que, embora, com os atuais computadores e métodos de análise, possam ser utilizados sofisticados modelos discretos para uma acurada determinação do comportamento de praticamente qualquer estrutura, modelos simples são úteis em estimativa preliminar desse comportamento.¹¹ Resultados desses modelos orientam a construção de outros mais elaborados, se isso se mostrar necessário, e são úteis no balizamento da interpretação e checagem dos resultados destes últimos.¹²

¹¹ A Seção 9-8 trata da crescente eficiência computacional.

¹² Em análise estática utiliza-se usualmente elevado número de graus de liberdade para obter os esforços internos de forma acurada. Em análise dinâmica, pode-se adotar a mesma discretização, contudo, dado ao maior volume de cálculo e às incertezas ao serem estabelecidos o amortecimento, a massa e as ações externas, justifica-se a adoção de modelo com menos graus de liberdade do que no caso anterior. Em estruturas civis, parte da massa correspondente à carga acidental (que se deve à massa não estrutural) precisa ser incorporada ao modelo, o que por si é uma aproximação de cálculo.

Entre os modelos simples adotados em *Dinâmica das Estruturas*, o mais elementar é o de um grau de liberdade. Nesse modelo, a massa e a rigidez são consideradas de forma pontual, diferentemente das estruturas reais em que essas propriedades são distribuídas ao longo de seus diversos componentes estruturais. Assim, é usual, na idealização desse modelo, estabelecer um coeficiente de mola e uma massa, equivalentes a outro modelo mais elaborado e mais próximo à estrutura real. Ou seja, identificar o coeficiente de mola e a massa de um oscilador simples que tenha movimento análogo ao do ponto mais significativo desse outro modelo, em constituição do denominado *oscilador simples equivalente*. Isso, para que a frequência desse oscilador sirva como estimativa da primeira frequência natural do modelo mais elaborado e/ou o deslocamento máximo desse oscilador (sob uma determinada ação dinâmica) possa ser transferido a esse modelo, para se obter em análise estática, uma estimativa de seus esforços internos máximos.¹³

Coeficiente de mola equivalente já foi adotado no tratamento da ação do rotor desbalanceado da seção anterior, quando então se utilizou a noção de que um coeficiente de rigidez é numericamente igual à força (ou ao momento) que provoca deslocamento unitário (ou rotação unitária) na direção da referida força (ou momento). Assim, para qualquer modelo de estrutura, desde que se determine o deslocamento u (ou a rotação θ) em um ponto e direção de aplicação de determinada força f (ou momento t), como ilustra a [Figura 2-4.1](#), tem-se o coeficiente de rigidez equivalente:

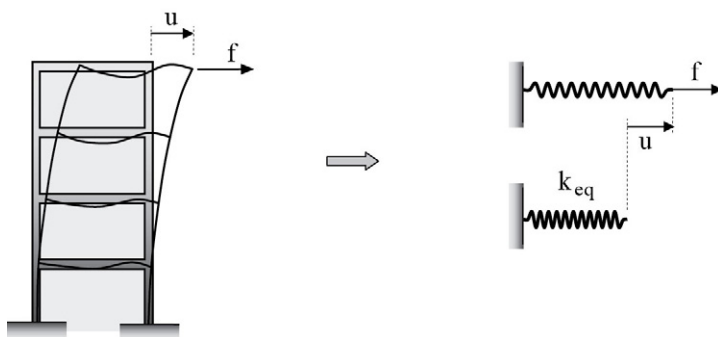


FIGURA 2-4.1 Mola de translação equivalente a um pórtico plano.

$$k_{eq} = f / u \quad (2-4.1)$$

ou:

$$k_{t/eq} = t / \theta \quad (2-4.2)$$

Dessa forma, o cálculo do coeficiente de mola equivalente é simples e não adiciona aproximação às já consideradas no estabelecimento do modelo de estrutura original. Já a determinação de massa equivalente sempre acarreta aproximação de cálculo.

¹³ Posteriormente ficará esclarecido que um sistema de n graus de liberdade tem n frequências naturais e n modos naturais de vibração, e que o oscilador simples equivalente é válido em caso do primeiro modo de vibração ter preponderância na resposta dinâmica.

A seguir, são determinadas as massas equivalentes através do *método de Rayleigh*,¹⁴ que se baseia no princípio da conservação de energia mecânica e no arbítrio de uma aproximação à configuração do sistema. Posteriormente, em casos de frequências naturais conhecidas, essas massas serão obtidas com base nessas frequências e nos coeficientes de mola equivalentes.

2-4.1 Viga em balanço

Considera-se uma viga em balanço de comprimento ℓ e massa m' por unidade de comprimento, sob uma força f aplicada na extremidade livre, como mostrado na parte esquerda da Figura 2-4.2 em que a configuração deformada está representada em tracejado, com escala de deslocamentos exagerada relativamente ao referido comprimento.

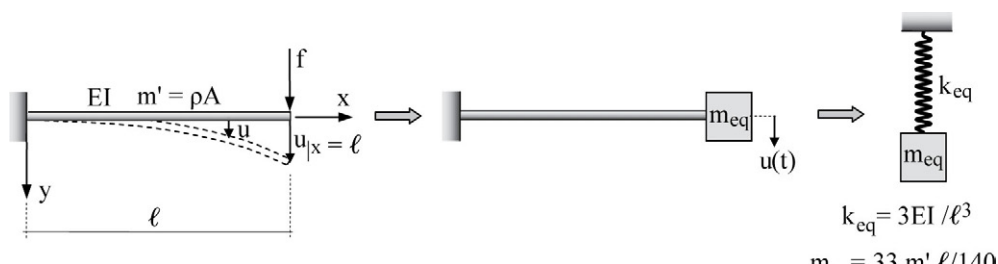


FIGURA 2-4.2 Oscilador simples equivalente à viga em balanço.

De acordo com a *teoria clássica de viga*, tem-se a expressão da deflexão estática do eixo geométrico da viga:¹⁵

$$u = \frac{f}{6EI} (3\ell x^2 - x^3) \quad (2-4.3)$$

onde I é o momento de inércia da seção transversal em relação ao eixo de flexão e EI é o módulo de rigidez à flexão.

Logo, obtém-se:

$$u|_{x=\ell} = \frac{f\ell^3}{3EI} \rightarrow f = \frac{3EI}{\ell^3} u|_{x=\ell} \quad (2-4.4)$$

$$\rightarrow k_{eq} = \frac{3EI}{\ell^3} \quad (2-4.5)$$

¹⁴ John William Strutt (1842-1919), o matemático e físico inglês Lord Rayleigh, apresentou esse método no primeiro volume da obra *The Theory of Sound*, em 1877.

¹⁵ Esse resultado é obtido por integração da equação diferencial da linha elástica, ($d^2u/dx^2 = -M/EI$), com as condições de contorno de deslocamento nulo e rotação nula no engaste.

Além disso, com a força expressa na [Equação 2-4.4](#) substituída na que lhe precede, obtém-se a nova expressão de deflexão:

$$u = \frac{u|_{x=\ell}}{2\ell^3} (3\ell x^2 - x^3) \quad (2-4.6)$$

Com a suposição de que a velocidade tenha lei análoga, escreve-se:

$$\dot{u} = \frac{\dot{u}|_{x=\ell}}{2\ell^3} (3\ell x^2 - x^3) \quad (2-4.7)$$

Chega-se, assim, à seguinte estimativa de energia cinética:

$$E_c = \frac{1}{2} \int_0^\ell (m' \dot{u}^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^\ell m' \left(\frac{\dot{u}|_{x=\ell}}{2\ell^3} (3\ell x^2 - x^3) \right)^2 dx \rightarrow E_c = \frac{33m'\ell}{280} \dot{u}|_{x=\ell}^2 \quad (2-4.8)$$

Finalmente, com a imposição de que um oscilador simples tenha a velocidade $\dot{u}|_{x=\ell}$, obtém-se:

$$\frac{33m'\ell}{280} \dot{u}|_{x=\ell}^2 = \frac{1}{2} m_{eq} \dot{u}|_{x=\ell}^2 \rightarrow m_{eq} = \frac{33}{140} m'\ell \quad (2-4.9)$$

Com essa massa e a rigidez equivalente expressa na [Equação 2-4.5](#), obtém-se a *frequência natural* de vibração por flexão da viga em balanço:¹⁶

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}} = \sqrt{\frac{3EI}{\ell^3} \frac{140}{33m'\ell}} \rightarrow \omega_n = 3,5675 \sqrt{\frac{EI}{m'\ell^4}} \quad (2-4.10)$$

2-4.2 Viga biapoada

No caso de uma viga biapoada de comprimento ℓ , massa m' por unidade de comprimento e sob uma força f aplicada na seção média, como mostra a parte esquerda da [Figura 2-4.3](#), a *teoria clássica de viga* fornece, para $0 \leq x \leq \ell/2$, a expressão de deslocamento transversal:

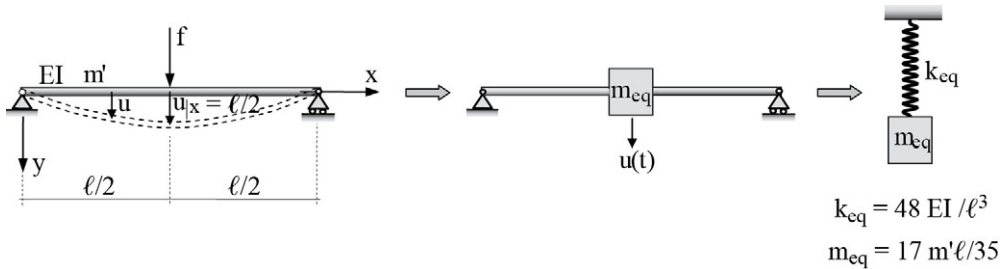


FIGURA 2-4.3 Oscilador simples equivalente à viga biapoada.

$$u = \frac{fx}{48EI} (3\ell^2 - 4x^2) \quad (2-4.11)$$

Logo, obtém-se:

$$u|_{x=\ell/2} = \frac{f\ell^3}{48EI} \rightarrow f = \frac{48EI}{\ell^3} u|_{x=\ell/2} \quad (2-4.12)$$

¹⁶ Esse resultado supera 1,46% o obtido com a *teoria clássica de viga* de fórmula apresentada na [Tabela 2-4.1](#).

$$\rightarrow k_{eq} = \frac{48EI}{\ell^3} \quad (2-4.13)$$

Com a substituição da força expressa na [Equação 2-4.12](#) na equação que lhe precede, chega-se à seguinte expressão de deslocamento:

$$u = \frac{u|_{x=\ell/2}}{\ell^3} (3\ell^2 x - 4x^3) \quad (2-4.14)$$

E com a suposição de que a velocidade tenha lei análoga a essa expressão, escreve-se:

$$\dot{u} = \frac{\dot{u}|_{x=\ell/2}}{\ell^3} (3\ell^2 x - 4x^3) \quad (2-4.15)$$

Assim, chega-se à estimativa de energia cinética:

$$E_c = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\ell/2} (m' \dot{u}^2) dx = \int_0^{\ell/2} m' \left(\frac{\dot{u}|_{x=\ell/2}}{\ell^3} (3\ell^2 x - 4x^3) \right)^2 dx$$

$$\rightarrow E_c = \frac{17m'\ell}{70} \dot{u}|_{x=\ell/2}^2 \quad (2-4.16)$$

Finalmente, com a imposição de que um oscilador simples equivalente tenha a velocidade $\dot{u}|_{x=\ell/2}$, obtém-se a massa equivalente:

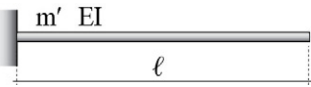
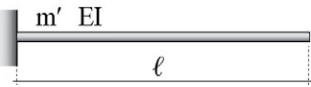



$$\frac{17m'\ell}{70} \dot{u}|_{x=\ell/2}^2 = \frac{1}{2} m_{eq} \dot{u}|_{x=\ell/2}^2 \rightarrow m_{eq} = \frac{17m'\ell}{35} \quad (2-4.17)$$

Logo, com essa massa e a rigidez equivalente expressa na [Equação 2-4.13](#), obtém-se a frequência natural de vibração por flexão da viga biapoada:¹⁷

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}} = \sqrt{\frac{48EI}{\ell^3} \frac{35}{17m'\ell}} \rightarrow \omega_n = 9,9410 \sqrt{\frac{EI}{m'\ell^4}} \quad (2-4.18)$$

2-4.3 Outros casos de vigas

A *teoria clássica de viga* fornece expressões de frequências naturais de vibração por flexão de diversas vigas simples, como as apresentadas na [Tabela 2-4.1](#).¹⁸

Tabela 2-4.1 Frequências naturais fundamentais de flexão de viga	
Vigas	Frequência $\omega_n = a \sqrt{EI/(m'\ell^4)}$
	a
	3,5160
	π^2
	15,418
	22,373

¹⁷ Esse resultado de frequência supera em 0,72% o obtido com a *teoria clássica de viga*.

¹⁸ Essas frequências foram obtidas a partir da equação diferencial de vibração lateral de viga desenvolvida por Euler e são encontradas em Volterra & Zachmanoglou, 1965, seção 4.5B.

Tendo-se a frequência natural de um modelo de estrutura e o coeficiente de mola equivalente k_{eq} , e sabendo-se que a frequência natural do oscilador simples é igual à raiz quadrada da razão desse coeficiente pela massa, obtém-se a massa equivalente:

$$m_{eq} = \frac{k_{eq}}{\omega_n^2} \quad (2-4.19)$$

Essa última equação é útil quando o desenvolvimento com base na equivalência de energia cinética entre o modelo original e o oscilador simples se mostra muito elaborado ou impraticável. Por exemplo, para a equivalência de uma viga biengastada a um oscilador que simule a vibração transversal do ponto central da viga, tem-se, da *teoria clássica de viga*, que uma força estática unitária transversal aplicada nesse ponto provoca o deslocamento $192EI/\ell^3$, que é o coeficiente de mola equivalente. Logo, com esse coeficiente e a frequência natural da referida viga, a [Equação 2-4.19](#) fornece:


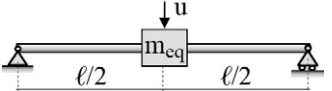
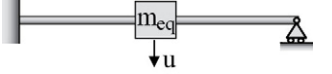
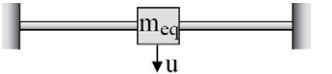
$$m_{eq} = \frac{192EI}{\ell^3} \frac{m'\ell^4}{22,373^2 EI} \rightarrow m_{eq} = 0,38358m'\ell \quad (2-4.20)$$

Ainda em aplicação da referida expressão, no caso de uma viga engastada-apoiada, tem-se que uma força estática unitária aplicada transversalmente no ponto central da viga provoca o deslocamento $109,71EI/\ell^3$. Esse deslocamento é numericamente igual ao coeficiente de mola equivalente, que, com a frequência natural da referida viga, fornece:

$$m_{eq} = \frac{109,71EI}{\ell^3} \frac{m'\ell^4}{15,418^2 EI} \rightarrow m_{eq} = 0,46152m'\ell \quad (2-4.21)$$

Os coeficientes de mola e de massa obtidos anteriormente estão reproduzidos na [Tabela 2-4.2](#), juntamente com os resultados determinados nas Subseções 2-4.1 e 2-4.2.

Tabela 2-4.2 Parâmetros de osciladores simples equivalentes

	k_{eq}	m_{eq}
	$\frac{3 EI}{\ell^3}$	$\frac{33 m'\ell}{140}$
	$\frac{48 EI}{\ell^3}$	$\frac{17 m'\ell}{35}$
	$\frac{768 EI}{7\ell^3}$	$0,46152 m'\ell$
	$\frac{192 EI}{\ell^3}$	$0,46152 m'\ell$

Anteriormente foi desenvolvida equivalência entre a distribuição contínua de massa de algumas vigas e a massa de osciladores simples. A seguir, procura-se estimar a frequência natural de uma viga em flexão que tenha um conjunto de massas discretas. Pode ser, por

exemplo, a viga em balanço mostrada na [Figura 2-4.4](#), que tem I massas concentradas e na qual u_i é a deflexão estática sob o ponto de atuação da i -ésima massa.

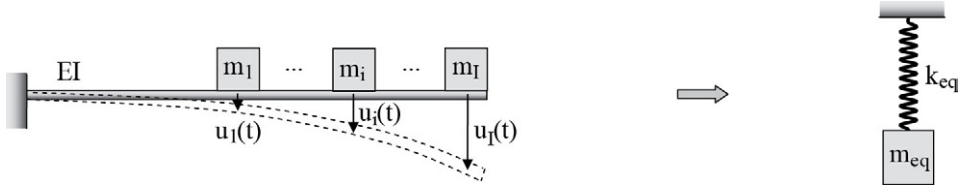


FIGURA 2-4.4 Viga em balanço com I massas concentradas.

Sem considerar a massa da viga, por simplicidade, têm-se a energia potencial elástica máxima e a energia cinética máxima, respectivamente, sob as formas:

$$E_{pe/m\acute{a}x.} = g(m_1 u_1 + \dots m_i u_i + \dots m_I u_I) / 2 \quad (2-4.22a)$$

$$E_{c/m\acute{a}x.} = (m_1 \dot{u}_1^2 + \dots m_i \dot{u}_i^2 + \dots m_I \dot{u}_I^2) / 2 \quad (2-4.22b)$$

E semelhantemente à [Equação 2-2.20](#), considera-se que as massas tenham movimentos harmônicos sincronizados, de maneira que:

$$\dot{u}_i = \omega_n u_i \quad (2-4.23)$$

em que ($i = 1, \dots, I$).

Logo, tendo-se em conta que ($E_{pe/m\acute{a}x.} = E_{c/m\acute{a}x.}$), obtém-se a seguinte estimativa de frequência natural de vibração:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g \sum_{i=1}^I m_i u_i}{\sum_{i=1}^I m_i u_i^2}} \quad (2-4.24)$$

Assim, para um modelo de estrutura com uma ou mais massas concentradas, arbitrando-se a configuração de vibração como sendo a deflexão estática que se obtém com o peso das massas, têm-se os deslocamentos u_i que substituídos na equação anterior fornece ω_n .

EXEMPLO 2-4.1

Para verificar a fórmula anterior, considera-se novamente a viga em balanço representada na [Figura 2-4.2](#), em que se arbitrou lei de velocidade análoga à expressão da deflexão estática e se obteve a massa equivalente de $33m'\ell/140$.

Com o posicionamento dessa massa na referida extremidade, tem-se o deslocamento:

$$\delta = \frac{m_{eq} g \ell^3}{3EI} \rightarrow \delta = \frac{11m'g\ell^4}{140EI}$$

Logo, com base na [Equação 2-4.24](#) obtém-se a frequência natural:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{gm_{eq}\delta}{m_{eq}\delta^2}} = \sqrt{\frac{g}{\delta}} \rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{140EI}{11m'\ell^4}} \rightarrow \omega_n = 3,5675 \sqrt{\frac{EI}{m'\ell^4}}$$

Este foi o resultado obtido na Subseção 2-4.1.

EXEMPLO 2-4.2

Um reservatório semiesférico para água é suportado por uma coluna vazada como esquematizado na parte esquerda da Figura E2-4.2. A estrutura é em concreto de módulo de elasticidade de 27GPa e massa específica de 2.700 kg/m³. Em idealização como oscilador simples, determina-se o período fundamental de vibração de flexão para os casos do reservatório cheio e do reservatório vazio.

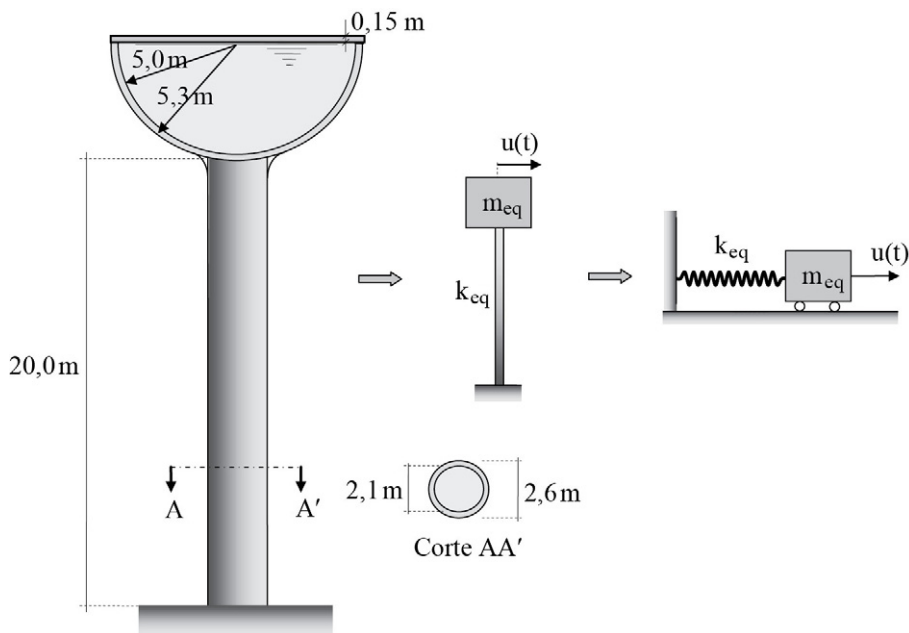


FIGURA E2-4.2 Reservatório idealizado como oscilador simples.

Massa do concreto da parte semiesférica do reservatório:

$$m_{\text{esf.}} = \frac{4\pi}{6}(r_e^3 - r_i^3)\rho_{\text{concr.}} = \frac{4\pi}{6}(5,3^3 - 5,0^3)2,7 \cdot 10^3 = 135,02 \cdot 10^3 \text{ kg}$$

Massa do concreto da tampa da parte semiesférica:

$$m_{\text{tampa}} = \pi r_e^2 e \rho_{\text{concr.}} = \pi 5,3^2 \cdot 0,15 \cdot 2,7 \cdot 10^3 = 35,740 \cdot 10^3 \text{ kg}$$

Massa da água:

$$m_{\text{água}} = \frac{4\pi}{6}r_i^3 \rho_{\text{água}} = \frac{4\pi}{6}5^3 \cdot 10^3 = 261,8 \cdot 10^3 \text{ kg}$$

Área da seção transversal da coluna:

$$A_{\text{coluna}} = \frac{\pi}{4}(d_e^2 - d_i^2) = \frac{\pi}{4}(2,6^2 - 2,1^2) = 1,8457 \text{ m}^2$$

Massa por unidade de comprimento da coluna:

$$m'_{\text{coluna}} = A_{\text{coluna}} \rho_{\text{concr.}} = 1,8457 \cdot 2700 = 4983,4 \text{ kg/m}$$

Massa equivalente à coluna (Equação 2-4.9):

$$m_{eq, coluna} = 33m'_{coluna} \ell / 140 = 33 \cdot 4983,4 \cdot 20 / 140 = 23,493 \cdot 10^3 \text{ kg}$$

Momento de inércia principal da seção transversal da coluna:

$$I = \frac{\pi}{64} (d_e^4 - d_i^4) = \frac{\pi}{64} (2,6^4 - 2,1^4) = 1,2885 \text{ m}^4$$

Coefficiente de rigidez equivalente à coluna (Equação 2-4.5):

$$k_{eq} = \frac{3EI}{\ell^3} = \frac{3 \cdot 2,7 \cdot 10^{10} \cdot 1,2885}{20^3} = 130,46 \cdot 10^5 \text{ N/m}$$

Massa equivalente ao reservatório cheio:

$$m_{cheio} = m_{esf.} + m_{tampa} + m_{água} + m_{eq, coluna}$$

$$m_{cheio} = (135,02 + 35,74 + 261,8 + 23,493)10^3 = 456,05 \cdot 10^3 \text{ kg}$$

Massa equivalente ao reservatório vazio:

$$m_{vazio} = m_{cheio} - m_{água} = (456,05 - 261,8)10^3 = 194,25 \cdot 10^3 \text{ kg}$$

Período natural de vibração do reservatório cheio:

$$T_{cheio} = 2\pi \sqrt{\frac{m_{cheio}}{k_{eq}}} = 2\pi \sqrt{\frac{456,05 \cdot 10^3}{130,46 \cdot 10^5}} \rightarrow T_{cheio} = 1,175 \text{ s}$$

Período natural de vibração do reservatório vazio:

$$T_{vazio} = 2\pi \sqrt{\frac{m_{vazio}}{k_{eq}}} = 2\pi \sqrt{\frac{194,25 \cdot 10^3}{130,46 \cdot 10^5}} \rightarrow T_{vazio} = 0,767 \text{ s}$$

Na idealização simplista anterior não foi considerada a excentricidade do centro de massa da parte semiesférica em relação à extremidade superior da coluna e nem a inércia rotacional dessa parte. Em consideração conservativa da referida excentricidade, acrescentou-se dois terços do raio da parte semiesférica ao comprimento elástico da coluna, o que conduziu a períodos naturais 27% maiores do que os anteriormente encontrados.

EXEMPLO 2-4.3

Uma massa M cai, sem ricochetejar, de uma altura h no meio de uma viga biapoada de vão ℓ , módulo de rigidez à flexão EI e massa m' por unidade de comprimento, como ilustra a parte esquerda da Figura E2-4.3. Determina-se a frequência de vibração e a deflexão máxima da viga, após o impacto e a partir de sua configuração não deformada.

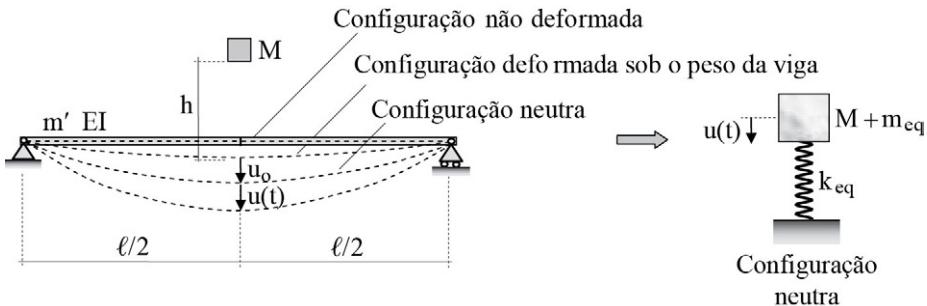


FIGURA E2-4.3 Viga biapoada sob o impacto da massa M .

A massa M atinge a viga na configuração deformada de peso próprio, com velocidade v obtida igualando-se a sua energia cinética no instante do impacto à energia potencial gravitacional da massa na altura h , em relação a essa configuração:

$$Mv^2/2 = Mgh \rightarrow v = \sqrt{2gh}$$

Com a consideração de que a referida massa fique aderida à massa equivalente da viga ($m_{eq} = 17m'\ell/35$) a partir do instante do impacto, obtém-se a velocidade inicial v_o com base na igualdade de quantidade de movimento neste instante:

$$Mv = (M + m_{eq})v_o \rightarrow v_o = \frac{M\sqrt{2gh}}{M + 17m'\ell/35} = \frac{35M\sqrt{2gh}}{35M + 17m'\ell}$$

Além disso, idealiza-se o sistema físico como um oscilador simples de massa M agrupada à massa equivalente da viga, e de coeficiente de rigidez expresso na [Equação 2-4.13](#), $k_{eq} = 48EI/\ell^3$. Logo, tem-se a frequência natural:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{M + m_{eq}}} \rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{48EI/\ell^3}{M + 17m'\ell/35}} \rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{1680EI}{\ell^3(35M + 17m'\ell)}}$$

Considera-se, como instante inicial, o instante em que a massa atinge a viga em sua configuração de peso próprio. E sendo a amplitude de vibração medida a partir da configuração neutra em que atua o peso próprio da viga e da massa M , tem-se o deslocamento inicial:

$$u_o = -\frac{Mg}{k_{eq}} \rightarrow u_o = -\frac{Mg\ell^3}{48EI}$$

Assim, a deflexão máxima (medida a partir da configuração não deformada) é a soma da parcela devida ao peso próprio da viga (obtida com a *teoria clássica de viga*), com a parcela devida ao peso Mg e a amplitude expressa na [Equação 2-2.12](#), isto é:

$$u_{máx.} = \frac{5m'g\ell^4}{384EI} + \frac{Mg\ell^3}{48EI} + \sqrt{u_o^2 + (v_o/\omega_n)^2}$$

$$\rightarrow u_{máx.} = \frac{5m'g\ell^4}{384EI} + \frac{Mg\ell^3}{48EI} + \sqrt{\left(-\frac{Mg\ell^3}{48EI}\right)^2 + \left(\frac{35M\sqrt{2gh}}{35M + 17m'\ell}\right)^2 \frac{\ell^3(35M + 17m'\ell)}{1680EI}}$$

2-5 ASSOCIAÇÕES DE MOLAS

Com o conceito de coeficiente de rigidez, barras são idealizadas como molas e, por vezes, conjuntos de barras podem ser modelados como associações de molas, para as quais são determinados coeficientes de mola equivalentes. Essas associações são aqui consideradas em *paralelo*, em *série* e em *disposições inclinadas*. A mola equivalente é útil em idealização de um oscilador simples equivalente.

Trata-se de *associação em paralelo* quando os deslocamentos das molas são iguais entre si e diz-se *associação em série* quando os deslocamentos se somam. E o coeficiente de mola equivalente a uma associação de molas pode ser obtido diretamente impondo-se que o deslocamento na mola equivalente seja igual ao deslocamento da associação ou, de

forma indireta, impondo-se que a associação e a mola equivalente tenham a mesma energia potencial elástica. Esses procedimentos estão exemplificados a seguir.

EXEMPLO 2-5.1

Determina-se o coeficiente de rigidez equivalente à associação de molas mostrada na parte esquerda da [Figura E2-5.1](#), em que as barras horizontais são indeformáveis e as molas têm apenas deslocamentos na direção vertical, que a direção da força externa.

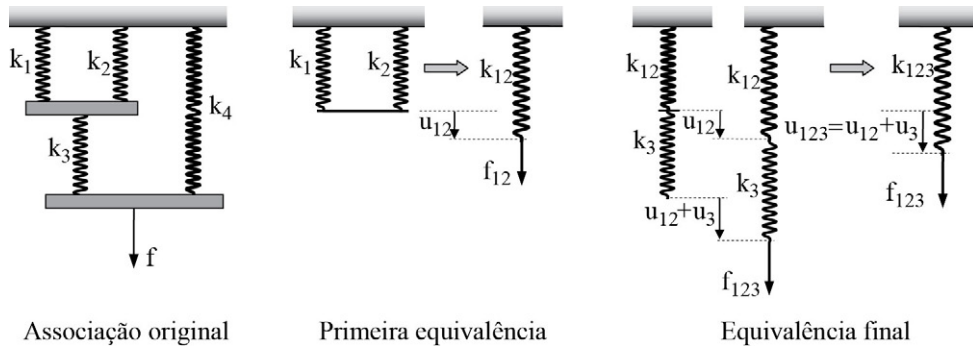


FIGURA E2-5.1 Associação de molas e correspondentes equivalências.

Inicialmente busca-se a equivalência às molas de coeficientes k_1 e k_2 ligadas em paralelo, que sob a aplicação de uma força f_{12} têm o deslocamento u_{12} indicado na parte intermediária da mesma figura. Logo, para que a correspondente mola equivalente tenha esse deslocamento, esta deve ter o coeficiente $(k_{12} = k_1 + k_2)$. E, em generalização à associação de n molas em paralelas, escreve-se o coeficiente da mola equivalente:

$$k_{eq} = \sum_{i=1}^n k_i$$

Com a equivalência anterior, recai-se nas molas de coeficiente k_{12} e k_3 ligadas em série, que sob aplicação de uma força f_{123} têm a intensidade de deslocamento $(u_{123} = u_{12} + u_3)$ indicada na parte direita da referida figura, cujas parcelas são $(u_{12} = f_{123} / k_{12})$ e $(u_3 = f_{123} / k_3)$.

Logo, deve-se ter:

$$\begin{aligned} \frac{f_{123}}{k_{123}} = u_{123} = u_{12} + u_3 &\rightarrow \frac{f_{123}}{k_{123}} = \frac{f_{123}}{k_{12}} + \frac{f_{123}}{k_3} = f_{123} \left(\frac{1}{k_{12}} + \frac{1}{k_3} \right) \\ &\rightarrow \frac{1}{k_{123}} = \frac{k_3 + k_{12}}{k_{12} \cdot k_3} \rightarrow k_{123} = \frac{(k_1 + k_2)k_3}{k_1 + k_2 + k_3} \end{aligned}$$

Assim, em generalização ao caso de n molas em série, tem-se o coeficiente equivalente:

$$k_{eq} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n 1/k_i}$$

Finalmente, a mola equivalente à associação em paralelo das molas de coeficientes k_{123} e k_4 , que é a mola equivalente final, tem, de acordo com a primeira conclusão deste exemplo, o coeficiente:

$$k_{eq} = k_{123} + k_4 \rightarrow k_{eq} = \frac{(k_1 + k_2)k_3}{k_1 + k_2 + k_3} + k_4$$

EXEMPLO 2-5.2

Idem para a associação com molas inclinadas mostrada na parte esquerda da [Figura E2-5.2](#).

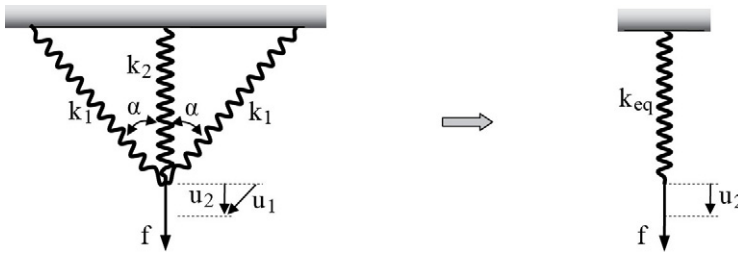


FIGURA E2-5.2 Associação com molas inclinadas e correspondente mola equivalente.

A um deslocamento u_2 do ponto de aplicação da força f corresponde o deslocamento u_1 na direção das molas inclinadas e, com a condição de que os deslocamentos sejam pequenos, considera-se ($u_2 = u_1 \cos \alpha$).

Logo, para determinar a mola equivalente basta impor que esta tenha, quando da aplicação da força, o deslocamento u_2 , o que pode ser feito através da seguinte igualdade de energia potencial elástica:

$$E_{pe} = 2 \cdot \frac{1}{2} k_1 u_1^2 + \frac{1}{2} k_2 u_2^2 = \frac{1}{2} k_{eq} u_2^2 \rightarrow k_{eq} = \frac{2 k_1 u_1^2}{u_2^2} + k_2$$

Finalmente, como ($u_2 = u_1 \cos \alpha$), obtém-se o coeficiente de mola equivalente:

$$k_{eq} = \frac{2k_1}{\cos^2 \alpha} + k_2$$

EXEMPLO 2-5.3

Idem para a associação de molas da parte esquerda da [Figura E2-5.3](#).

Inicialmente, com base na solução do exemplo anterior e com as notações da parte intermediária da figura anterior, escreve-se o coeficiente de rigidez equivalente às duas molas inclinadas mostradas: ($k_{11} = 2k_1/\cos^2 \alpha$).

Logo, como esquematizado na parte direita da mesma figura, recai-se na associação de molas em série que, de acordo com o Exemplo 2-5.1, tem o coeficiente de rigidez equivalente:

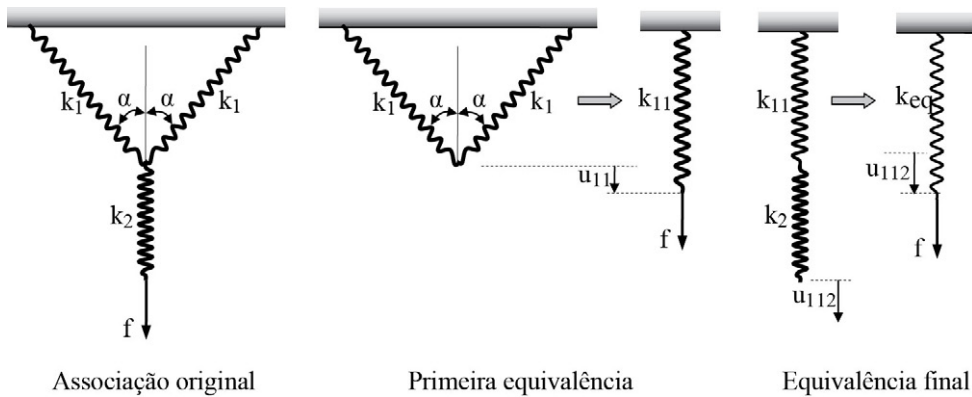


FIGURA E2-5.3 Associação com molas inclinadas e correspondentes equivalências.

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{\cos^2 \alpha}{2k_1} + \frac{1}{k_2} \rightarrow k_{eq} = \frac{2k_1 k_2}{2k_1 + k_2 \cos^2 \alpha}$$

EXEMPLO 2-5.4

Uma haste rígida de massa m pode pivotar em torno de sua extremidade superior e é conectada transversalmente a três molas de translação, como mostra a parte esquerda da Figura E2-5.4. Em caso de pequenas oscilações, determinam-se o coeficiente de rigidez equivalente para uma mola de translação conectada à extremidade inferior da haste e o coeficiente de rigidez equivalente para uma mola de torção ligada à sua extremidade superior, como indicado na mesma figura. Com esse último coeficiente, escrevem-se a equação de equilíbrio dinâmico e a frequência natural.

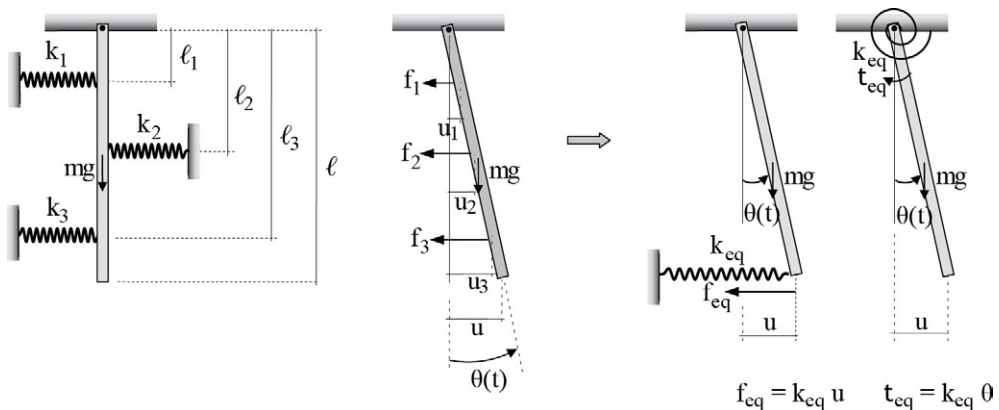


FIGURA E2-5.4 Pêndulo conectado a três molas horizontais e duas equivalências.

Para determinar a equivalência no caso da mola de translação ligada à extremidade inferior da haste, escreve-se a equivalência de momento nulo em relação ao ponto de sustentação da haste:

$$f_{eq}\ell = \sum_{i=1}^3 f_i \ell_i \rightarrow k_{eq}u\ell = \sum_{i=1}^3 k_i u_i \ell_i$$

Com ângulo $\theta(t)$ pequeno, tem-se:

$$\theta = \frac{u}{\ell} = \frac{u_i}{\ell_i} \rightarrow u_i = \frac{\ell_i u}{\ell}$$

Logo, a partir das duas últimas equações, obtém-se o coeficiente de mola equivalente:

$$k_{eq}u\ell = \sum_{i=1}^3 k_i \frac{\ell_i^2 u}{\ell} \rightarrow k_{eq} = \sum_{i=1}^3 k_i \left(\frac{\ell_i}{\ell}\right)^2$$

Já no caso da mola de torção, escreve-se a seguinte equivalência de momento de força:

$$t_{eq} = \sum_{i=1}^3 f_i \ell_i \rightarrow k_{eq}\theta = \sum_{i=1}^3 k_i u_i \ell_i$$

Além disso, da segunda das equações deste exemplo tem-se ($u_i = \ell_i \theta$).

Assim, dessas duas últimas equações, obtém-se o coeficiente de rigidez equivalente:

$$k_{eq}\theta = \sum_{i=1}^3 k_i \ell_i^2 \theta \rightarrow k_{eq} = \sum_{i=1}^3 k_i \ell_i^2$$

Semelhantemente ao desenvolvido na Seção 1-5.5 e com a simplificação de pequenas rotações, escreve-se a equação de equilíbrio dinâmico:

$$\frac{m}{3} \ell^2 \ddot{\theta} + k_{eq} \theta + mg \frac{\ell}{2} \sin \theta = 0 \rightarrow \frac{m \ell^2}{3} \ddot{\theta} + \left(k_{eq} + \frac{mg \ell}{2} \right) \theta = 0$$

Essa última equação tem a mesma forma que a expressa na [Equação 2-2.21a](#) que, por conveniência, se repete: $I_o \ddot{\theta}(t) + k_t \theta(t) = 0$. Logo, tem-se a frequência natural angular:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq} + mg \ell / 2}{m \ell^2 / 3}}$$

As contribuições mais relevantes deste capítulo são a caracterização da frequência natural e do período natural do oscilador simples, a resolução da equação de movimento forçado desse oscilador não amortecido e a apresentação dos conceitos de amplificação dinâmica e frequência ressonante. Esses conceitos serão estendidos ao oscilador amortecido no próximo capítulo. Além disso, cabe ressaltar a importância do conceito de oscilador simples equivalente, útil em análise preliminar de ampla variedade de sistemas estruturais.

2-6 EXERCÍCIOS PROPOSTOS

2-6.1 Que alteração deve ser feita à massa de um oscilador simples para que a frequência natural se reduza em um terço?

- 2-6.2** Após o desligamento do cabo que sustenta a massa na extremidade da viga esquematizada na Figura 2-6.2a obteve-se a oscilação dessa extremidade como representado na Figura 2-6.2b. Com o uso de uma escala, determine o período natural. Determine, também, a frequência natural e a massa da viga.

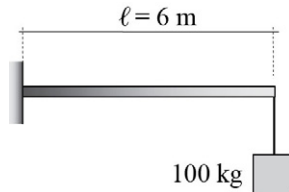


FIGURA 2-6.2a Viga em balanço.

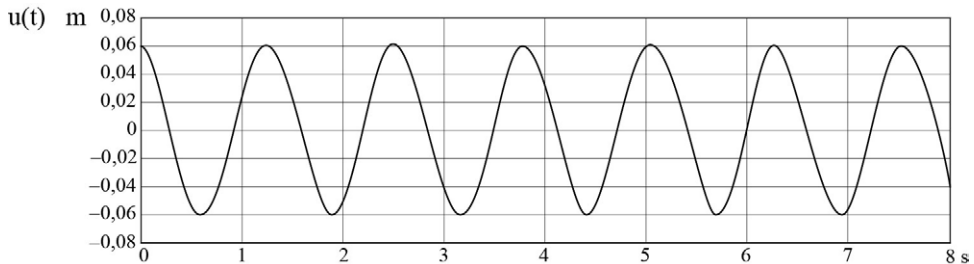


FIGURA 2-6.2b Registro de vibração livre.

- 2-6.3** Em um oscilador simples como o representado na Figura 2-1.1, o deslocamento estático é igual a 0,05 m. Determine a correspondente frequência natural cíclica.

- 2-6.4** A viga biapoiada representada na Figura 2-6.4 é de madeira de módulo de elasticidade igual a 10 GPa e densidade de 700 kg/m³. Pede-se o oscilador simples equivalente correspondente ao deslocamento transversal da seção média, a frequência natural angular, o período natural e o histórico da vibração

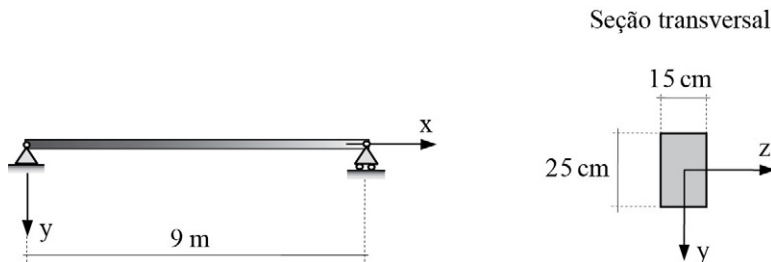


FIGURA 2-6.4 Viga biapoiada.

livre devida às condições iniciais ($u_0 = 0,03 \text{ m}$) e ($v_0 = 0,5 \text{ m/s}$) e na duração do primeiro segundo.

- 2-6.5** As vigas representadas na [Figura 2-6.5](#) são de concreto, com $25 \times 40 \text{ cm}^2$ de seção reta, ($E = 21 \text{ GPa}$) e ($\gamma = 25 \text{ kN/m}^3$). Em idealizações de osciladores simples, determine as frequências naturais em rad/s e em hertz, assim como os períodos naturais. Calcule os percentuais das diferenças dessas frequências em relação a resultados da *teoria clássica de viga* cujas fórmulas estão apresentadas na [Tabela 2-4.1](#).

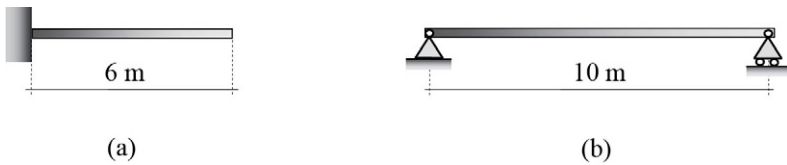


FIGURA 2-6.5 Vigas em balanço e viga biapoiada.

- 2-6.6** A [Figura 2-6.6](#) mostra uma viga biapoiada com um balanço em cuja extremidade há uma massa concentrada. Desconsiderando a massa da viga, determine a correspondente frequência natural.

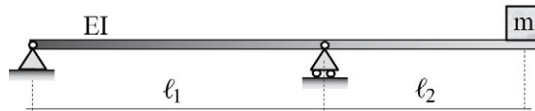


FIGURA 2-6.6 Viga biapoiada com balanço.

- 2-6.7** Determine as frequências naturais dos sistemas representados na [Figura 2-6.7](#).

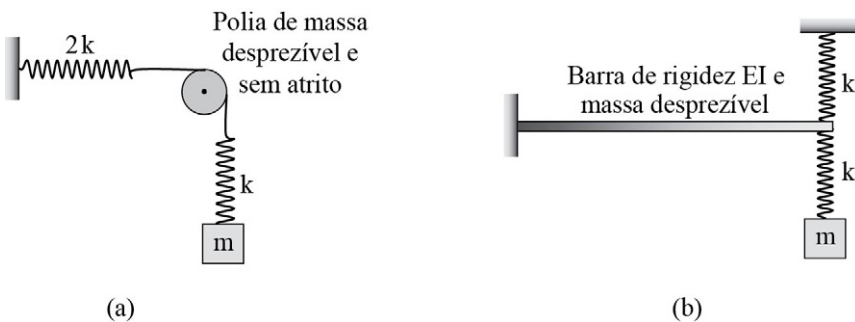


FIGURA 2-6.7 Sistemas mecânicos com molas.

- 2-6.8** Na [Figura 2-6.8](#) estão representadas três vigas de comprimento ℓ , massa m' por unidade de comprimento, módulo de flexão EI e com massas e molas concentradas como mostrado. Para idealizações simplistas com o grau de liberdade indicado e considerando que sejam válidas as massas equivalentes expressas nas Equações 2-4.9 e 2-4.17, pede-se determinar os correspondentes períodos naturais de vibração.

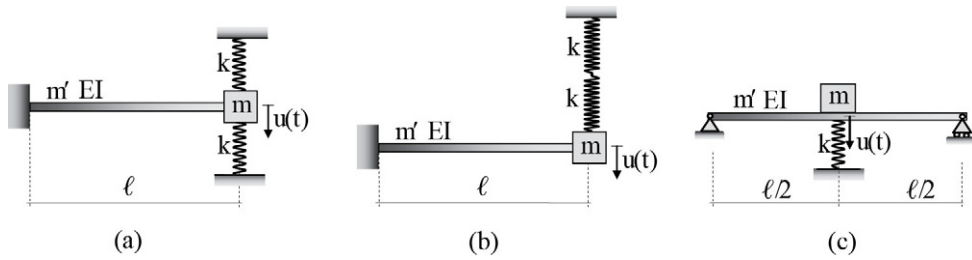


FIGURA 2-6.8 Vigas com apoios elásticos.

- 2-6.9** A [Figura 2-6.9](#) mostra um cilindro que pode se deslocar por rotação, sem deslizamento sobre uma superfície horizontal, com o seu eixo ligado a um anteparo vertical através de uma mola. Para o caso de pequenas rotações, pede-se a equação de movimento em termos do deslocamento indicado e a frequência natural do sistema.

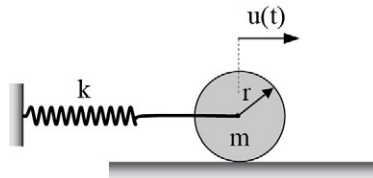


FIGURA 2-6.9 Sistema mecânico com mola e rolete.

- 2-6.10** A viga representada na [Figura 2-6.10](#) tem massa m' por unidade de comprimento e é considerada rígida. Para o caso de pequenas rotações, obtenha a equação de movimento e a frequência natural do sistema.

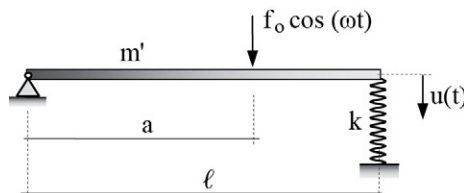


FIGURA 2-6.10 Viga com um apoio elástico.

- 2-6.11** Considere que o pêndulo de torção que foi representado na Figura 1-5.7 tenha eixo e disco de mesma massa específica ρ . Com a suposição de que a velocidade angular ao longo desse eixo seja de lei análoga à do ângulo de torção sob torque aplicado estaticamente na extremidade inferior, determine a frequência natural.
- 2-6.12** Idem quanto à torção do sistema constituído por um disco rígido fixado a um eixo biengastado e de módulo de elasticidade transversal G , como mostra a Figura 2-6.12.

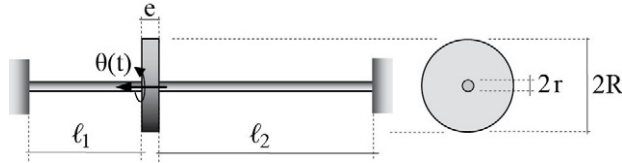


FIGURA 2-6.12 Eixo biengastado sob torção.

- 2-6.13** Um equipamento rotativo de 100 kg foi montado no centro de uma base de quatro molas em paralelo de ($k = 10^5$ N/m) por mola. Em operação desse equipamento com 360 rotações por minuto, foi medida a amplitude de oscilação vertical de 2 mm. Qual é a amplitude da força harmônica de excitação?
- 2-6.14** Determine os coeficientes de rigidez equivalentes às associações de molas mostradas na Figura 2-6.14, em que as barras horizontais são indeformáveis e a barra da terceira associação sofre rotação pequena.

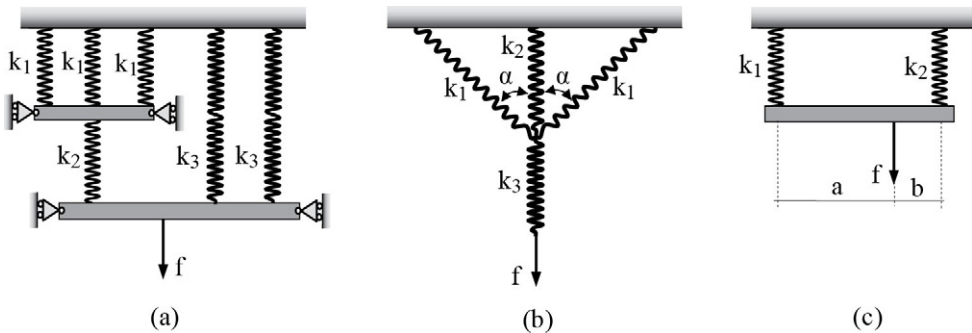


FIGURA 2-6.14 Associações de molas.

- 2-6.15** Determine a frequência natural do sistema representado na Figura 2-6.15.

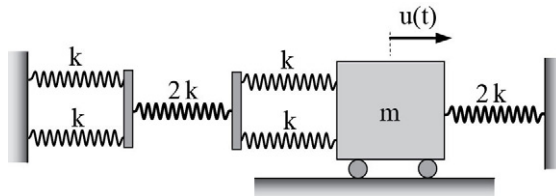


FIGURA 2-6.15 Sistema de um grau de liberdade.

- 2-6.16** Determine um novo diâmetro interno para a coluna vazada do reservatório semiesférico esquematizado na figura do Exemplo 2-4.2, de forma que o período natural de vibração do reservatório cheio seja 1,1s.

2-7 QUESTÕES PARA REFLEXÃO

- 2-7.1** O que é um *oscilador simples não amortecido*? Como exemplificar essa idealização a partir de um sistema físico?
- 2-7.2** Por que o trabalho realizado por uma força elástica (linear), como também por uma força de inércia, é nulo em um ciclo de oscilação livre?
- 2-7.3** Qual é a diferença entre *vibração livre* e *vibração forçada*? *Harmônica* e *não harmônica*? *Amortecida* e *não amortecida*?
- 2-7.4** Por que estudar vibração não amortecida se os sistemas reais são amortecidos?
- 2-7.5** O que é *frequência natural* de um sistema mecânico?
- 2-7.6** Por que não se costuma introduzir a deflexão estática na equação de movimento de oscilador simples? Como se altera a correspondente frequência natural? Essa frequência depende de condições iniciais?
- 2-7.7** O que significam *amplitude* e *ângulo de fase*, em vibração livre não amortecida? E por que as soluções de deslocamento, de velocidade e de aceleração são defasadas entre si?
- 2-7.8** O que é *força harmônica*? Por que esse tipo de força é importante em *Dinâmica das Estruturas*?
- 2-7.9** Como considerar em análise dinâmica de estrutura o desbalanceamento de uma máquina rotativa fixada à estrutura?
- 2-7.10** O que é *força centrífuga*? Essa força é real? Por quê?
- 2-7.11** O que é *fator de amplificação dinâmica* em vibração livre não amortecida? E *ressonância*? Por que e como evitar a ocorrência desse fenômeno?
- 2-7.12** O que é um *oscilador simples equivalente*? Qual é a utilidade desse oscilador? Como calcular o coeficiente de mola equivalente em casos simples? E a massa equivalente?
- 2-7.13** Por que a deflexão estática de um sistema linear não tem efeito no coeficiente de mola equivalente desse sistema?
- 2-7.14** Qual é a diferença entre *associação de molas em série* e *associação de molas em paralelo*? Como determinar os respectivos coeficientes de mola equivalente?



CAPÍTULO 3

Oscilador Simples Amortecido

POR QUE E COMO É DESENVOLVIDO O ESTUDO DO OSCILADOR SIMPLES AMORTECIDO?

No capítulo anterior foi estudado o oscilador simples não amortecido em que a vibração persiste depois de cessada a ação externa, por ser um *sistema conservativo*. Essa é uma idealização simplista, uma vez que em vibração de estrutura sempre há dissipação de energia, cujo fenômeno é denominado *amortecimento*. Esse fenômeno é complexo, envolve geração (devido ao atrito interno ao material, nos aparelhos de apoio e nas ligações entre os componentes estruturais) e irradiação de calor, como também depende da interação com o meio circundante, da presença humana na estrutura, de materiais não estruturais e de eventuais dispositivos fixados à estrutura com a finalidade precípua de dissipar energia. Com a incorporação desse fenômeno ao modelo massa-mola, este passa a ser um sistema não conservativo chamado de *oscilador simples amortecido*.

Quanto à determinação da resposta dinâmica de uma estrutura, esta pode ser no *domínio do tempo* ou no *domínio da frequência*. Em análise no primeiro domínio, a variável temporal é mantida no decorrer de toda a análise e, no segundo domínio, essa variável é substituída pela frequência em parte da análise. Os métodos de análise no domínio do tempo são mais intuitivos e simples, principalmente em caso do denominado *amortecimento viscoso*. Já a análise através do domínio da frequência é mais elaborada, e a resposta da estrutura só se torna aparente ao final, em obtenção completa da solução, como será mostrado no Capítulo 7. Entretanto, essa análise tem importância devido ao elegante e compacto formalismo em álgebra complexa, e à adaptabilidade ao trato de propriedades do sistema na forma complexa, como é o caso do chamado *amortecimento estrutural*.

O propósito deste capítulo é detalhar a análise no domínio do tempo do oscilador simples de *amortecimento viscoso*, o que é de grande importância ao desenvolvimento da análise de sistema com mais de um grau de liberdade e em prática de engenharia. Para isso, as seções do presente capítulo estão estruturadas com os seguintes objetivos específicos:

- 3-1** Fornecer esclarecimentos iniciais quanto às ações externas determinísticas e à idealização da dissipação de energia.
- 3-2** Apresentar a equação de movimento do *oscilador simples de amortecimento viscoso* em vibração forçada.
- 3-3** Tratar a vibração livre, em caracterização dos osciladores simples criticamente amortecidos, superamortecidos e subamortecidos viscosos. Além disso, determinar a resposta de vibração livre do oscilador subamortecido, com apresentação do importante conceito de *razão de amortecimento*.
- 3-4** Obter, em notação trigonométrica, a resposta do oscilador simples subamortecido viscoso sob força harmônica, com apresentação dos conceitos de *respostas em regime transiente e permanente, fator de amplificação dinâmica e ângulo de fase*.
- 3-5** Descrever os principais ensaios dinâmicos de mensuração do *amortecimento viscoso* em sistemas físicos, a saber: os métodos *do decremento logarítmico, da meia amplitude e da meia potência*. Além disso, fornecer valores usuais do *amortecimento viscoso*.
- 3-6** Apresentar, em notação trigonométrica, a *série de Fourier* de função periódica e obter a resposta permanente de oscilador simples subamortecido viscoso a uma força periódica.
- 3-7** Desenvolver procedimentos incrementais de determinação da resposta do oscilador simples subamortecido viscoso sob força aperiódica. Isso com a *Integral de Duhamel*, em *resolução por segmentos lineares da ação externa* e com os seguintes métodos de integração: *diferença finita central, Newmark de aceleração média* e *Wilson θ* . Esses métodos são detalhados para os comportamentos lineares e não lineares.
- 3-8** Tratar o controle de transmissão de vibrações do oscilador simples para a sua base, como também dessa base para o oscilador.
- 3-9** Sugerir exercícios para resolução.
- 3-10** Propor questões para reflexão.

Acrescenta-se que este capítulo é fundamental à análise de modelos de multigráus de liberdade, em especial ao desenvolvimento do *método de superposição modal* e dos *métodos de integração numérica direta* de sistemas de equações de movimento, todos integrantes do Capítulo 6. É também essencial à *análise sísmica de estruturas* desenvolvida no Capítulo 8.

3-1 ESCLARECIMENTOS INICIAIS

As *ações determinísticas* foram definidas como tendo magnitudes, posições, direções e/ou sentidos funções do tempo conhecidas, e as *ações aleatórias*, como tratadas de forma probabilística. Embora as ações atuantes nas estruturas costumem ser aleatórias, é usual estimar ações determinísticas correlatas às aleatórias, por ser mais simples uma análise dinâmica determinística. E essa análise requer a resolução das equações de movimento de um modelo de estrutura, que no caso do oscilador simples amortecido tem a forma conceitual:

$$\ddot{f}_{in}(t) + f_a(t) + f_{ex}(t) = f(t) \quad (3-1.1)$$

onde $f_{in}(t)$, $f_a(t)$ e $f_{ex}(t)$ são, respectivamente, as *forças de inércia, amortecimento e (resistiva) elástica*, todas internas ao sistema, e $f(t)$ é a força externa que expressa a *ação*

dinâmica.¹ As forças de inércia e elástica foram esclarecidas e utilizadas nos capítulos anteriores. Seguidamente são apresentadas informações quanto à força externa dinâmica e à força de amortecimento.

3-1.1 Forças externas

A equação de movimento do oscilador simples é diferencial de segunda ordem e, como tal, apresenta dificuldade de resolução analítica em caso de forças externas determinísticas irregulares. Além do que, essas forças costumam oferecer dificuldade de definição, a menos que sejam especificadas em códigos normativos de projeto ou em catálogos de equipamentos. Para simplificar a questão, tais forças são classificadas, e têm métodos de determinação de resposta estrutural para cada um de seus tipos.

As forças externas podem ser *periódicas* ou *aperiódicas*. Contudo, de forma mais detalhada, essas forças são classificadas em *harmônicas*, *periódicas (arbitrárias)*, *impulsivas* e *aperiódicas (arbitrárias)*, como ilustra a [Figura 3-1.1](#).

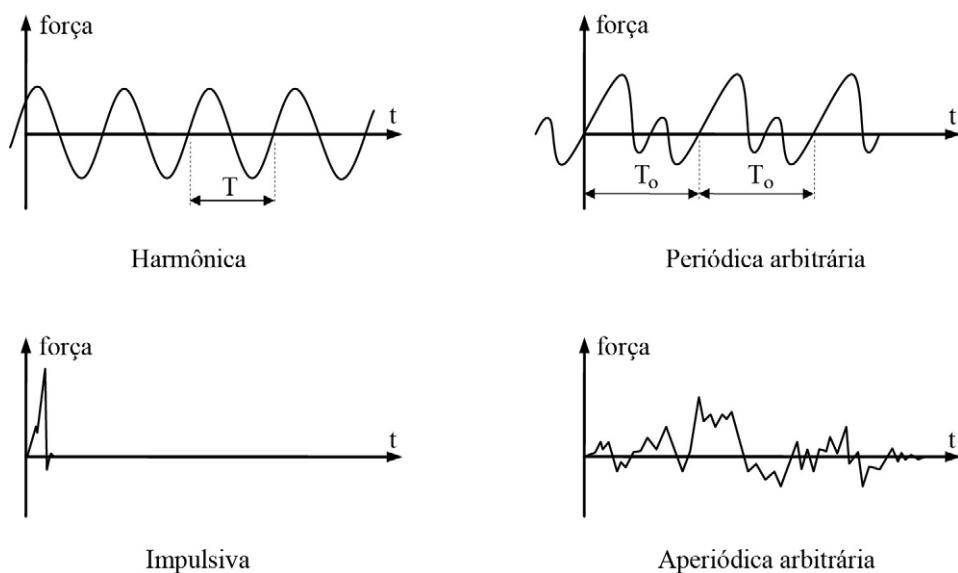
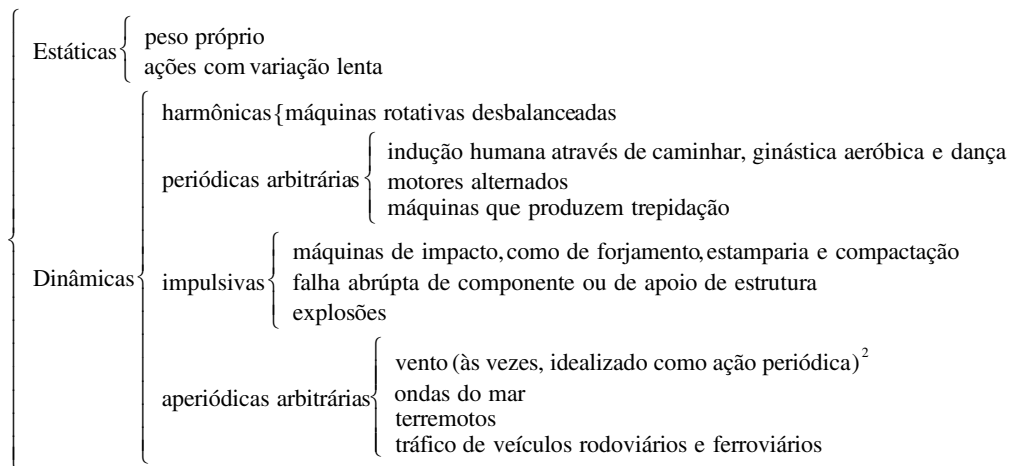


FIGURA 3-1.1 Forças dinâmicas.

As *forças harmônicas* são expressas por cosseno ou por seno, com ou sem ângulo de fase. As *periódicas*, que incluem as harmônicas como caso particular, atuam indefinidamente e têm configurações que se repetem em iguais espaçamentos de tempo, chamados de *período*. As *forças impulsivas* têm a característica de ser de grande intensidade e de curta duração (como de fração de segundo) e as *aperiódicas (arbitrárias)* são as que variam de forma arbitrária no tempo, sem ser de curta duração.

¹ O termo *ação dinâmica* é mais abrangente do que *força dinâmica*, porque inclui a prescrição de movimento de base ou suporte de estrutura (como em caso de sismo), movimento este que pode ter substituído por força dinâmica equivalente.

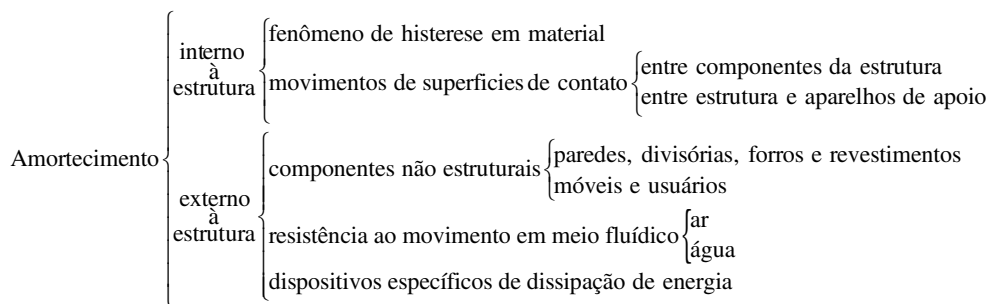
O esquema a seguir apresenta as principais fontes de forças externas em estruturas.



3-1.2 Amortecimento

Dissipação de energia ocorre em todo sistema mecânico oscilatório, com o consequente decaimento de vibração livre ou atenuação dos picos de deslocamento em vibração forçada. Essa dissipação é útil quando a vibração é indesejável, e é mais relevante quando a estrutura oscila próxima à ressonância.

O conjunto dos mecanismos dessa dissipação é genericamente chamado de *amortecimento*, suas causas são complexas e associadas às características da estrutura, ao meio circundante e aos elementos não estruturais agregados à mesma, como esquematizado a seguir.³



² Em edificações esbeltas, a ação do vento em sua própria direção costuma ser idealizada em uma parcela correspondente ao valor médio, tratada de forma estática, e uma parcela flutuante devida às golfadas do vento, com a suposição de validade do princípio da superposição dos esforços. A norma ABNT NBR-6123 (1988), *Forças Devidas ao Vento em Edificações*, sugere desconsiderar a parcela flutuante do vento em edificações de período fundamental igual ou inferior a um segundo, quando então a ação do vento é tratada como força estática.

³ A caracterização de amortecimento iniciou-se com o físico francês Charles-Augustin de Coulomb (1736-1806), em 1784.

Assim, a dissipação de energia é o resultado de diversas causas, depende da estrutura, do meio circundante e das amplitudes das oscilações. Além disso, pode não ser uniforme em toda a estrutura, ter interação com o apoio e depender da velocidade do vento e da forma da estrutura, quando então pode até ter efeito negativo, isto é, de intensificação da vibração.

Para estabelecimento de uma lei para o referido fenômeno, a forma mais consistente seria através da quantificação da energia dissipada entre dois instantes. Contudo, como isso se limitaria a um tipo específico de oscilação e de uma causa, é prático e usual idealizar esse fenômeno através de força que se opõe ao movimento. É a chamada *força de amortecimento*, concebida em forma conveniente de ser utilizada em função de um parâmetro simples de ser medido.

As idealizações de dissipação de energia mais utilizadas em análise dinâmica das estruturas são: o *amortecimento viscoso (linear)*, o *amortecimento de Coulomb* e o *amortecimento estrutural*, todos descritos brevemente a seguir.

O amortecimento viscoso em estrutura tem expressão semelhante à do fenômeno de oposição ao movimento lento de corpos imersos em fluido, quando então essa oposição é considerada como proporcional à velocidade relativa entre corpo e fluido.⁴ Assim, escreve-se:⁵

$$f_a(t) = c\dot{u}(t) \quad (3-1.2)$$

onde c é o coeficiente de amortecimento viscoso de unidade N·s/m.

O *amortecimento de Coulomb* é o de atrito entre duas superfícies secas ou de lubrificação insuficientes, que se deslocam entre si. Ocorre em interfaces entre elementos estruturais e de componentes não estruturais, assim como em aparelhos de apoio.⁶ A correspondente força é paralela a essas superfícies e expressa por:

$$f_a(t) = (\text{sinal da velocidade}) \mu N \quad (3-1.3)$$

onde μ é o *coeficiente de atrito cinemático* (adimensional) e N , a *força compressiva* normal às referidas superfícies.

Já o *amortecimento estrutural*, também denominado *histerético* ou *sólido*, é a idealização da dissipação de energia em materiais durante comportamento elástico, em interação molecular de plastificação microscópica que provoca curvas tensão-deformação de carregamento e de descarregamento não coincidentes.⁷ Assim, não inclui a plastificação macroscópica de material que deve ser considerada em análise de estrutura com a concepção de comportamento

⁴ O amortecimento viscoso em fluido foi sugerido por Newton. Em estrutura, trata-se de um amortecimento mecanicamente equivalente, uma vez que não é possível expressar o coeficiente de amortecimento viscoso em termos de propriedades da estrutura.

⁵ De forma semelhante, concebe-se a força de amortecimento para o caso de movimento de rotação.

⁶ O *amortecimento de Coulomb* costuma ser utilizado em dispositivos de dissipação de energia em estruturas sismorresistentes.

⁷ O termo *amortecimento estrutural* é, por vezes, utilizado inadequadamente na literatura, em referência a todas as causas de dissipação de energia em estrutura e não especificadamente com o significado de dissipação de energia internamente ao material.

não linear. A correspondente força é idealizada como proporcional à força elástica e em fase com a velocidade, que se escreve sob a forma complexa:

$$f_a(t) = i\eta k u(t) \quad (3-1.4)$$

onde η é o coeficiente de amortecimento estrutural (adimensional).⁸

O modelo de amortecimento viscoso é o mais utilizado em prática da engenharia, pelo fato de conduzir a equações de movimento de resoluções relativamente simples e de fornecer resultados satisfatórios em grande parte das aplicações. Medições de amortecimento costumam incluir diversas das citadas causas de dissipação de energia e ser expressas em termos de um amortecimento viscoso equivalente. Além do que, na Seção 3-5.5, serão desenvolvidas equivalências do amortecimento de Coulomb e do amortecimento estrutural ao modelo viscoso, tema este que também será tratado na Subseção 7-3.1.2.

Na construção de um modelo estrutural, o coeficiente de amortecimento é a propriedade que apresenta maior incerteza. Diferentemente da mensuração de rigidez e de inércia, um valor desse coeficiente não é obtido com base na geometria e nas propriedades dos materiais, e sim, determinado experimentalmente. Contudo, como na prática raramente esse coeficiente pode ser medido (porque a estrutura ainda está em projeto ou porque não há disponibilidade financeira para isso), é usual adotar valores disponibilizados na literatura e em códigos normativos de projeto, como os apresentados na Seção 3-5.4 para o caso viscoso. Isso, na forma de *razão de amortecimento*, que se relaciona com uma condição crítica de amortecimento, como apresentado na seção que se segue.

3-2 EQUAÇÃO DE MOVIMENTO COM AMORTECIMENTO VISCOSO

A equação diferencial de movimento do oscilador simples amortecido difere da equação do não amortecido apenas pela introdução da força de amortecimento. Contudo, para consolidar a compreensão dessa equação, faz-se o raciocínio completo com base na Figura 3-2.1,

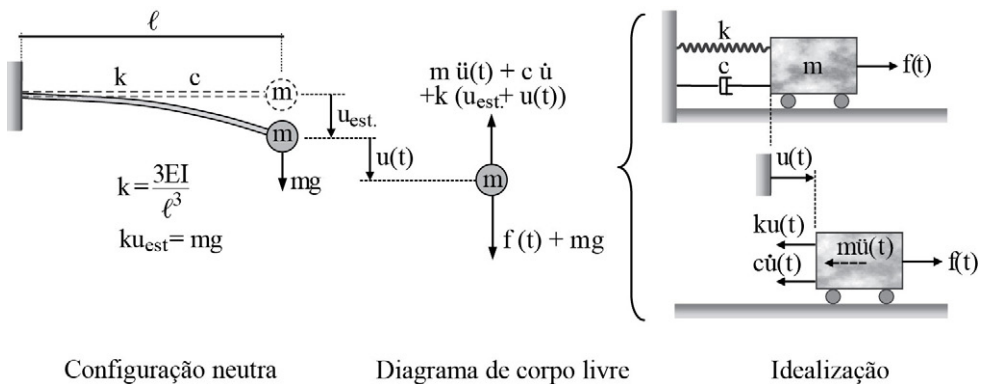


FIGURA 3-2.1 Viga em balanço idealizada como oscilador simples amortecido.

⁸ Parece estranho que uma grandeza real, como é o caso de força, seja expressa como variável complexa. Contudo, na Subseção 7-3.1.2 ficará esclarecido que essa expressão é adequada à análise no domínio da frequência, que fornece resultados reais de oscilação.

que apresenta a idealização de uma viga em balanço de amortecimento viscoso. Nesta, k é o coeficiente de rigidez de flexão da viga suposta de massa desprezível, m é uma massa em sua extremidade livre, c é o coeficiente de amortecimento viscoso, $u_{\text{est.}}$ é o *deslocamento estático* devido ao peso mg , $f(t)$ é a força excitadora e $u(t)$, o *deslocamento dinâmico*.⁹

Com as forças *de amortecimento* $c\dot{u}(t)$, *de inércia* $m\ddot{u}(t)$ e *elástica total* $k(u_{\text{est.}} + u(t))$, assim como com o peso mg e a força externa $f(t)$, tem-se o diagrama de corpo livre representado na parte intermediária da figura anterior. Logo, esse diagrama fornece a equação de equilíbrio:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + k(u_{\text{est.}} + u(t)) = f(t) + mg \quad (3-2.1)$$

Como ($u_{\text{est.}} = mg/k$), obtém-se, após o cancelamento dos fatores comuns nos dois membros da equação anterior, a equação de movimento:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = f(t) \quad (3-2.2)$$

em que o deslocamento $u(t)$ é medido em relação à *configuração neutra*. Essa equação pode também ser obtida da idealização de oscilador simples representada na parte direita da figura anterior.

A resposta de um oscilador tem como base a determinação da solução de deslocamento, a partir da qual são obtidas as soluções de velocidade e de aceleração, e consequentemente permite a determinação das forças elásticas, de amortecimento e de aceleração.

A solução completa da equação anterior é constituída por uma *solução particular* mais a solução da correspondente equação homogênea, denominada *solução complementar*. Essa última será determinada na próxima seção, e a particular será trabalhada em seções subsequentes, inicialmente em forma analítica e posteriormente em procedimento numérico.

3-3 VIBRAÇÃO LIVRE

No caso do oscilador simples amortecido em vibração (de translação) livre, a equação de movimento particulariza-se para a forma homogênea:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = 0 \quad (3-3.1)$$

Essa equação admite a solução:

$$u(t) = be^{pt} \quad (3-3.2)$$

denominada *resposta livre amortecida*, em que b e p são constantes a serem determinadas.

Logo, com a substituição dessa solução na equação anterior e o cancelamento dos fatores comuns, obtém-se a equação característica ($mp^2 + cp + k = 0$) de soluções:

$$p_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad (3-3.3)$$

⁹ Na idealização do oscilador, a mola é considerada sem massa, e o elemento de dissipação de energia é representado por um cilindro com cabeça de pistão.

Essas soluções conduzem à seguinte forma de solução da equação diferencial:

$$u(t) = b_1 e^{p_1 t} + b_2 e^{p_2 t} \quad (3-3.4)$$

em que b_1 e b_2 são constantes reais de integração.

Quanto às soluções da equação característica, dependendo das propriedades do oscilador, pode-se ter um dos três seguintes casos:

1. O radicando na Equação 3-3.3 é nulo, diz-se *amortecimento crítico* e tem-se:

$$\left(\frac{c}{2m}\right)^2 = \frac{k}{m} \rightarrow \boxed{c = c_{\text{crit.}} = 2\sqrt{km}} \quad (3-3.5)$$

Esse é o valor limite do coeficiente de amortecimento viscoso, que converte um estado oscilatório em não oscilatório, o que raramente ocorre em sistema mecânico. O correspondente movimento é não oscilatório, com o deslocamento tendendo assintoticamente a zero. No caso, o sistema é dito *criticamente amortecido* e tem importância na presente análise dinâmica como referência na definição de valores de amortecimento.

2. O radicando é maior que zero, diz-se *amortecimento supercrítico* e tem-se:

$$c > c_{\text{crit.}} \quad (3-3.6)$$

Com esse amortecimento, também não há oscilação, e o sistema retorna à configuração neutra em mais tempo do que com o amortecimento crítico. Diz-se, então, que o oscilador é *superamortecido*.

3. O radicando na Equação 3-3.3 é menor que zero, diz-se *amortecimento subcrítico* e tem-se:

$$0 < c < c_{\text{crit.}} \quad (3-3.7)$$

No caso, o sistema oscila e retorna gradualmente à posição neutra, em movimento não periódico e em caracterização do denominado *oscilador subamortecido*.

Os três citados comportamentos estão representados na [Figura 3-3.1](#), na condição de velocidade inicial nula, em que T_a denota o *período amortecido*, que é o espaçamento de

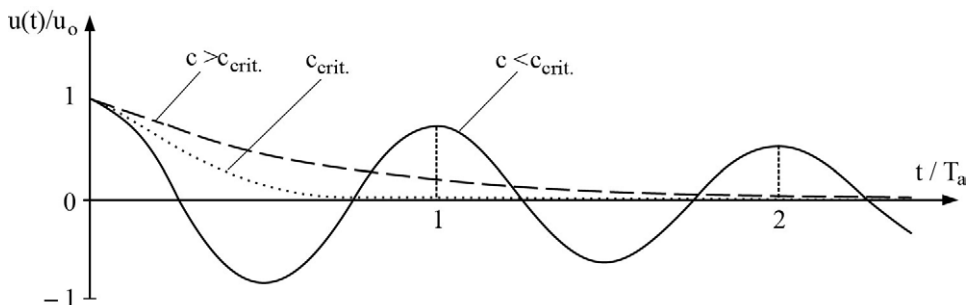


FIGURA 3-3.1 Movimentos livres com os amortecimentos: supercrítico, crítico e subcrítico.

tempo entre dois valores máximos da resposta de deslocamento em vibração subamortecida.

Em caso de amortecimento subcrítico, as soluções da equação característica são os números complexos conjugados:

$$p_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm i \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} \quad (3-3.8)$$

Logo, com a substituição dessas soluções na Equação 3-3.4, obtém-se a solução de deslocamento:

$$u(t) = b_1 e^{(-\frac{c}{2m} + i\omega_a)t} + b_2 e^{(-\frac{c}{2m} - i\omega_a)t} \quad (3-3.9)$$

onde:

$$\omega_a = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} \rightarrow \boxed{\omega_a = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} \quad (3-3.10)$$

Esse resultado é a denominada *frequência natural amortecida*¹⁰, em que se adota o parâmetro:

$$\xi = \frac{c}{c_{\text{crit.}}} \quad (3-3.11)$$

chamado de *razão, fator ou fração de amortecimento*, que é uma grandeza adimensional.¹¹

Essa razão costuma ser especificada em porcentagem e tem também as seguintes expressões:

$$\xi = \frac{c}{2\sqrt{km}} \rightarrow \boxed{\xi = \frac{c}{2m\omega_n}} \quad (3-3.12)$$

Com a solução expressa na Equação 3-3.9 e com a equação de Euler, $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, chega-se à solução de deslocamento sob a forma:

$$u(t) = e^{-c t / (2m)} (a_1 \cos(\omega_a t) + a_2 \sin(\omega_a t)) \quad (3-3.13)$$

Além disso, com a Equação 3-3.12 obtém-se:

$$\frac{c}{2m} = \xi \omega_n \quad (3-3.14)$$

¹⁰ O amortecimento reduz a frequência e, conseqüentemente, aumenta o período, comparativamente com o caso do oscilador não amortecido. Assim, a frequência natural amortecida é apenas uma grandeza conceitual, não observável.

¹¹ A vantagem da razão de amortecimento é dar uma indicação do decaimento da oscilação. Na Figura 3-3.1, as representações do movimento supercrítico e do movimento subcrítico foram obtidas com ($\xi=2$) e ($\xi=0,05$), respectivamente.

que permite escrever a solução de deslocamento anterior sob a nova forma:

$$u(t) = e^{-\xi\omega_n t} (a_1 \cos(\omega_a t) + a_2 \sin(\omega_a t)) \quad (3-3.15)$$

Dessa expressão, obtém-se a solução de velocidade:

$$\dot{u}(t) = -\xi\omega_n u(t) + e^{-\xi\omega_n t} (-a_1\omega_a \sin(\omega_a t) + a_2\omega_a \cos(\omega_a t)) \quad (3-3.16)$$

Além disso, com as condições iniciais u_o e v_o , a solução expressa na Equação 3-3.15 toma a forma:

$$u(t) = e^{-\xi\omega_n t} \left(u_o \cos(\omega_a t) + \frac{u_o \xi \omega_n + v_o}{\omega_a} \sin(\omega_a t) \right) \quad (3-3.17)$$

Esta solução pode também ser escrita como:¹²

$$u(t) = ae^{-\xi\omega_n t} \cos(\omega_a t - \phi) \quad (3-3.18)$$

em que se tem a amplitude:

$$a = \sqrt{u_o^2 + \left(\frac{u_o \xi \omega_n + v_o}{\omega_a} \right)^2} \quad (3-3.19)$$

e o ângulo de fase:

$$\phi = \arctg \frac{u_o \xi \omega_n + v_o}{u_o \omega_a} \quad (3-3.20)$$

A solução de deslocamento anterior e as correspondentes derivada primeira e derivada segunda estão representadas na [Figura 3-3.2](#), em formas normalizadas. Observa-se que essa solução e suas derivadas são defasadas, decaem exponencialmente com o fator $ae^{-\xi\omega_n t}$ e que os picos de oscilação ocorrem em iguais espaçamentos de tempo de expressão:

$$T_a = \frac{2\pi}{\omega_a} \rightarrow T_a = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} = \frac{T_n}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (3-3.21)$$

É o *período amortecido* que corresponde à frequência amortecida ($\omega_a = 2\pi/T_a$).¹³

¹² Vê-se que essa solução não é harmônica e que, com ($\xi=0$), recai na solução de vibração expressa na Equação 2-2.4, que é harmônica simples. No caso de amortecimento crítico, que é o desejável em dispositivo de fechamento de porta, obtém-se a solução ($u(t) = e^{-\omega_n t}(u_o + (v_o + \omega_n u_o)t)$). Além disso, com amortecimento supercrítico, que é o utilizado em suspensão de veículos automotores, chega-se à solução ($u(t) = e^{-\xi\omega_n t}(u_o \cosh(\omega^* t) + \sinh(\omega^* t)(\xi\omega_n u_o + v_o)/\omega^*)$), em que ($\omega^* = \omega_n(\xi^2 - 1)^{1/2}$).

¹³ Como a solução não é periódica, trata-se de um *pseudoperíodo*.

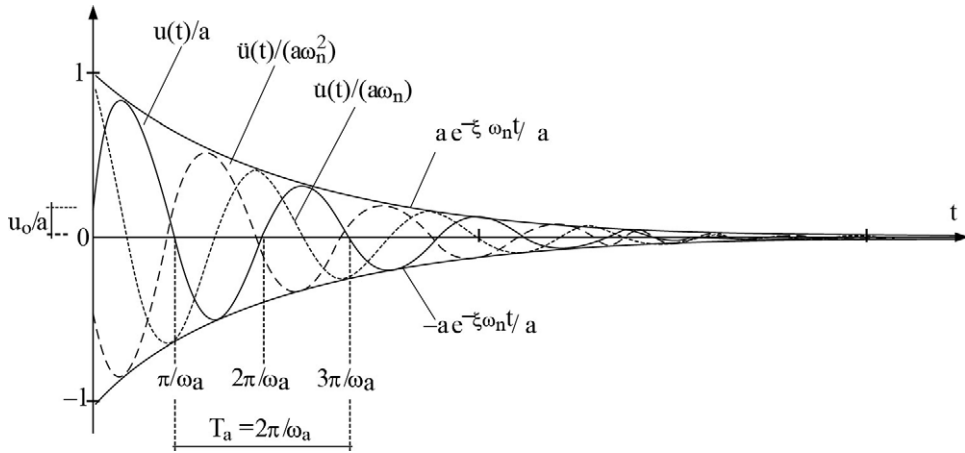


FIGURA 3-3.2 Soluções normalizadas em caso de condições iniciais $u_0 \neq 0$ e $v_0 \neq 0$.

Pelo fato de as usuais razões de amortecimento de estruturas terem valores muito reduzidos, a frequência amortecida é apenas um pouco menor do que a frequência natural, como evidencia a [Figura 3-3.3](#).

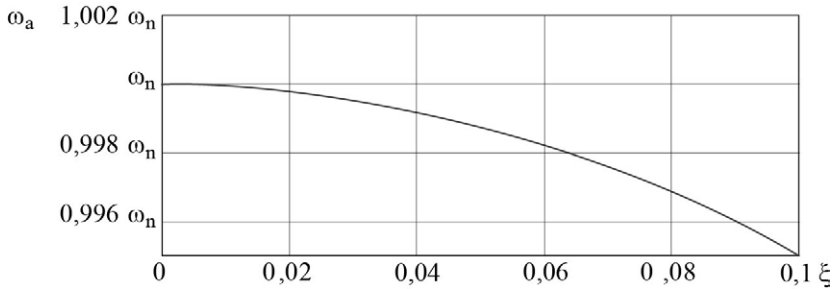


FIGURA 3-3.3 Frequência angular amortecida *versus* razão de amortecimento.

Mesmo pequenos amortecimentos têm influência relevante em vibração livre de longa duração. Para exemplificar essa influência, particulariza-se a solução de deslocamento expressa na Equação 3-3.17 às condições iniciais ($u_0 \neq 0$) e ($v_0 = 0$), obtendo-se:

$$u(t) = u_0 e^{-\frac{2\pi\xi}{T_n}t} \left(\cos\left(\frac{2\pi\sqrt{1-\xi^2}}{T_n}t\right) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin\left(\frac{2\pi\sqrt{1-\xi^2}}{T_n}t\right) \right) \quad (3-3.22)$$

A Figura 3-3.4 mostra as representações gráficas dessa solução nos casos de ($\xi=0,01$) em linha contínua, ($\xi=0,03$) em linha pontilhada e ($\xi=0,05$) em linha tracejada. Observa-se rápido decréscimo da oscilação ao longo do tempo.

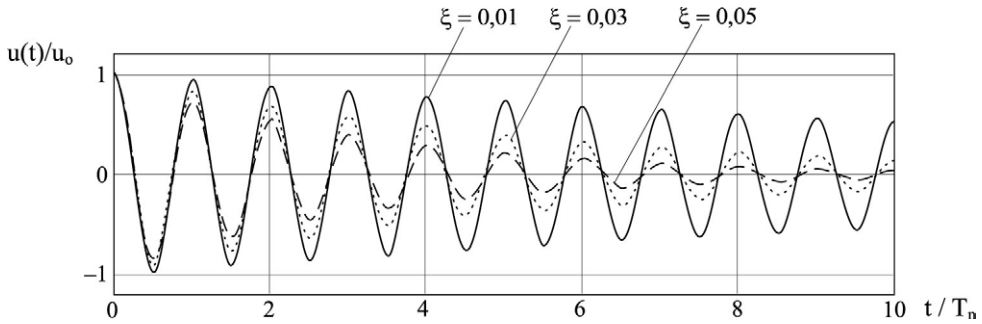


FIGURA 3-3.4 Vibrações livres com as condições iniciais ($u_0 \neq 0$) e ($v_0 = 0$).

3-4 VIBRAÇÃO SOB FORÇA HARMÔNICA

No capítulo anterior foi ressaltada a importância da força harmônica, que é utilizada, a seguir, em início do estudo de vibração forçada do oscilador simples subamortecido.¹⁴ Para isso, considera-se a equação de movimento com a notação:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = f_0 \cos(\omega t) \quad (3-4.1)$$

onde f_0 é amplitude e ω é frequência angular, ambas da ação externa. Essa frequência corresponde ao período ($T = 2\pi/\omega$).

Pode-se resolver a equação anterior em forma trigonométrica, como detalhado a seguir, e também em forma exponencial complexa, como será apresentado na Subseção 7-3.1.

3-4.1 Solução em notação trigonométrica

A equação diferencial de movimento anterior tem a solução particular:

$$u_p(t) = a_p \cos(\omega t - \phi) \quad (3-4.2)$$

Nesta solução a_p denota a amplitude de oscilação e ϕ , ângulo de fase em relação à ação. Isto é, o ângulo que expressa o “atraso” da resposta do oscilador simples em relação à força harmônica excitadora, o que implica que essa resposta e essa força não atinjam valores extremos nos mesmos instantes.

Com a substituição dessa solução na equação de movimento, obtém-se:

¹⁴ Uma força harmônica é fácil de ser gerada em ensaio dinâmico e utilizada em determinação de amortecimento, como apresentado na Subseção 3-5.3. No presente desenvolvimento, deu-se preferência à função cosseno, para uniformidade com a análise no domínio da frequência, que será tratada na Subseção 7-3.1.

$$\begin{aligned}
 & -m a_p \omega^2 \cos(\omega t - \phi) - c a_p \omega \sin(\omega t - \phi) + k a_p \cos(\omega t - \phi) = f_o \cos(\omega t) \\
 \rightarrow & -m a_p \omega^2 \cos(\omega t) \cos \phi - m a_p \omega^2 \sin(\omega t) \sin \phi - c a_p \omega \sin(\omega t) \cos \phi \\
 & + c a_p \omega \cos(\omega t) \sin \phi + k a_p \cos(\omega t) \cos \phi + k a_p \sin(\omega t) \sin \phi = f_o \cos(\omega t) \\
 \rightarrow & \begin{cases} a_p ((k - m\omega^2) \cos \phi + c \omega \sin \phi) = f_o \\ a_p ((k - m\omega^2) \sin \phi - c \omega \cos \phi) = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

A resolução desse sistema fornece o ângulo de fase:

$$\phi = \arctg \frac{c\omega}{k - m\omega^2} \rightarrow \phi = \arctg \frac{2\xi\omega / \omega_n}{1 - (\omega / \omega_n)^2} \quad (3-4.3)$$

e a amplitude:

$$\begin{aligned}
 a_p &= \frac{f_o}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \\
 \rightarrow a_p &= \frac{f_o}{k} \frac{1}{\sqrt{(1 - (\omega / \omega_n)^2)^2 + (2\xi\omega / \omega_n)^2}} \quad (3-4.4)
 \end{aligned}$$

Além disso, para reescrever a solução particular de deslocamento anterior com esses resultados intermediários, adota-se a notação de *razão de frequências*:

$$r = \omega / \omega_n \quad (3-4.5)$$

e o deslocamento pseudoestático:

$$u_{est.} = f_o / k \quad (3-4.6)$$

Assim, com a substituição dessas notações na Equação 3-4.4, obtém-se a nova expressão de amplitude:

$$a_p = \frac{u_{est.}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2r\xi)^2}} \quad (3-4.7)$$

e com a subsequente substituição na Equação 3-4.2, chega-se à solução particular sob a nova forma:

$$u_p(t) = \frac{u_{est.}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2r\xi)^2}} \cos(\omega t - \phi) \quad (3-4.8)$$

onde se tem a expressão de ângulo de fase:

$$\phi = \arctg \frac{2r\xi}{1 - r^2} \quad (3-4.9)$$

Logo, com a adição da solução anterior à solução complementar expressa na Equação 3-3.15, chega-se à solução completa de deslocamento do oscilador simples subamortecido sob força harmônica:

$$u(t) = e^{-\xi\omega_n t} (a_1 \cos(\omega_a t) + a_2 \sin(\omega_a t)) + \frac{u_{est.}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2r\xi)^2}} \cos(\omega t - \phi) \quad (3-4.10)$$

que tem a solução de velocidade como derivada primeira:

$$\dot{u}(t) = -\xi\omega_n e^{-\xi\omega_n t} (a_1 \cos(\omega_a t) + a_2 \sin(\omega_a t)) + e^{-\xi\omega_n t} (-a_1\omega_a \sin(\omega_a t) + a_2\omega_a \cos(\omega_a t)) - \frac{u_{est}\omega}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\xi)^2}} \sin(\omega t - \phi) \quad (3-4.11)$$

Com base no deslocamento inicial u_0 e na velocidade inicial v_0 , são obtidas as constantes que ocorrem nas soluções anteriores:

$$\begin{cases} a_1 = u_0 - \frac{u_{est} \cos \phi}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\xi)^2}} \\ a_2 = \frac{1}{\omega_a} \left(v_0 + a_1 \xi \omega_n - \frac{u_{est} \omega}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\xi)^2}} \sin \phi \right) \end{cases} \quad (3-4.12)$$

A solução de deslocamento expressa anteriormente não é harmônica simples. Nessa solução, a *parcela complementar* decai rapidamente com o tempo, devido ao fator exponencial $e^{-\xi\omega_n t}$. E na duração em que atua significativamente, diz-se que ocorre a *resposta transiente*. Já a *solução particular*, que é a segunda parcela da solução expressa na Equação 3-4.10, não decai e é harmônica com a mesma frequência que a força excitadora, embora defasada. Assim, a solução particular é praticamente a que constitui a chamada *resposta em regime permanente*, sendo, pois, a mais importante. Nesse regime, a energia fornecida ao sistema pela força excitadora é igual à energia dissipada.

Identifica-se que, nesse regime, a amplitude da oscilação depende da razão de amortecimento, da razão de frequências, da rigidez do sistema e da amplitude da força excitadora. E a resposta não amortecida pode ser obtida das expressões anteriores com ($\xi=0$).

A Figura 3-4.1 ilustra as duas descritas parcelas, em caso de condições iniciais nulas. Vê-se que após o total decaimento da solução complementar representada em tracejado, a solução

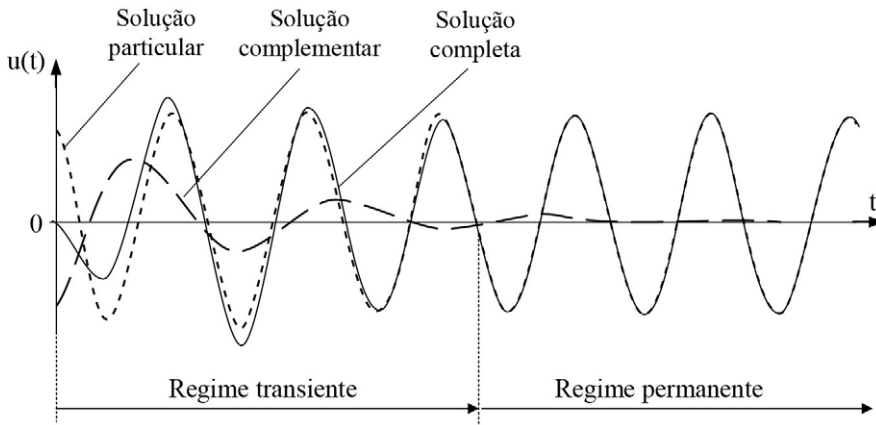


FIGURA 3-4.1 Composição da solução completa sob força harmônica no caso de $u_0=0$ e $v_0=0$.

completa é constituída pela solução particular representada em linha pontilhada. E pelo fato de a força cossenoidal ser aplicada subitamente em ($t = 0$), essa solução não começa com valor nulo. O atendimento das condições iniciais nulas é garantido pela solução complementar que se inicia com deslocamento negativo, igual em módulo ao valor inicial da solução particular.¹⁵

De forma análoga ao desenvolvimento anterior, no caso da força ($f(t) = f_0 \sin(\omega t)$) tem-se a solução completa de deslocamento:

$$u(t) = e^{-\xi \omega_n t} (b_1 \cos(\omega_n t) + b_2 \sin(\omega_n t)) + \frac{u_{est.}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\xi)^2}} \sin(\omega t - \phi) \quad (3-4.13)$$

em que b_1 e b_2 são constantes a serem determinadas com as condições iniciais ao movimento.

À medida que a frequência forçante tende para a frequência natural, o ângulo de fase se aproxima de 90° . Em caso de coincidência dessas frequências e condições iniciais nulas, a solução completa de deslocamento expressa na Equação 3-4.10 particulariza-se na chamada *solução ressonante*.¹⁶

$$u(t) = \frac{f_0}{2\xi k} \left(-e^{-\xi \omega_n t} \frac{\sin(\sqrt{1-\xi^2} \omega_n t)}{\sqrt{1-\xi^2}} + \sin(\omega_n t) \right) \quad (3-4.14)$$

A Figura 3-4.2 mostra essa solução em parametrização ao deslocamento pseudoestático e com a razão de amortecimento de 0,03. Verifica-se que os picos da oscilação normalizada $u(t)k/f_0$ convergem para $1/(2\xi)$ e têm as envoltórias mostradas em linha pontilhada na figura. Assim, em caso de não amortecimento, essas envoltórias tendem ao infinito.

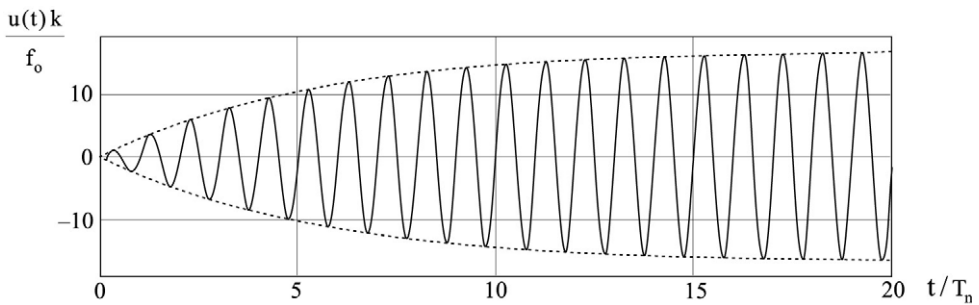


FIGURA 3-4.2 Resposta ressonante no caso de ($\xi = 0,03$).

¹⁵ Embora, no caso da força harmônica, o deslocamento máximo da solução completa ocorra no regime transiente, esse máximo não é relevante porque, em sistemas físicos reais, as forças harmônicas aumentam gradualmente até permanecer com suas caracterizações de operação.

¹⁶ Será mostrado na próxima subseção que, de fato, em sistemas fracamente amortecidos, a ressonância ocorre no caso de a frequência forçante ser muito próxima da frequência natural, e não exatamente igual.

Ainda com condições iniciais nulas, a [Figura 3-4.3](#) seguinte mostra que, com osciladores de diferentes amortecimentos, as respostas de deslocamento são em fase. Essa figura evidencia também que a dissipação de energia pode ser desconsiderada em resposta de curta duração.

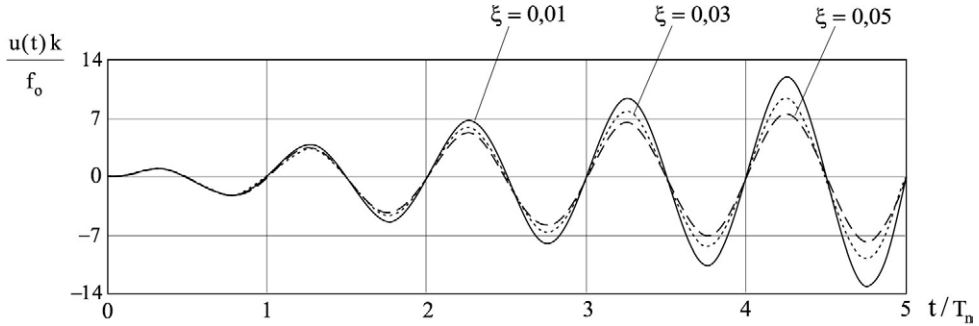


FIGURA 3-4.3 Respostas ressonantes com diversas razões de amortecimento.

3-4.2 Fator de amplificação dinâmica

O *fator de amplificação dinâmica de deslocamento* ($A_d = a_p/u_{est}$), que foi definido para o oscilador não amortecido na Equação 2-3.11, toma, em caso amortecido, a forma:

$$A_d = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\xi)^2}} \quad (3-4.15)$$

Esse fator expressa quantas vezes a amplitude da oscilação em regime permanente é maior ou menor do que o deslocamento do oscilador sob a ação estática de f_0 . Trata-se de um fator adimensional, função da razão de frequências e da razão de amortecimento, com o qual a resposta de deslocamento em regime permanente toma a forma mais compacta:

$$u(t) = u_{est} \cdot A_d \cos(\omega t - \phi) \quad (3-4.16)$$

A [Figura 3-4.4](#) mostra representações desse fator *versus* razão de frequências, com diversos valores de amortecimento, denominadas *funções de resposta em frequência*. Já a [Figura 3-4.5](#) representa o ângulo de fase *versus* razão de frequências, também com diferentes razões de amortecimento. Tanto esse fator como esse ângulo podem ser utilizados em determinação experimental de frequência natural, desde que se possa variar a frequência forçante.

Dessas duas últimas figuras, conclui-se que, quanto à vibração sob força harmônica:

1. Em oscilador fracamente amortecido, o valor de pico da resposta de deslocamento em regime permanente ocorre com:

$$\frac{dA_d}{dr} = 0 \rightarrow \frac{8r\xi^2 + 4r(r^2 - 1)}{2((r^2 - 1)^2 + 4\xi^2 r^2)^{3/2}} = 0 \rightarrow r_{res.} = \sqrt{1 - 2\xi^2} \quad (3-4.17)$$

Fator de amplificação dinâmica

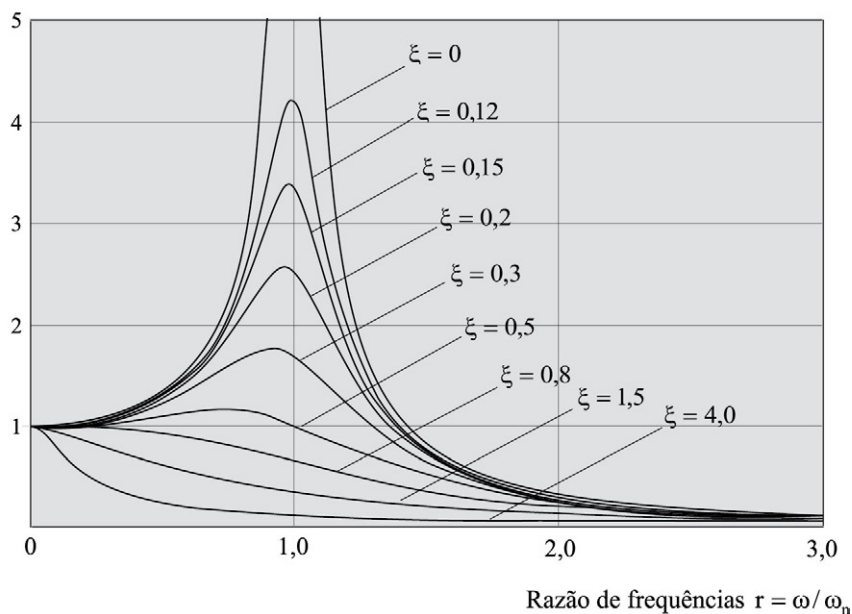


FIGURA 3-4.4 Fator de amplificação dinâmica *versus* razão de frequências.

Ângulo de fase

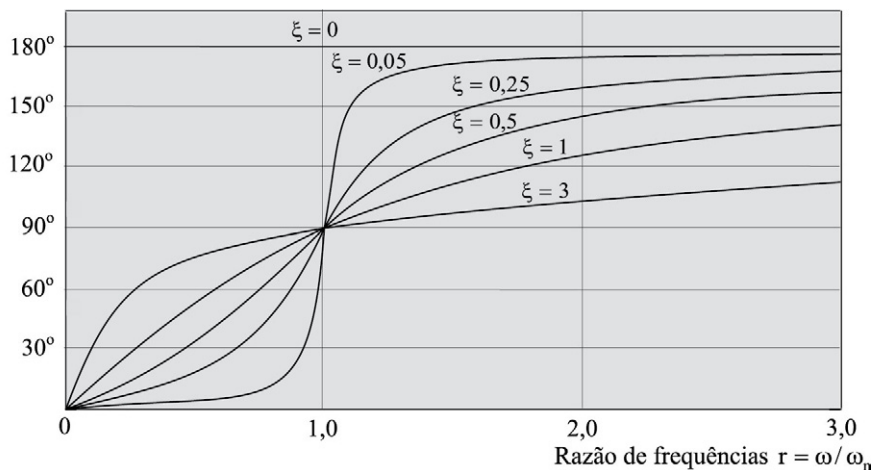


FIGURA 3-4.5 Ângulo de fase *versus* razão de frequências.

Essa condição é válida para $\xi < 1/\sqrt{2}$ e $r_{\text{res.}}$ é denominada *razão de ressonância*. Logo, com a substituição dessa razão na Equação 3-4.15, obtém-se o máximo fator de amplificação dinâmica:

$$A_{d/\text{máx.}} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \cong \frac{1}{2\xi} \quad (3-4.18)$$

Com as usuais razões de amortecimento que se situam no intervalo de $0,01 \leq \xi \leq 0,05$, tem-se esse máximo fator na faixa de $10,013 \leq A_{d/\text{máx.}} \leq 50,002$, o que expressa relevantes amplificações e evidencia a importância do amortecimento. Também a partir da Equação 3-4.17, obtém-se a frequência ressonante:

$$\omega_{\text{res.}} = \omega_n \sqrt{1-2\xi^2} \quad (3-4.19)$$

Contudo, como as referidas razões têm valores reduzidos, costuma-se dizer que a ressonância ocorre na coincidência de frequências, isto é, com $(r = 1)$.¹⁷ Em caso de $\xi < 0,1$, o erro em considerar que a amplitude máxima ocorra nessa coincidência é menor do que 1%.

2. Com aquelas razões de amortecimento e frequência forçante bem menor do que a frequência natural do sistema, como em caso de $(r < 0,2 \rightarrow T > 5T_n)$, a amplitude da oscilação em regime permanente é muito próxima ao deslocamento pseudoestático, com defasagem em relação à ação externa praticamente irrelevante. Isto é, em caso $\omega < \omega_n$, a oscilação é “lenta” e “controlada” pela rigidez (as forças de inércia são reduzidas), o que implica amplitude próxima ao deslocamento pseudoestático e ângulo de fase praticamente nulo.
3. Para as mesmas razões, mas com o aumento da razão de frequências de maneira a se ter $(0,2 \leq r \leq 2,5 \rightarrow 0,4T_n \leq T \leq 5T_n)$, o comportamento dinâmico cresce de importância até atingir a condição de ressonância, para decrescer após essa condição.
4. Ainda para as referidas razões, mas com frequência forçante bem maior do que a frequência natural, como em caso de $(r > 2,5 \rightarrow T < 0,4T_n)$, a amplitude da oscilação em regime permanente é muito menor do que o deslocamento pseudoestático, e o ângulo de fase é próximo de 180° . Ou seja, as reversões da ação harmônica são bem mais rápidas do que a capacidade do sistema em oscilar com amplitudes relevantes, tendo-se o desenvolvimento de grandes forças de inércia. Além disso, como os deslocamentos são pequenos, as forças elásticas também o são.
5. Na condição de $(\omega = \omega_n)$, o ângulo de fase é igual a 90° , independentemente da razão de ξ .

EXEMPLO 3-4.1

Para confirmar numericamente algumas das conclusões apresentadas anteriormente, considera-se a viga do Exercício Proposto 2-6.4, agora com razão de amortecimento de 0,05 e sob a força harmônica representada na [Figura E3-4.1a](#), nos casos das frequências forçantes de 1, 20 e 100 rad/s. Com a solução expressa na Equação 3-4.10, são obtidos os históricos do deslocamento transversal da seção média dessa viga idealizada como oscilador simples.

Sequencialmente para as frequências forçantes de 1, 20 e 100 rad/s, as [Figuras E3-4.1b](#), [E3-4.1c](#) e [E3-4.1d](#) apresentam os referidos históricos. Em linha contínua estão representadas as

¹⁷ A ressonância é potencialmente destrutiva. Pode ocasionar a ruína imediata da estrutura, como também acelerar o processo de falha por fadiga, além de provocar desconforto aos usuários.

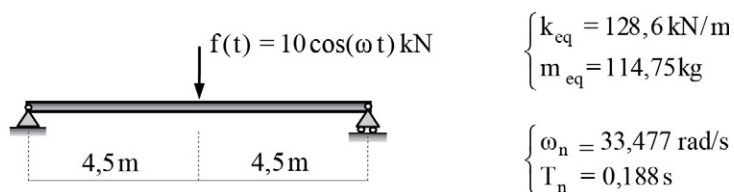


FIGURA E3-4.1a Viga biapoiada sob força harmônica.

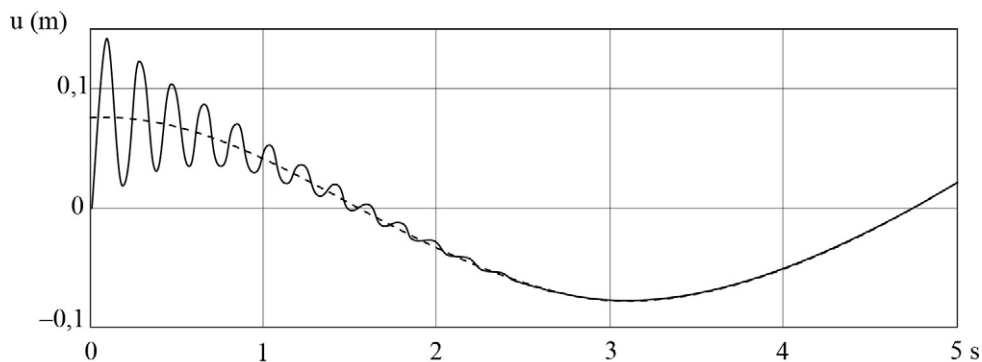


FIGURA E3-4.1b Históricos de deslocamento para o caso de $(\omega=1\text{rad/s})$.

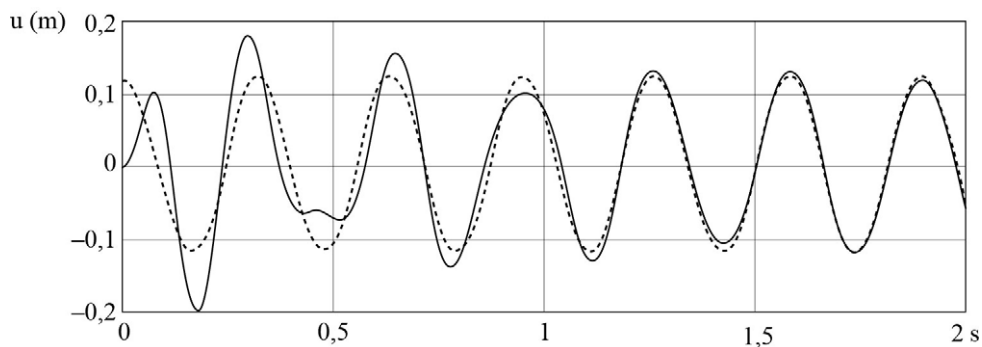


FIGURA E3-4.1c Históricos de deslocamento para o caso de $(\omega=20\text{rad/s})$.

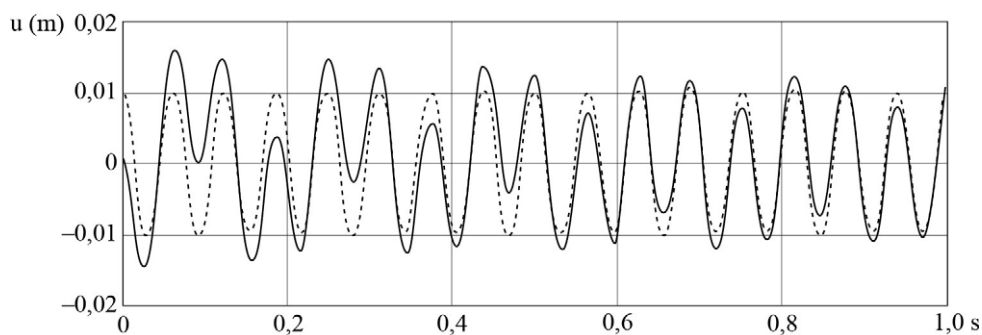


FIGURA E3-4.1d Históricos de deslocamento para o caso de $(\omega=100\text{rad/s})$.

soluções completas, e em linha pontilhada, as soluções particulares. Vê-se que, pelo fato de se ter com a frequência de 1Hz a razão de frequências ($r = 1/33,477 < 0,2$), que expressa força harmônica lenta frente à frequência natural, a amplitude em regime permanente é praticamente igual ao deslocamento pseudoestático de 0,078m. Com a frequência de 20Hz, por se ter a razão de frequências ($r = 20/33,477 \approx 0,6 \rightarrow 0,2 \leq r \leq 2,5$), a excitação tem efeito dinâmico relevante na resposta em regime permanente, com amplitude maior do que o deslocamento pseudoestático. E, finalmente, com a frequência de 100Hz, por se ter a razão de frequências ($r = 100/33,477 \approx 3 \rightarrow r > 2,5$), que expressa reversão da força harmônica excitadora muito rápida frente à frequência natural, a amplitude em regime permanente é muito menor do que o deslocamento pseudoestático.

3-5 DETERMINAÇÃO DE AMORTECIMENTO

O amortecimento provoca decaimento da oscilação depois de cessada a ação externa e limita as amplitudes em condição de ressonância. E, como já foi esclarecido, tem diversas causas, não sendo possível a sua determinação com base nas características geométricas da estrutura, nas propriedades de seus materiais e nos componentes não estruturais. Por essas razões, o amortecimento é estimado com base em experimentos físicos, usualmente baseados na concepção de que seja viscoso, como através dos métodos *do decremento logarítmico*, *da meia amplitude* e *da largura de banda*, descritos a seguir.¹⁸ Para o caso de amortecimento não viscoso, adota-se equivalência ao viscoso, como será apresentado na Subseção 3-5.5.

3-5.1 Método do decremento logarítmico

Este método utiliza a solução de deslocamento em vibração livre subamortecida, para a qual se define o *decremento logarítmico* δ_l como o logaritmo neperiano da razão entre os deslocamentos em dois instantes correspondentes a um ciclo de oscilação completa, como ilustra a Figura 3-5.1 no caso de t_1 e ($t_2 = t_1 + T_a$). A vantagem inicial deste método é ser

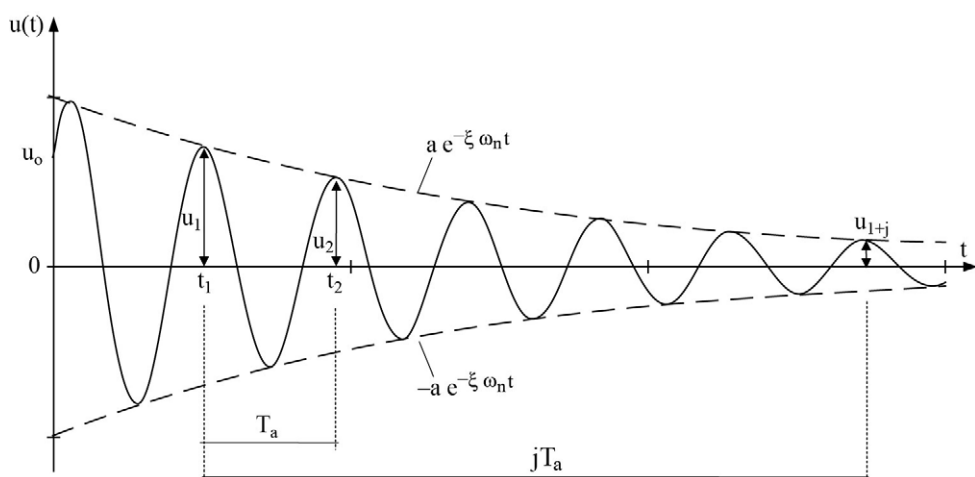


FIGURA 3-5.1 Oscilação livre em definição do decremento logarítmico.

¹⁸ Embora sejam utilizadas soluções do oscilador simples amortecido no desenvolvimento desses métodos, as medições experimentais dizem respeito à resposta de um ponto representativo da oscilação da estrutura em experimentação.

simples colocar uma estrutura em vibração livre e registrar a correspondente oscilação.¹⁹ Assim, escreve-se:

$$\delta_\ell = \ln(u_1/u_2) \quad (3-5.1)$$

Com a substituição da solução de deslocamento expressa na Equação 3-3.18 na equação anterior, obtém-se:

$$\delta_\ell = \ln \frac{e^{-\xi \omega_n t_1} a \cos(\omega_a t_1 - \phi)}{e^{-\xi \omega_n (t_1 + T_a)} a \cos(\omega_a (t_1 + T_a) - \phi)} \quad (3-5.2)$$

Como ao final de cada ciclo de oscilação, o valor da função $\cos(\omega a t - \phi)$ retorna ao valor do início do ciclo, a expressão do decremento anterior toma as novas seguintes formas:

$$\delta_\ell = \ln \frac{e^{-\xi \omega_n t_1}}{e^{-\xi \omega_n (t_1 + T_a)}} = \ln(e^{\xi \omega_n T_a}) = \xi \omega_n T_a \rightarrow \delta_\ell = \frac{2\pi \xi \omega_n}{\omega_a}$$

E com a consideração da frequência amortecida expressa na Equação 3-3.10, chega-se a:

$$\delta_\ell = \frac{2\pi \xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \quad (3-5.3)$$

Além disso, como usualmente em estruturas se tem $\xi < 0,1$, considera-se ($1 - \xi^2 \approx 1$) para escrever a aproximação ($\delta_\ell \approx 2\pi \xi$). Essa aproximação é evidenciada na Figura 3-5.2 e fornece a razão de amortecimento:

$$\xi \cong \frac{1}{2\pi} \ln \frac{u_1}{u_2} \quad (3-5.4)$$

Trata-se do *método do decremento logarítmico* para o qual se excita a estrutura em vibração livre e se registra o histórico do deslocamento de um ponto significativo da mesma. Logo, tendo-se os deslocamentos nos instantes extremos de um ciclo, como foi mostrado na Figura 3-5.1, obtém-se o decremento logarítmico e, conseqüentemente, o valor da razão de amortecimento. Contudo, em sistema fracamente amortecido, pode-se determinar resultado mais acurado com o uso de dois valores de pico afastados de j ciclos, como também foi

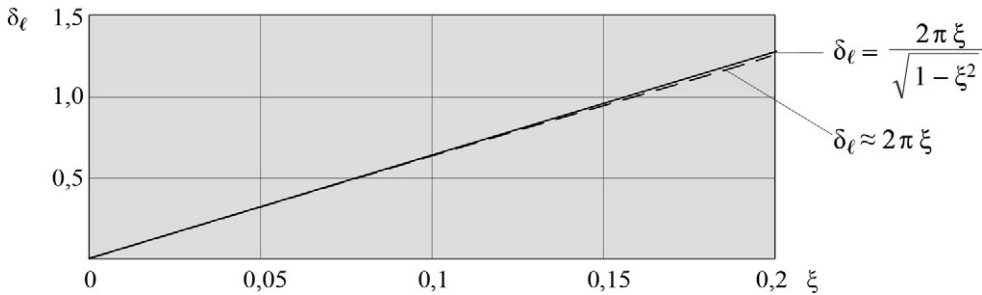


FIGURA 3-5.2 Decremento logarítmico versus razão de amortecimento.

¹⁹ A concepção desse método foi apresentada pelo físico alemão Hermann Ludwig Ferdinand Von Helmholtz (1821-1894), em 1862.

ilustrado na [Figura 3-5.1](#), no caso de $(j = 5)$, quando então o referido decremento toma a nova forma:

$$\delta_\ell = \frac{1}{j} \ln \frac{u_1}{u_{1+j}} \cong 2\pi\xi$$

Logo, tem-se a razão de amortecimento:²⁰

$$\xi \cong \frac{1}{2\pi j} \ln \frac{u_1}{u_{1+j}} \quad (3-5.5)$$

A partir da Equação 3-3.18, obtém-se:

$$\ddot{u} = -a\omega_a^2 u \rightarrow u = -\frac{\ddot{u}}{a\omega_a^2} \quad (3-5.6)$$

Logo, como é mais fácil medir aceleração do que deslocamento, é vantajoso modificar a expressão anterior para a forma:

$$\xi \cong \frac{1}{2\pi j} \ln \frac{\ddot{u}_1}{\ddot{u}_{1+j}} \quad (3-5.7)$$

3-5.2 Método da meia amplitude

O *método da meia amplitude* utiliza também vibração livre, mas tem como base a curva envelope de decaimento da resposta de deslocamento, que se escreve:

$$u^* = a e^{-\xi\omega_n t} \quad (3-5.8)$$

Após a determinação experimental dessa curva, tomam-se dois valores $u_1^*(t_1)$ e $u_2^*(t_2)$, tal que $(u_1^* = 2u_2^*)$, como ilustra a [Figura 3-5.3](#) e de tal forma que:

$$1 < (t_2 - t_1) / T_a = N \quad (3-5.9)$$

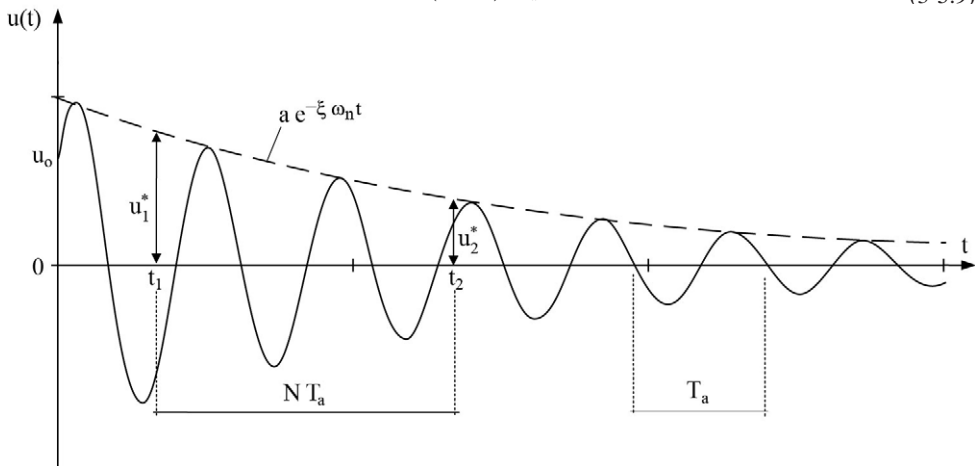


FIGURA 3-5.3 Oscilação livre em definição da meia amplitude.

²⁰ Ficará evidente quando do tratamento dos modelos de multigrados de liberdade que é prático utilizar a razão de amortecimento, contudo, em sendo necessário, o coeficiente de amortecimento é obtido a partir da Equação 3-3.12 com a seguinte expressão ($c = 2m\omega_n\xi$).

Assim, a identificação de uma oscilação completa fornece o período amortecido que permite o cálculo da variável N .

A partir da Equação 3-5.8, tem-se:

$$\begin{cases} u_1^* = a e^{-\xi \omega_n t_1} \\ u_2^* = a e^{-\xi \omega_n t_2} \end{cases} \rightarrow \frac{u_1^*}{u_2^*} = e^{\xi \omega_n (t_2 - t_1)} = e^{\xi \omega_n N T_d} = 2 \quad (3-5.10)$$

Logo, com a substituição do período amortecido expresso na Equação 3-3.21 nessa última equação, obtém-se:

$$e^{2\pi \xi N / \sqrt{1-\xi^2}} = 2 \rightarrow \frac{2\pi \xi N}{\sqrt{1-\xi^2}} = \ln 2 \quad (3-5.11)$$

Além disso, com pequenas razões de amortecimento de forma que $\xi^2 \ll 1$, escreve-se a expressão anterior como $(2\pi \xi N \approx \ln 2)$ que fornece a razão de amortecimento:

$$\xi \approx \frac{\ln 2}{2\pi N} \rightarrow \boxed{\xi \approx \frac{0,1103}{N}} \quad (3-5.12)$$

3-5.3 Método da largura de banda

As curvas de resposta em frequência mostradas na [Figura 3-4.4](#) dependem da razão de amortecimento. Logo, com base em qualquer dessas curvas, pode-se obter o correspondente amortecimento. Para isso, uma vez que se adote a aproximação de que a máxima amplificação dinâmica ocorra na coincidência de frequências, ($\omega = \omega_n$), denominada *amplificação ressonante*, tem-se da Equação 3-4.18 que:

$$\xi \approx \frac{1}{2A_{d/m\acute{a}x.}} \quad (3-5.13)$$

Contudo, como a referida curva não é obtida diretamente em análise experimental, e sim construída a partir da amplitude da resposta em regime permanente e do deslocamento estático, escreve-se a expressão anterior sob a nova forma:

$$\xi \approx \frac{u_{est.}}{2a_{p/m\acute{a}x.}} \rightarrow \boxed{\xi \approx \frac{f_o}{2k a_{p/m\acute{a}x.}}} \quad (3-5.14)$$

Nessa expressão, $a_{p/m\acute{a}x.}$ é a amplitude na condição de ressonância, como ilustra a [Figura 3-5.4](#). Essa expressão é a adotada em determinação da razão de amortecimento, no chamado *método da amplificação ressonante*.

Contudo, o referido método não é prático de ser utilizado porque requer a prévia obtenção do coeficiente de rigidez ou do deslocamento estático. É melhor proceder com o denominado *método da largura de banda* ou *da meia potência*, descrito a seguir.

A partir da amplitude na condição de ressonância identificada em uma curva de amplitude em regime permanente *versus* razão de frequência, identificam-se também as frequências forçantes ω_1 e ω_2 correspondentes a $(a_{p/m\acute{a}x.} / \sqrt{2})$, respectivamente situadas abaixo e acima

Amplitude em regime permanente

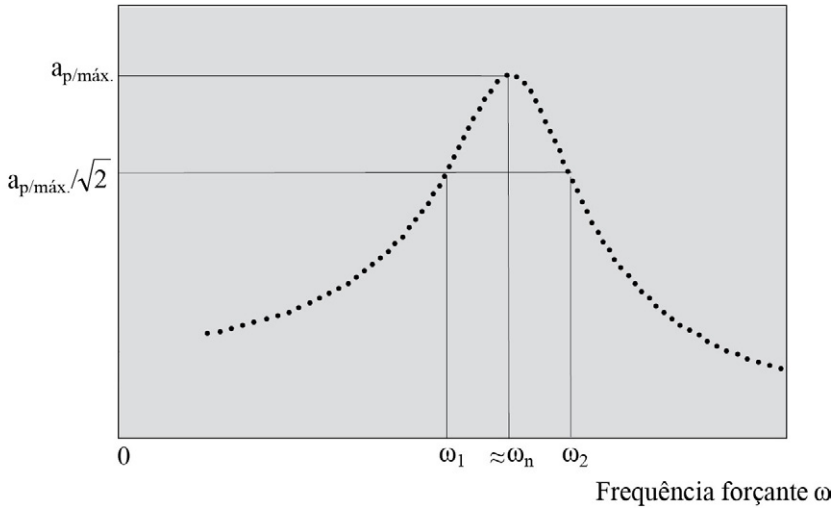


FIGURA 3-5.4 Amplitude em regime permanente *versus* frequência forçante.

da frequência natural do oscilador. Aquelas frequências estão mostradas na figura anterior e são denominadas *frequências de meia potência*.²¹

Além disso, com base na Equação 3-5.14 escreve-se:

$$a_{p/máx.} \equiv \frac{f_o}{2k\xi} \quad (3-5.15)$$

Assim, com a notação r_i em referência às razões ($r_1 = \omega/\omega_1$) e ($r_2 = \omega/\omega_2$), obtém-se a expressão anterior sob a nova forma:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{f_o}{2k\xi} = \frac{f_o}{k\sqrt{(1-r_i^2)^2 + (2r_i\xi)^2}} \rightarrow r_i^4 - 2(1-2\xi^2)r_i^2 + (1-8\xi^2) = 0 \quad (3-5.16)$$

que tem as soluções:

$$r_i^2 = (1-2\xi^2) \pm 2\xi\sqrt{1+\xi^2} \quad (3-5.17)$$

Na condição de $\xi \ll 1$, desconsidera-se ξ^2 frente à unidade e as soluções anteriores simplificam-se para a forma:

$$r_i^2 \equiv 1 \pm 2\xi \quad (3-5.18)$$

²¹ O nome *meia potência* é derivado de absorvedor de potência em circuito elétrico. Esse método requer grande precisão na determinação das amplitudes próximas à condição de ressonância.

que em expressão binomial fornecem:

$$\begin{cases} r_1 \equiv (1 - \xi)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2} 2\xi \dots \\ r_2 \equiv (1 + \xi)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2} 2\xi \dots \end{cases} \quad (3-5.19)$$

Logo, chega-se a:

$$r_2 - r_1 \equiv 2\xi \rightarrow \xi \equiv \frac{r_2 - r_1}{2} \rightarrow \boxed{\xi \equiv \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\omega_n}} \quad (3-5.20)$$

Com base em diversos resultados experimentais de amplitudes em regime permanente, pode-se ajustar uma curva de amplitude *versus* frequência e, a partir da mesma, obter as frequências para a aplicação da fórmula anterior. Também pode-se obter uma adequada estimativa da frequência natural do sistema, que é a correspondente ao ângulo de fase de 90°.

3-5.4 Valores usuais de amortecimento viscoso

Devido à complexidade do fenômeno de dissipação de energia, o coeficiente de amortecimento tem grande variabilidade. É necessário, contudo, buscar uma estimativa adequada, principalmente em caso de estruturas muito suscetíveis a vibrações, como pontes suspensas ou de grandes vãos, torres esbeltas, edifícios muito altos e lajes de grandes vãos. Essa estimativa é importante não só para garantir a integridade da estrutura, como também para a verificação do conforto humano de seus usuários.

O ideal é estimar o amortecimento com base em medição do comportamento da estrutura a uma dada ação. Contudo, em projeto de uma nova estrutura, por se tratar de um sistema físico ainda inexistente, não é possível determinação experimental e, em estruturas existentes, essa determinação costuma ser antieconômica. Assim, o usual é adotar razões de amortecimento com base em valores disponibilizados na literatura e em códigos normativos de projeto, como os reproduzidos na [Tabela 3-5.1](#) no caso da Engenharia Civil, que, com exceção de ação

Tabela 3-5.1 Razões de amortecimento viscoso.

Tipo de estrutura	ξ
Edifício até cerca de 100 metros de altura sob ações usuais:	
– Em concreto armado	0,020 – 0,030
– Em aço	0,015 – 0,025
Edifício acima de 100 metros de altura sob ações usuais:	
– Em concreto armado	0,010 – 0,020
– Em aço	0,007 – 0,013
Edifício sob ação sísmica:	
– Até 6 graus na escala Richter	0,020 – 0,050
– A partir de 6 graus na escala Richter	0,050 – 0,100
(Os códigos sísmicos costumam recomendar $\xi=0,05$ em caso de edificações sem sistema de isolamento de vibração)	

(Continua)

Tabela 3-5.1 Razões de amortecimento viscoso. (*cont.*)

Tipo de estrutura	ξ
Passarelas:	
– Em concreto armado	0,008 – 0,020
– Em concreto protendido	0,005 – 0,017
– Em aço	0,002 – 0,004
Pontes de vãos maiores do que 20 metros:	
– Em concreto armado	0,020
– Em concreto protendido	0,010
– Em aço/concreto	0,005
Pisos para atividades esportivas:	
– Em concreto armado	0,014 – 0,035
– Em concreto protendido	0,010 – 0,030
– Mistos em aço e concreto	0,006 – 0,020
Chaminés:	
– Com alvenaria	0,070 – 0,100
– Em aço	0,015 – 0,040

sísmica, são valores para estruturas em condições de serviço e sem dispositivos projetados especificadamente para dissipar energia.²² Observa-se que esses valores situam-se na faixa de 0,01 a 0,1 e que, para cada tipo de estrutura, têm grande dispersão.

3-5.5 Amortecimento viscoso equivalente

A resolução das equações de movimento com o amortecimento viscoso é mais simples do que com outros amortecimentos, além de apresentar resultados satisfatórios na maioria das aplicações. Justifica-se, assim, determinar um *amortecimento viscoso equivalente* a esses outros. Para isso, tem-se que a energia dissipada é igual ao trabalho realizado pela força de amortecimento entre dois instantes:

$$E_d = \int_{u_i}^{u_f} f_a(t) du \rightarrow E_d = \int_{t_i}^{t_f} f_a(t) \frac{du}{dt} dt = \int_{t_i}^{t_f} f_a(t) \dot{u}(t) dt \quad (3-5.21)$$

e faz-se equivalência através da imposição de idêntica dissipação por ciclo de oscilação harmônica em regime permanente.

A força de amortecimento viscoso tem a forma ($f_a(t) = c\dot{u}(t)$), e a velocidade em regime permanente sob a força harmônica ($f(t) = f_0 \cos(\omega t)$) é expressa por:

$$\dot{u}(t) = -\omega a_p \sin(\omega t - \phi) \quad (3-5.22)$$

onde a_p é a amplitude da oscilação, que é igual a $u_{est} A_d$.

Logo, como o ângulo de fase é irrelevante quanto à energia dissipada em um ciclo de oscilação, escreve-se essa energia como:

²² Vide Bachmann *et al.*, 1995 e Chopra, A.K., 2007.

$$E_{d/\text{viscoso}} = c \int_0^{2\pi/\omega} \dot{u}^2 dt = c \omega^2 a_p^2 \int_0^{2\pi/\omega} \sin^2(\omega t) dt \rightarrow \boxed{E_{d/\text{viscoso}} = \pi c \omega a_p^2} \quad (3-5.23)$$

A **Figura 3-5.5** mostra a representação de $f(t)/f_0$ versus $u(t)/u_{\text{est.}}$ no caso de $(\xi=0,1)$ e $(r=2,07)$. Trata-se de uma *curva* de forma elíptica que circunda área numericamente igual à energia dissipada, denominada *ciclo de histerese*.

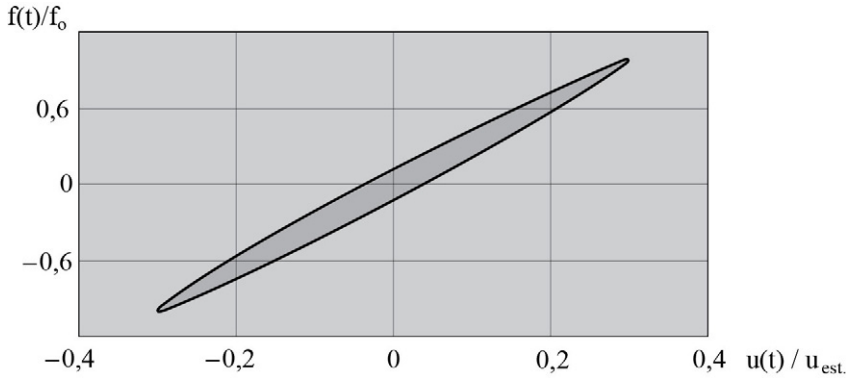


FIGURA 3-5.5 Curva de dissipação de energia, com $(\xi=0,1)$ e $(r=2,07)$.

A expressão de energia anterior é dependente da frequência forçante, o que não é confirmado por experimentos físicos. Mesmo assim, devido a referida simplicidade e bons resultados obtidos com o *amortecimento viscoso*, este é o mais utilizado. Para outro modelo em que a energia dissipada em um ciclo de oscilação seja designada por E_d , a partir daquela expressão escreve-se o coeficiente de amortecimento viscoso equivalente sob a forma:

$$\boxed{c_{\text{eq}} = \frac{E_d}{\pi \omega a_p^2}} \quad (3-5.24)$$

Para o *amortecimento de Coulomb*, substitui-se a Equação 3-1.3 na Equação 3-5.21, obtendo-se:

$$E_{d/\text{Coulomb}} = \mu N \int_0^{2\pi/\omega} (\text{sinal de } \dot{u}) \dot{u} dt \quad (3-5.25)$$

Com esse modelo e em caso de reduzida dissipação de energia, admite-se válida a expressão de velocidade expressa pela Equação 3-5.22 que implica:

$$E_{d/\text{Coulomb}} = \mu N a_p \int_0^{2\pi/\omega} (\text{sinal de } \sin(\omega t)) \omega \sin(\omega t) dt = \mu N a_p \int_0^{2\pi} (\text{sinal de } \sin \gamma) \sin \gamma d\gamma$$

$$E_{d/\text{Coulomb}} = \mu N a_p \left(\int_0^\pi \sin \gamma d\gamma - \int_\pi^{2\pi} \sin \gamma d\gamma \right) \rightarrow \boxed{E_{d/\text{Coulomb}} = 4\mu N a_p} \quad (3-5.26)$$

Vê-se que essa energia independe da frequência forçante. Com a sua substituição na Equação 3-5.24, chega-se ao coeficiente de amortecimento viscoso equivalente:

$$\boxed{c_{\text{eq}} = \frac{4\mu N}{\pi \omega a_p}} \quad (3-5.27)$$

que corresponde à razão de amortecimento equivalente:

$$\xi_{eq} = \frac{2\mu N}{\pi m \omega \omega_n a_p} \quad (3-5.28)$$

Para o amortecimento estrutural cuja força foi expressa na Equação 3-1.4, será demonstrado na Subseção 7-3.1.2 que a energia dissipada por ciclo de oscilação tem a forma:

$$E_{d/estrutural} = \pi a_p^2 k \eta \quad (3-5.29)$$

onde η é o *coeficiente de amortecimento estrutural*. Importa observar que essa dissipação é proporcional ao quadrado da amplitude e é independente da frequência forçante.

Assim, com a substituição dessa energia na Equação 3-5.24, obtém-se o coeficiente de amortecimento viscoso equivalente:

$$c_{eq} = \frac{\eta k}{\omega} \quad (3-5.30)$$

Dessa expressão de coeficiente obtém-se a razão de amortecimento equivalente:²³

$$\xi_{eq} = \frac{\eta k}{2\omega m \omega_n} = \frac{\eta \omega_n}{2\omega} \rightarrow \xi_{eq} = \frac{\eta}{2r} \quad (3-5.31)$$

E com base nessa equivalência e na Equação 3-5.4, o coeficiente de amortecimento estrutural pode ser obtido com o *método do decremento logarítmico* sob a forma:

$$\eta = \frac{\ln(u_1/u_2)}{\pi} \quad (3-5.32)$$

As expressões anteriores foram obtidas para regime permanente sob força harmônica e, portanto, se aplicam em movimentos oscilatórios próximos a harmônicos.

3-6 VIBRAÇÃO AMORTECIDA SOB FORÇA PERIÓDICA ARBITRÁRIA

Forças periódicas são relevantes não só porque ocorrem com grande frequência, como também porque o tratamento dessas forças é básico para a análise no domínio da frequência em caso de forças aperiódicas, como será apresentado no Capítulo 7. Para isso, considera-se uma função real de uma variável independente, contínua ou com um número finito de descontinuidades em qualquer intervalo fechado dessa variável. No contexto da presente análise dinâmica, a variável independente é a variável tempo, e a função é dita *periódica* quando atende a:

$$f(t + qT_0) = f(t) \quad (3-6.1)$$

em que ($q = 0, 1, 2, \dots$), sendo T_0 uma constante positiva denominada *período fundamental*. Assim, uma força periódica é definida com um padrão que se repete indefinidamente no

²³ Como essa equivalência depende da frequência forçante (o que não é comprovado experimentalmente), é usual adotar a aproximação de equivalência na condição de ressonância, isto é, ($\xi_{eq} = \eta/2$).

tempo, mesmo anteriormente ao instante considerado como origem. Consequentemente, a resposta de um sistema mecânico sob uma ação periódica é em regime permanente. Essa força foi ilustrada na [Figura 3-1.1](#), e o referido período se relaciona com a *frequência fundamental* ($\omega_0 = 2\pi/T_0$) dessa força.

Uma função periódica, sob certas condições, pode ser desenvolvida em série infinita de funções harmônicas, denominada *série de Fourier*.²⁴ Pode-se adotar desenvolvimento em notação trigonométrica e desenvolvimento em notação exponencial, ambos úteis em diversas áreas de conhecimento. O primeiro desses desenvolvimentos é o mais simples e utilizado na determinação da resposta forçada de oscilador simples (de comportamento linear) no domínio do tempo, como está apresentado nesta seção. Já o segundo tem álgebra complexa, é utilizado em determinação dessa resposta através do domínio da frequência e será apresentado na Seção 7-1.

3-6.1 Série de Fourier em notação trigonométrica

A *série de Fourier* em notação trigonométrica se escreve:

$$f(t) = a_0 + \sum_{q=1}^{\infty} (a_q \cos(q\omega_0 t) + b_q \sin(q\omega_0 t)) \quad (3-6.2)$$

Nesta série, têm-se os *coeficientes de Fourier*:

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) dt \\ a_q = \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \cos(q\omega_0 t) dt \quad \text{com } q = 1, 2, \dots \\ b_q = \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \sin(q\omega_0 t) dt \quad \text{com } q = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3-6.3)$$

em que t_1 é um instante qualquer, a_0 é o valor médio da função, e o primeiro harmônico da série tem a frequência fundamental de $f(t)$.

No caso de $(f(t) = f(-t))$, diz-se que a função é *par* e os coeficientes b_q são nulos, tendo a série apenas cossenos. Já no caso de $(f(t) = -f(-t))$, a função é dita *ímpar* e os coeficientes a_0 e a_q são nulos, o que implica desenvolvimento em senos.

Para escrever essa série em forma mais compacta, adotam-se as notações:

$$\begin{cases} c_0 = \frac{a_0}{2} \\ c_q = \sqrt{a_q^2 + b_q^2} \end{cases} \quad (3-6.4)$$

²⁴ Essa série foi batizada em homenagem ao físico e matemático francês Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), que apresentou os seus fundamentos em 1822. A condição para o seu desenvolvimento é que a função seja contínua ou tenha um número finito de descontinuidades. Em caso de descontinuidades, o desenvolvimento da série fornece valores médios nas descontinuidades, o que é conhecido como *Fenômeno de Gibbs*, em homenagem ao cientista americano Josiah Willard Gibbs (1839-1903).

Logo, o q -ésimo termo do somatório da presente série escreve-se:

$$\begin{aligned} a_q \cos(q\omega_0 t) + b_q \sin(q\omega_0 t) &= c_q \left(\frac{a_q}{c_q} \cos(q\omega_0 t) + \frac{b_q}{c_q} \sin(q\omega_0 t) \right) \\ \rightarrow a_q \cos(q\omega_0 t) + b_q \sin(q\omega_0 t) &= c_q \cos(q\omega_0 t + \phi_q) \end{aligned} \quad (3-6.5)$$

em que se tem o ângulo de fase:

$$\phi_q = \arctg(b_q/a_q) \quad (3-6.6)$$

Assim, a série expressa na Equação 3-6.2 toma a forma mais compacta:

$$f(t) = \sum_{q=0}^{\infty} c_q \cos(q\omega_0 t + \phi_q) \quad (3-6.7)$$

A representação gráfica de c_q versus $q\omega_0$ é denominada *espectro de amplitudes* ou *de Fourier*. Esse espectro evidencia o *conteúdo de frequência* da função periódica ao mostrar a importância da participação de cada função harmônica no desenvolvimento em série, que usualmente é tratada com um número finito de funções. A representação de ϕ_q versus $q\omega_0$ é chamada de *espectro de ângulos de fases*.

EXEMPLO 3-6.1

Faz-se a decomposição em *série de Fourier* da função periódica representada na [Figura E3-6.1a](#).

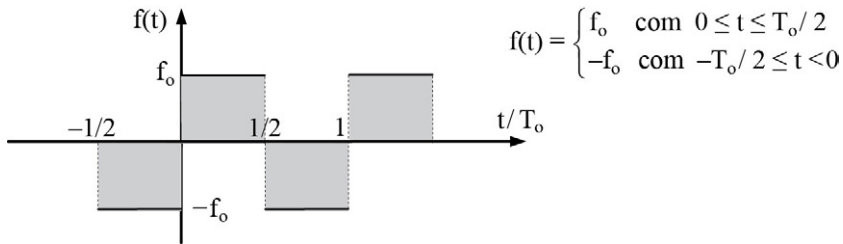


FIGURA E3-6.1a Função em pulsos retangulares.

Por se tratar de uma função ímpar, os coeficientes a_0 e a_q são nulos, e a terceira das expressões da Equação 3-6.3 fornece:

$$b_q = \frac{2}{T_0} \left(\int_{-T_0/2}^0 (-f_0) \sin\left(\frac{2\pi q}{T_0} t\right) dt + \int_0^{T_0/2} f_0 \sin\left(\frac{2\pi q}{T_0} t\right) dt \right) = \frac{4f_0}{\pi q T_0} \sin\left(\frac{\pi q}{2}\right)^2$$

Logo, chega-se ao resultado:

$$f(t) = \frac{4f_0}{\pi T_0} \sum_{q=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{q} \sin\left(\frac{\pi q}{2}\right)^2 \sin\left(\frac{2\pi q}{T_0} t\right)$$

A Figura E3-6.1b mostra as representações dessa série com 1, 3, 5, 7 e 23 termos, e a [Figura E3-6.1c](#), a representação com 99 termos. Observa-se que essas representações passam pelos pontos médios das descontinuidades da função, sem representação perfeita dessas descontinuidades.

Os coeficientes a_q são nulos, por se tratar de função ímpar, e os coeficientes b_q , com q par, são nulos. A [Figura E3-6.1d](#) mostra o correspondente espectro de amplitudes, quanto aos onze

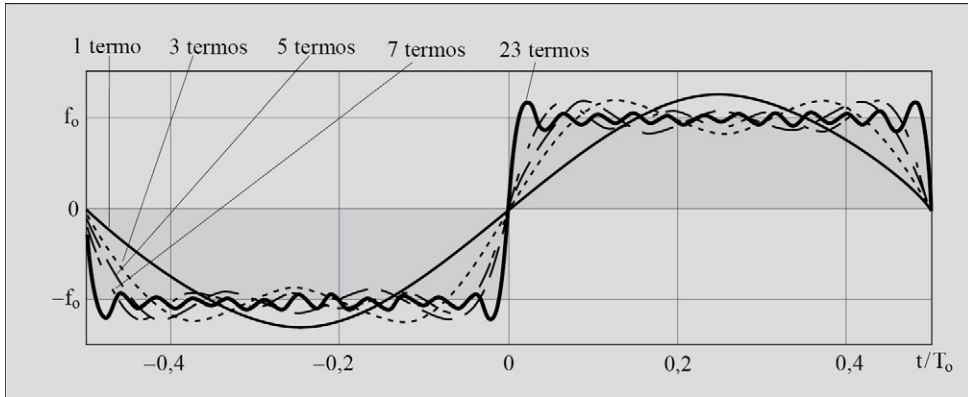


FIGURA E3-6.1b Representações da série com 1, 3, 5, 7 e 23 termos.

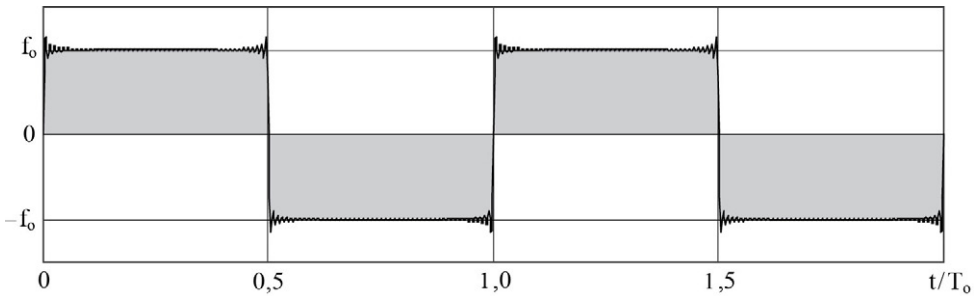


FIGURA E3-6.1c Representação da série com 99 termos.

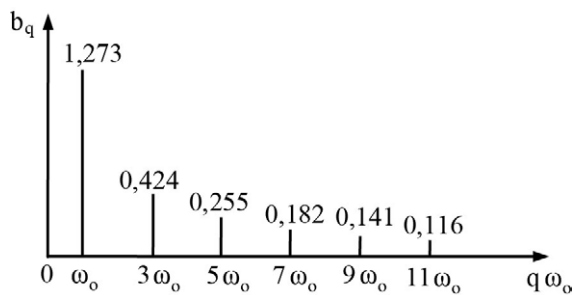


FIGURA E3-6.1d Espectro de amplitudes.

primeiros termos da série. Vê-se que os coeficientes b_q decrescem de valor, o que expressa redução da participação dos componentes harmônicos, à medida que cresce a ordem do coeficiente.

Observa-se que o espaçamento entre as frequências de dois componentes harmônicos sucessivos na série é a frequência fundamental da função periódica, $\Delta\omega = \omega_0 = 2\pi/T_0$, e, portanto, esse espaçamento cresce com essa frequência. Essa é uma relevante interpretação porque, no Capítulo 7, funções aperiódicas serão consideradas como periódicas de períodos que tendem ao infinito, quando então aquele espaçamento tende a zero e a distribuição dos componentes harmônicos tende a ser contínua.

3-6.2 Resposta em regime permanente

Com o desenvolvimento de $f(t)$ em *série de Fourier*, a equação diferencial de movimento toma a forma:²⁵

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = a_0 + \sum_{q=1}^{\infty} (a_q \cos(q\omega_0 t) + b_q \sin(q\omega_0 t)) \quad (3-6.8)$$

A solução particular dessa equação com os termos em cosseno se escreve com base na Equação 3-4.8:

$$u(t)_{\cos} = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{a_q}{k \sqrt{(1-r_q^2)^2 + (2r_q\xi)^2}} \cos(q\omega_0 t - \phi_q) \quad (3-6.9)$$

em que se tem a razão de frequências:

$$r_q = \frac{q\omega_0}{\omega_n} \rightarrow r_q = \frac{q\omega_0}{\sqrt{k/m}} \quad (3-6.10)$$

e o ângulo de fase:

$$\phi_q = \arctg \frac{2\xi r_q}{1-r_q^2} \quad (3-6.11)$$

Com essa expressão de ângulo, a solução anterior tem o seguinte desenvolvimento:

$$\begin{aligned} u(t)_{\cos} &= \sum_{q=1}^{\infty} \frac{a_q}{k} \frac{\sqrt{(1-r_q^2)^2 + (2r_q\xi)^2}}{(1-r_q^2)^2 + (2r_q\xi)^2} (\cos(q\omega_0 t) \cos \phi_q + \sin(q\omega_0 t) \sin \phi_q) \\ u(t)_{\cos} &= \sum_{q=1}^{\infty} \frac{a_q}{k} \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{2r_q\xi}{1-r_q^2}\right)^2}}{(1-r_q^2)^2 + (2r_q\xi)^2} ((1-r_q^2) \cos(q\omega_0 t) + 2r_q\xi \sin(q\omega_0 t)) \cos \phi_q \\ u(t)_{\cos} &= \sum_{q=1}^{\infty} \frac{a_q}{k} \frac{\sqrt{1 + \tan^2 \phi_q}}{(1-r_q^2)^2 + (2r_q\xi)^2} ((1-r_q^2) \cos(q\omega_0 t) + 2r_q\xi \sin(q\omega_0 t)) \cos \phi_q \\ u(t)_{\cos} &= \sum_{q=1}^{\infty} \frac{a_q}{k} \frac{(1-r_q^2) \cos(q\omega_0 t) + 2r_q\xi \sin(q\omega_0 t)}{(1-r_q^2)^2 + (2r_q\xi)^2} \end{aligned} \quad (3-6.12)$$

²⁵ A ideia de expressar pequenas oscilações como uma soma de movimentos harmônicos simples é atribuída ao matemático e físico holandês Daniel Bernoulli (1700-1782).

Além disso, como a solução do oscilador simples a cada termo em seno é defasada de 90° em relação à solução quanto ao correspondente termo em cosseno, a solução com os termos em seno da equação de movimento anterior se escreve:

$$u(t)_{\sin} = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{b_q}{k} \frac{(1-r_q^2) \sin(q\omega_o t) - 2r_q \xi \cos(q\omega_o t)}{(1-r_q^2)^2 + (2r_q \xi)^2} \quad (3-6.13)$$

Logo, a solução em regime permanente da equação de movimento com a força desenvolvida em *série de Fourier* é a solução ao termo constante a_o , mais a solução para os termos em cosseno adicionada à solução para os termos em seno, e tem a forma:²⁶

$$u(t) = \frac{a_o}{k} + \frac{1}{k} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{(1-r_q^2)^2 + (2r_q \xi)^2} \cdot \left((a_q(1-r_q^2) - 2b_q r_q \xi) \cos(q\omega_o t) + (b_q(1-r_q^2) + 2a_q r_q \xi) \sin(q\omega_o t) \right) \quad (3-6.14)$$

Diz-se que há ressonância em caso de um dos valores de $q\omega_o$ coincidir com a frequência natural do sistema. Contudo, como os *coeficientes de Fourier* decrescem de valor com o aumento da ordem desses coeficientes, essa coincidência só é relevante para um dos primeiros harmônicos.

3-7 VIBRAÇÃO SOB FORÇA APERIÓDICA

Forças aperiódicas são as mais gerais e as de maior ocorrência na prática da engenharia, como também as que conduzem a análises mais elaboradas.²⁷ Com esse tipo de força não há solução em regime permanente porque a resposta do oscilador não tem um padrão definido, embora permaneça indefinidamente no tempo.

Além disso, não é possível obter, de forma analítica explícita, a solução da equação de movimento do oscilador simples sob força aperiódica arbitrária. É preciso fazer simplificações e resoluções numéricas, com um dos seguintes encaminhamentos que fornecem soluções em sucessivos instantes:

1. Particularização da ação externa em uma sequência de leis simples e resolução exata da equação de movimento do oscilador subamortecido linear com cada uma dessas leis. Isso a partir da chamada *integral de Duhamel* ou em resolução direta da equação de movimento.
2. Integração numérica da equação de movimento de osciladores lineares ou não lineares, subamortecidos ou não, com a ação externa discretizada em uma sequência de instantes.
3. Discretização da ação em sequência de valores do tempo e uso da transformada de Fourier discreta na equação de movimento do oscilador linear com amortecimento viscoso ou amortecimento estrutural.

²⁶ Embora essa solução tenha infinitos termos, na prática considera-se apenas um grupamento dos primeiros harmônicos. Em se tratando de sistema não amortecido, basta fazer nessa solução ($\xi=0$).

²⁷ Por essa razão, quando possível, as forças aperiódicas são substituídas por periódicas arbitrárias ou harmônicas equivalentes, que conduzem a análises mais simples.

Os dois primeiros procedimentos são no domínio do tempo e recursivos, isto é, fornecem a solução em cada instante a partir da(s) solução(ões) de instante(s) anteriore(s), com base em uma lei simples para a ação externa em cada espaçamento de tempo. Já o terceiro procedimento baseia-se em conversão da equação diferencial de movimento do domínio do tempo ao domínio da frequência, em aplicação da *transformada de Fourier*, de maneira a recair na resolução de uma simples equação algébrica, e a conversão da solução nesse domínio ao do tempo, em aplicação da *transforma de Fourier inversa*. Aqueles dois primeiros procedimentos são desenvolvidos a seguir, e o terceiro será detalhado no Capítulo 7.

3-7.1 Integral de Duhamel

Uma resolução clássica da equação de movimento do oscilador linear subamortecido sob força aperiódica é através da *integral de Duhamel*.²⁸ Para desenvolvê-la, considera-se uma força de lei arbitrária no tempo, $f(t)$ como ilustra a parte esquerda da próxima figura, em que τ é um instante qualquer. A resultante de força de intensidade

$$I = f(\tau) d\tau \quad (3-7.1)$$

representada em hachurado na [Figura 3-7.1](#), é um *impulso* de duração infinitesimal, também denominado *função pulso*.²⁹

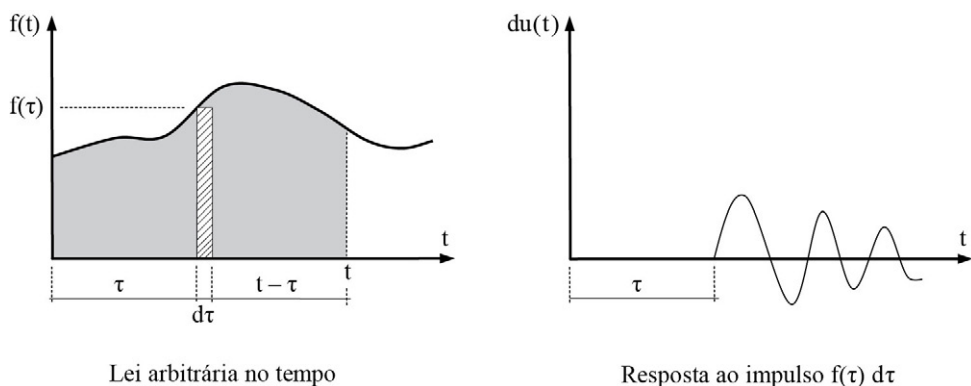


FIGURA 3-7.1 Identificação de impulso em uma força aperiódica.

Com a aplicação da força $f(t)$ a uma massa m , tem-se pela segunda lei de Newton:

$$m \frac{d\ddot{u}}{d\tau} = f(\tau) \rightarrow d\ddot{u} = \frac{f(\tau) d\tau}{m}$$

Assim, para obter o deslocamento do oscilador simples em um instante genérico t , devido à atuação do impulso $f(\tau) d\tau$ em um instante τ anterior a t , em caso de amortecimento

²⁸ Nome em homenagem ao físico e matemático francês Jean Marie Constant Duhamel (1797-1872). E trata-se de uma *integral de convolução* de duas funções, como será esclarecido na Subseção 7-2.1

²⁹ Na Seção 1-2, o *impulso* de uma força foi definido como a alteração da quantidade de movimento entre dois instantes. Esse é um impulso de duração finita que tem a mesma dimensão física que o presente impulso, $\text{kg.m/s} = \text{N.s}$.

subcrítico, basta considerar ($u_{0|\tau}=0$) e ($v_{0|\tau}=f(\tau) d\tau/m$) como condições iniciais na Equação 3-3.17 (que expressa a resposta de deslocamento em vibração livre desse oscilador, como ilustra a parte direita da figura anterior), juntamente com a troca da variável t por $(t - \tau)$, de maneira a escrever:³⁰

$$du(t) = e^{-\xi\omega_a(t-\tau)} \frac{f(\tau) d\tau}{m\omega_a} \sin(\omega_a(t-\tau)), t > \tau \quad (3-7.2)$$

Logo, como toda força aperiódica pode ser considerada como uma sucessão de impulsos de curta duração e é válido o princípio da superposição (por se tratar de modelo linear), escreve-se a integral da solução elementar anterior a partir do início de atuação dos impulsos até o instante t , para obter a resposta de deslocamento àquela força, em condições nulas de deslocamento e de velocidade no instante inicial,

$$u(t) = \frac{1}{m\omega_a} \int_0^t f(\tau) e^{-\xi\omega_a(t-\tau)} \sin(\omega_a(t-\tau)) d\tau \quad (3-7.3)$$

Essa expressão é conhecida como *integral de Duhamel*. Para considerar condições iniciais não nulas, a esse resultado deve ser acrescentada a solução de vibração livre subamortecida expressa na Equação 3-3.17. Naturalmente, com sistema não amortecido, a integral anterior particulariza-se em:

$$u(t) = \frac{1}{m\omega_n} \int_0^t f(\tau) \sin(\omega_n(t-\tau)) d\tau \quad (3-7.4)$$

Embora se tenha essa solução conceitual para uma excitação aperiódica qualquer, a correspondente integração analítica só é possível em casos simples. Soluções em valores discretos do tempo podem ser obtidas através de integração numérica, como a *regra do trapézio* ou a *regra de Simpson*. Contudo, é mais conveniente efetuar analiticamente a *integral de Duhamel* com expressões simples de força e combinar as correspondentes soluções na construção de um procedimento de resolução numérica, em que a solução em cada instante é obtida a partir da solução do instante anterior. Para isso, consideram-se as forças de leis mostradas na [Figura 3-7.2](#), em que são adotadas notações que facilitam o desenvolvimento do referido procedimento.

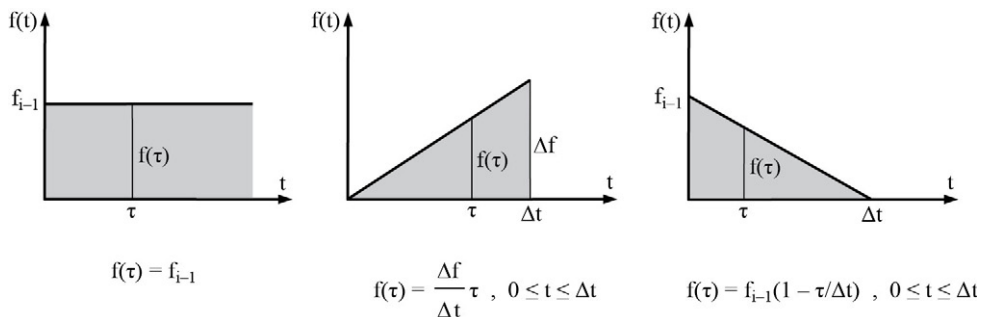


FIGURA 3-7.2 Forças de leis simples.

³⁰ A parcela $e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \sin(\omega_a(t-\tau))/(m\omega_a)$ é a resposta a um impulso unitário atuante no instante τ .

Para a primeira representação de força mostrada na figura anterior e denominada *função degrau*, obtêm-se, com a *integral de Duhamel*, as soluções de deslocamento e de velocidade:³¹

$$u(t) = \frac{1}{m\omega_a} \int_0^t f_{i-1} e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \sin(\omega_a(t-\tau)) d\tau \quad (3-7.5)$$

$$\rightarrow u(t) = \frac{f_{i-1}}{k} \left(1 - e^{-\xi\omega_n t} \left(\cos(\omega_a t) + \frac{\xi\omega_n}{\omega_a} \sin(\omega_a t) \right) \right) \quad (3-7.6)$$

$$\rightarrow \dot{u}(t) = \frac{f_{i-1}}{k} \left(\xi\omega_n e^{-\xi\omega_n t} \left(\cos(\omega_a t) + \frac{\xi\omega_n}{\omega_a} \sin(\omega_a t) \right) - e^{-\xi\omega_n t} (-\omega_a \sin(\omega_a t) + \xi\omega_n \cos(\omega_a t)) \right) \quad (3-7.7)$$

Na [Figura 3-7.3](#) está representada a solução de deslocamento anterior, com três valores distintos de amortecimento. Observa-se que, nos casos amortecidos, há uma amplificação inicial de deslocamento, seguida de oscilações que decrescem ao longo do tempo, com o sistema tendendo para a posição de equilíbrio estático sob a atuação da força f_{i-1} .³²

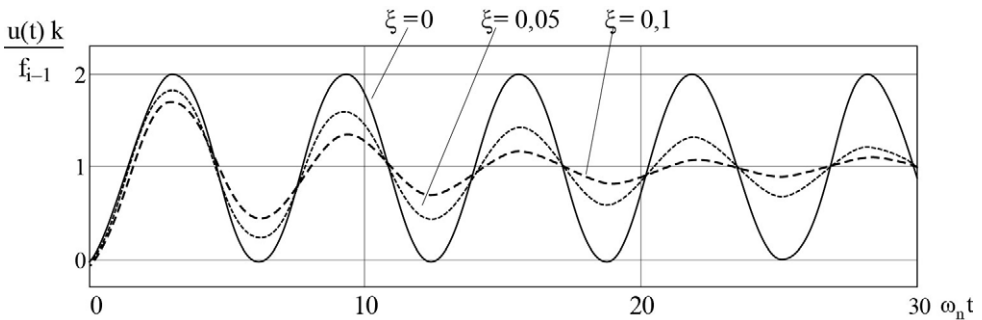


FIGURA 3-7.3 Resposta normalizada no caso da primeira representação de força da [Figura 3-7.2](#).

No caso de amortecimento nulo, a solução anterior se particulariza em:

$$u(t) = \frac{f_{i-1}}{k} (1 - \cos(\omega_n t)) \quad (3-7.8)$$

o que implica deslocamento máximo igual a duas vezes o deslocamento estático, f_{i-1}/k .

Para a segunda força representada na [Figura 3-7.2](#) e denominada *função rampa*, obtêm-se, com a *integral de Duhamel*, a solução de deslocamento:

³¹ Essa solução pode também ser obtida através da superposição da solução estática f_{i-1}/k com a solução de vibração livre amortecida expressa na Equação 3-3.17, particularizada a condições iniciais nulas.

³² O valor máximo da resposta menos o deslocamento estático é denominado *overshoot*. A referida figura mostra que a razão de amortecimento tem influência relevante no *overshoot* e no decaimento das oscilações.

$$u(t) = \frac{1}{m\omega_a} \int_0^t \frac{\Delta f}{\Delta t} \tau e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \sin(\omega_a(t-\tau)) d\tau, \quad 0 \leq t \leq \Delta t \quad (3-7.9)$$

$$\rightarrow u(t) = \frac{\Delta f}{k} \left\{ -\frac{2\xi}{\omega_n \Delta t} + \frac{t}{\Delta t} + e^{-\xi\omega_n t} \left(\frac{2\xi \cos(\omega_a t)}{\omega_n \Delta t} + \frac{2\xi^2 - 1}{\omega_a \Delta t} \sin(\omega_a t) \right) \right\} \quad (3-7.10)$$

$$\rightarrow \begin{cases} \dot{u}(t) = \frac{\Delta f}{k} \left\{ \frac{1}{\Delta t} - \xi\omega_n e^{-\xi\omega_n t} \left(\frac{2\xi \cos(\omega_a t)}{\omega_n \Delta t} + \frac{2\xi^2 - 1}{\omega_a \Delta t} \sin(\omega_a t) \right) \right. \\ \left. - e^{-\xi\omega_n t} \left(-\frac{2\xi\omega_a \sin(\omega_a t)}{\omega_n \Delta t} + \frac{2\xi^2 - 1}{\Delta t} \cos(\omega_a t) \right) \right\} \end{cases} \quad (3-7.11)$$

Já para a terceira força representada na [Figura 3-7.2](#) e denominada *função declive* obtem-se, com a *integral de Duhamel*:

$$u(t) = \frac{1}{m\omega_a} \int_0^t \left(1 - \frac{\tau}{\Delta t} \right) e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \sin(\omega_a(t-\tau)) d\tau, \quad 0 \leq t \leq \Delta t \quad (3-7.12)$$

$$\rightarrow u(t) = \frac{1}{m\omega_a} \left(\int_0^t f_{i-1} e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \sin(\omega_a(t-\tau)) d\tau - \int_0^t \frac{f_{i-1}}{\Delta t} \tau e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \sin(\omega_a(t-\tau)) d\tau \right)$$

Logo, a partir das Equações 3-7.6 e 3-7.10, tem-se como resultado da expressão anterior

$$u(t) = \frac{f_{i-1}}{k} \left(1 - \frac{t}{\Delta t} + \frac{2\xi}{\omega_n \Delta t} - e^{-\xi\omega_n t} \left(\left(1 + \frac{2\xi}{\omega_n \Delta t} \right) \cos(\omega_a t) + \left(\frac{2\xi^2 - 1}{\omega_a \Delta t} + \frac{\xi\omega_n}{\omega_a} \right) \sin(\omega_a t) \right) \right) \quad (3-7.13)$$

Para utilizar as fórmulas anteriores em caso de força externa de lei não linear, faz-se a discretização dessa força em uma sequência de segmentos lineares, em espaçamentos ($\Delta t = t_i - t_{i-1}$) constantes, por simplicidade, como mostra a [Figura 3-7.4](#).

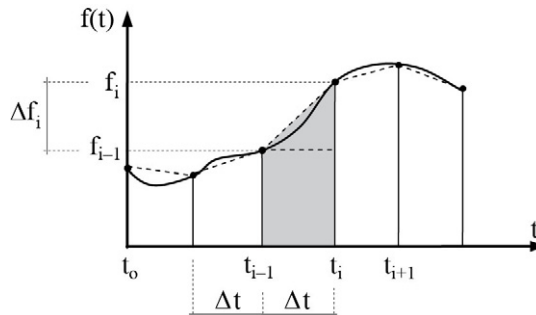


FIGURA 3-7.4 Força discretizada e interpolada por segmentos lineares.

A solução no instante t_0 é a solução de vibração livre devida às condições iniciais ao movimento, mais a solução forçada sob a atuação do primeiro segmento de força. A partir do segundo instante, o deslocamento e a velocidade ao final do espaçamento anterior são considerados como condições iniciais a uma nova vibração livre, que é adicionada à solução

forçada sob o novo segmento de força. Assim, em um instante genérico, a parcela de influência dessas condições é escrita com base na Equação 3-3.17, sob a forma:

$$u(t_i) = u_i = e^{-\xi\omega_n\Delta t} \left(u_{i-1} \cos(\omega_a\Delta t) + \frac{u_{i-1}\xi\omega_n + \dot{u}_{i-1}}{\omega_a} \sin(\omega_a\Delta t) \right) \quad (3-7.14)$$

que corresponde à expressão de velocidade:

$$\begin{aligned} \dot{u}(t_i) = & -\xi\omega_n e^{-\xi\omega_n\Delta t} \left(u_{i-1} \cos(\omega_a\Delta t) + \frac{u_{i-1}\xi\omega_n + \dot{u}_{i-1}}{\omega_a} \sin(\omega_a\Delta t) \right) \\ & + e^{-\xi\omega_n\Delta t} (-u_{i-1}\omega_a \sin(\omega_a\Delta t) + (u_{i-1}\xi\omega_n + \dot{u}_{i-1}) \cos(\omega_a\Delta t)) \end{aligned} \quad (3-7.15)$$

Além disso, caso venha a ser de interesse determinar a aceleração em cada instante, esta pode ser obtida diretamente da equação de movimento no instante t_i , sob a forma:

$$m\ddot{u}_i + c\dot{u}_i + ku_i = f_i \quad \rightarrow \quad \ddot{u}_i = (f_i - c\dot{u}_i - ku_i)/m \quad (3-7.16)$$

Esse procedimento é apresentado no [Algoritmo 3-7.1](#), em que, para facilidade de entendimento, não foram eliminados cálculos repetitivos.

– Estabelecimento de k , m , ξ , u_o , \dot{u}_o , Δt e f_i em cada discretização do tempo.

$\omega_n = \sqrt{k/m}$, $\omega_a = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$, $t = \Delta t$

→ $i = 1 \rightarrow$ número de pontos de discretização

u_i calculado com Equação 3-7.14

\dot{u}_i calculado com Equação 3-7.15

Se $f_{i-1} \neq 0$	$u_i + (u_i \text{ calculado com Equação 3-7.6})$
	$\dot{u}_i + (\dot{u}_i \text{ calculado com Equação 3-7.7})$
$\Delta f = f_i - f_{i-1}$	
Se $\Delta f \neq 0$	$u_i + (u_i \text{ calculado com Equação 3-7.10})$
	$\dot{u}_i + (\dot{u}_i \text{ calculado com Equação 3-7.11})$

ALGORITMO 3-7.1 Resolução incremental com a *integral de Duhamel*.

EXEMPLO 3-7.1

Para exemplificar e comprovar o procedimento incremental anterior, utiliza-se a idealização em oscilador simples amortecido para o reservatório semiesférico cheio descrito no Exemplo 2-4.2, que tem as características rerepresentadas na [Figura E3-7.1a](#). Adota-se a razão de amortecimento ($\xi=0,03$), condições iniciais nulas e dois casos de ações externas, a saber: a força harmônica de $4,474 \cdot 10^6 \cos(10t)$ em newtons e a força de impacto representada na parte direita da mesma figura.

Para o caso da força harmônica cossenoidal, na [Figura E3-7.1b](#) estão representados os históricos de deslocamento obtidos com o espaçamento ($\Delta t = 0,05 \approx T_n/23,5 \approx T/12,6$). O pontilhado representa o resultado do presente procedimento, e a linha contínua representa, com sinal contrário, a solução exata expressa na Equação 3-4.10. Isso porque a resposta com aquele procedimento inicia-se com valores crescentes, devido à aplicação instantânea de força com sinal positivo, e essa solução exata inicia-se com valores decrescentes devido à imposição de condições iniciais nulas ao movimento (como foi mostrado na [Figura 3-4.1](#)). Observa-se coincidência de representações.

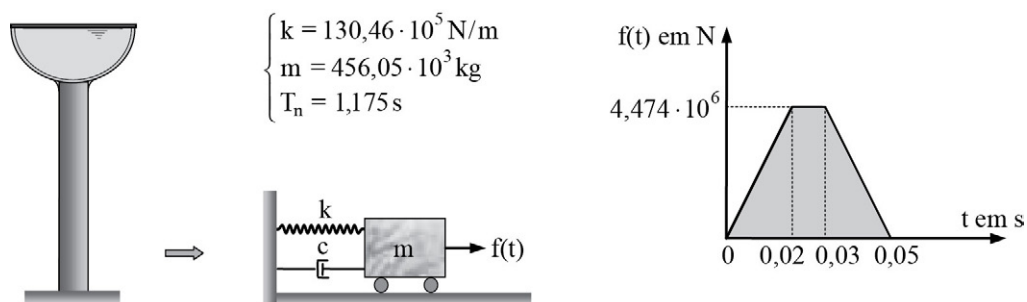


FIGURA E3-7.1a Idealização em oscilador simples e força de impacto.

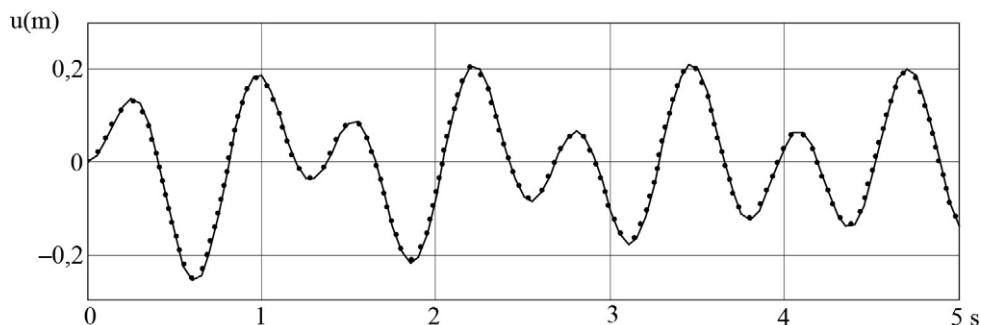


FIGURA E3-7.1b Históricos de deslocamento sob a força harmônica, com ($\Delta t = 0,05$ s).

Quanto à força de impacto, a [Figura E3-7.1c](#) mostra os históricos de deslocamento obtidos com o espaçamento ($\Delta t = 0,005$ s). Em pontilhado está representado o resultado do presente procedimento, e em linha contínua está mostrado o histórico obtido com a resolução direta por segmentos lineares da ação externa que será desenvolvida na próxima subseção. Vê-se coincidência gráfica. Nota-se que o máximo valor de deslocamento ocorreu pouco depois de cessar o impacto e antes de se evidenciar o efeito do amortecimento, o que justifica desconsiderar dissipação de energia em análise de estruturas sob forças impulsivas.

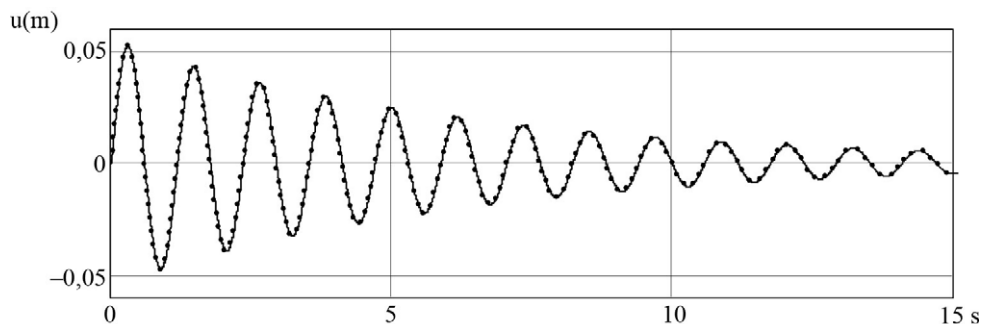


FIGURA E3-7.1c Históricos de deslocamento sob a força de impacto, com ($\Delta t = 0,005$ s).

A Figura E3-7.1d realça o efeito do amortecimento em resposta de longa duração, no caso da força de impacto. Em linha contínua está representada a resposta não amortecida e em linha pontilhada está mostrada a resposta com o amortecimento ($\xi=0,03$), ambas obtidas com o espaçamento ($\Delta t = 0,005$ s).

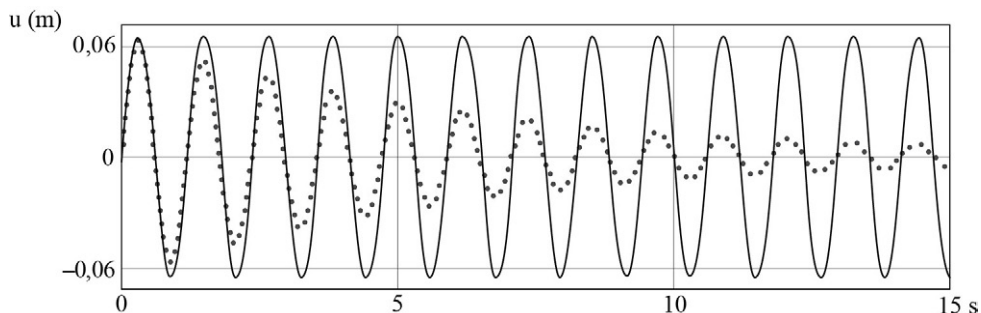


FIGURA E3-7.1d Históricos de deslocamento, com e sem amortecimento e ($\Delta t = 0,005$ s).

O oscilador do exemplo anterior tem período igual a 1,175 s, e a duração do impulso é de ($0,05\text{s} \approx T_n/23$). Experimentos numéricos evidenciam que, com os amortecimentos usuais das estruturas e impulso de duração inferior a 1/5 do período natural, o deslocamento máximo praticamente independe da lei de definição do impulso e do amortecimento, sendo essencialmente dependente da grandeza do impulso expressa por $\int f(t)dt$.

3-7.2 Resolução direta por segmentos lineares da ação externa

Na subseção anterior, foi desenvolvida a *integral de Duhamel* com a qual, em casos simples, é possível a obtenção de soluções analíticas. Com base em soluções dessa integral, foi desenvolvido um procedimento de resolução passo a passo com a ação externa representada por uma sucessão de segmentos lineares. Após essa simplificação, excetuadas as aproximações da aritmética em ponto-flutuante inerente aos computadores digitais, não há aproximações adicionais, e a acurácia da solução melhora à medida que se reduz o espaçamento de tempo adotado na definição dos referidos segmentos. A seguir, com a mesma representação, resolve-se exata e diretamente a equação de movimento. A vantagem é a obtenção de um algoritmo mais simples e de menor volume de cálculo que o anterior, com a consideração das condições iniciais ao movimento.³³

Com o presente desenvolvimento, diferentemente das resoluções recursivas de integração numérica que serão apresentadas na próxima subseção, não há acumulação de erros. Assim, em análise com qualquer ação externa e a adoção de um espaçamento Δt suficientemente pequeno, obtém-se solução com a acurácia que se desejar.

³³ Procedimento semelhante foi apresentado por Nigam, N.C. & Jennings, P.C., 1968, *Digital Calculation of Response Spectra from Strong-Motion Earthquake Records*, Earthquake Engineering Research Laboratory, California Institute of Technology, California.

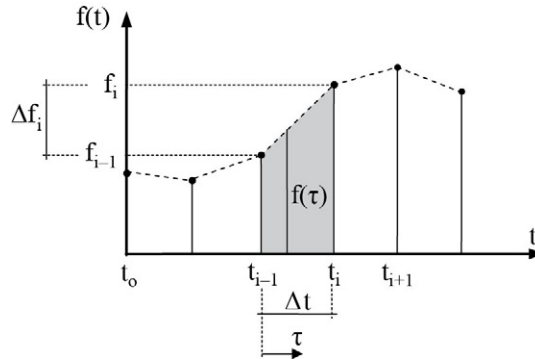


FIGURA 3-7.5 Força definida por segmentos lineares.

A [Figura 3-7.5](#) mostra representação de valores discretos de força e o espaçamento Δt , em que se adota a lei linear:

$$f(\tau) = f_{i-1} + \frac{\Delta f_i}{\Delta t} \tau, \quad 0 \leq \tau \leq \Delta t = t_i - t_{i-1} \quad (3-7.17)$$

Logo, como ($c = 2\xi m\omega_n$), a equação diferencial do movimento subamortecido toma a forma:

$$m\ddot{u}(\tau) + 2\xi m\omega_n \dot{u}(\tau) + ku(\tau) = f_{i-1} + \frac{\Delta f_i}{\Delta t} \tau \quad (3-7.18)$$

Pode-se verificar que essa equação tem a solução particular:

$$u_p(\tau) = \frac{f_{i-1}}{m\omega_n^2} - \frac{2\xi\Delta f_i}{m\omega_n^3\Delta t} + \frac{\Delta f_i}{m\omega_n^2\Delta t} \tau \quad (3-7.19)$$

Logo, a solução completa é a solução complementar (obtida a partir da Equação 3-3.15 com a troca de t por τ) mais a solução anterior, o que se escreve:

$$u(\tau) = e^{-\xi\omega_n\tau} (a_1 \cos(\omega_a\tau) + a_2 \sin(\omega_a\tau)) + \frac{f_{i-1}}{m\omega_n^2} - \frac{2\xi\Delta f_i}{m\omega_n^3\Delta t} + \frac{\Delta f_i}{m\omega_n^2\Delta t} \tau \quad (3-7.20)$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \dot{u}(\tau) = & -\xi\omega_n e^{-\xi\omega_n\tau} (a_1 \cos(\omega_a\tau) + a_2 \sin(\omega_a\tau)) \\ & + e^{-\xi\omega_n\tau} (-a_1\omega_a \sin(\omega_a\tau) + a_2\omega_a \cos(\omega_a\tau)) + \frac{\Delta f_i}{m\omega_n^2\Delta t} \end{aligned} \quad (3-7.21)$$

Além disso, com as condições iniciais referentes à atuação de Δf_i , que são u_{i-1} e \dot{u}_{i-1} , obtêm-se (das duas equações anteriores) as constantes:

$$\begin{cases} a_1 = u_{i-1} - \frac{f_{i-1}}{m\omega_n^2} + \frac{2\xi\Delta f_i}{m\omega_n^3\Delta t} \\ a_2 = \frac{1}{\omega_a} \left(\dot{u}_{i-1} + \xi\omega_n a_1 - \frac{\Delta f_i}{m\omega_n^2\Delta t} \right) \end{cases} \quad (3-7.22)$$

Em continuidade de resolução, com a substituição dessas constantes nas Equações 3-7.20 e 3-7.21, com $(\tau=\Delta t)$, obtêm-se, respectivamente, o deslocamento e a velocidade no instante t_i , em termos do deslocamento e da velocidade no instante anterior:

$$\begin{cases} u_i = a_{11}u_{i-1} + a_{12}\dot{u}_{i-1} - b_{11}f_{i-1} - b_{12}f_i \\ \dot{u}_i = a_{21}u_{i-1} + a_{22}\dot{u}_{i-1} - b_{21}f_{i-1} - b_{22}f_i \end{cases} \quad (3-7.23)$$

Nessas soluções, têm-se os coeficientes:

$$\begin{cases} a_{11} = e^{-\xi\omega_n\Delta t} \left(\cos(\omega_a\Delta t) + \frac{\xi\omega_n}{\omega_a} \sin(\omega_a\Delta t) \right) \\ a_{12} = \frac{e^{-\xi\omega_n\Delta t}}{\omega_a} \sin(\omega_a\Delta t) \\ a_{21} = -\frac{\omega_n^2 e^{-\xi\omega_n\Delta t}}{\omega_a} \sin(\omega_a\Delta t) \\ a_{22} = e^{-\xi\omega_n\Delta t} \left(\cos(\omega_a\Delta t) - \frac{\xi\omega_n}{\omega_a} \sin(\omega_a\Delta t) \right) \end{cases} \quad (3-7.24)$$

$$e \left\{ \begin{aligned} b_{11} &= \frac{e^{-\xi\omega_n\Delta t}}{m} \left(\left(\frac{1}{\omega_n^2} + \frac{2\xi}{\omega_n^3\Delta t} \right) \cos(\omega_a\Delta t) + \left(\frac{\xi}{\omega_n} + \frac{2\xi^2-1}{\omega_n^2\Delta t} \right) \frac{\sin(\omega_a\Delta t)}{\omega_a} \right) - \frac{2\xi}{m\omega_n^3\Delta t} \\ b_{12} &= \frac{-e^{-\xi\omega_n\Delta t}}{m} \left(\frac{2\xi}{\omega_n^3\Delta t} \cos(\omega_a\Delta t) + \frac{2\xi^2-1}{\omega_n^2\Delta t} \frac{\sin(\omega_a\Delta t)}{\omega_a} \right) - \frac{1}{m\omega_n^2} + \frac{2\xi}{m\omega_n^3\Delta t} \\ b_{21} &= \frac{e^{-\xi\omega_n\Delta t}}{m} \left(\frac{\xi}{\omega_n} + \frac{2\xi^2-1}{\omega_n^2\Delta t} \right) \left(\cos(\omega_a\Delta t) - \frac{\xi\omega_n}{\omega_a} \sin(\omega_a\Delta t) \right) \\ &\quad - \frac{e^{-\xi\omega_n\Delta t}}{m} \left(\frac{1}{\omega_n^2} + \frac{2\xi}{\omega_n^3\Delta t} \right) \left(\xi\omega_n \cos(\omega_a\Delta t) + \omega_a \sin(\omega_a\Delta t) \right) + \frac{1}{m\omega_n^2\Delta t} \\ b_{22} &= \frac{-e^{-\xi\omega_n\Delta t}}{m} \left(\frac{2\xi^2-1}{\omega_n^2\Delta t} \right) \left(\cos(\omega_a\Delta t) - \frac{\xi\omega_n}{\omega_a} \sin(\omega_a\Delta t) \right) \\ &\quad + \frac{2\xi e^{-\xi\omega_n\Delta t}}{m\omega_n^3\Delta t} \left(\xi\omega_n \cos(\omega_a\Delta t) + \omega_a \sin(\omega_a\Delta t) \right) - \frac{1}{m\omega_n^2\Delta t} \end{aligned} \right. \quad (3-7.25)$$

Assim, para o instante t_i , a solução é determinada com base no conhecimento dos valores de deslocamento, velocidade e força ao final do espaçamento anterior, t_{i-1} , e com base na força de intensidade f_i . Isso é mostrado no [Algoritmo 3-7.2](#), em que o espaçamento Δt é considerado constante, por facilidade, e em que está incluída a determinação da aceleração, de acordo com a Equação 3-7.16.³⁴

³⁴ Esse algoritmo é indicado para a resolução das equações diferenciais desacopladas obtidas no método de superposição modal de análise de modelos de multigrados de liberdade, como será mostrado na Seção 6.2.

- Estabelecimento de k , m , ξ , u_0 , \dot{u}_0 , Δt e f_i em cada discretização do tempo.
- $\omega_n = \sqrt{k/m}$, $\omega_a = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$
- Cálculo dos coeficientes $a_{11} \dots a_{22}$ e $b_{11} \dots b_{22}$, com as Equações 3-7.24 e 3-7.25.
- $i = 1, 2, \dots$ até o número total de instantes de discretização
- $u_i = a_{11} u_{i-1} + a_{12} \dot{u}_{i-1} - b_{11} f_{i-1} - b_{12} f_i$
- $\dot{u}_i = a_{21} u_{i-1} + a_{22} \dot{u}_{i-1} - b_{21} f_{i-1} - b_{22} f_i$
- $\ddot{u}_i = (f_i - 2\xi m \omega_n \dot{u}_i - k u_i) / m$

ALGORITMO 3-7.2 Resolução direta por segmentos lineares da ação externa.

3-7.3 Integração numérica em caso linear

Os procedimentos de resolução incremental apresentados anteriormente restringem-se às equações de movimento de osciladores subamortecidos de comportamento linear. Em resolução de equação não linear com amortecimento viscoso, não necessariamente sub-crítico, e em resolução de sistemas de equações de movimento, lineares ou não, com o amortecimento proporcional ou o amortecimento não proporcional (que serão apresentados no Capítulo 6), os métodos de integração numérica são os mais gerais. Contudo, como em cada um desses métodos se arbitra uma lei de deslocamento, velocidade e/ou aceleração (em cada espaçamento Δt) aproximativa à solução exata, tem-se acumulação de aproximações que pode provocar inconvenientes de instabilidade numérica, de amortecimento numérico e/ou de alongamento de período.³⁵ O primeiro inconveniente se caracteriza pela amplificação artificial da amplitude da oscilação ao longo do procedimento incremental, até que a solução passa a não ter significado físico. O segundo é o inverso do primeiro, trata-se de redução da amplitude sem correlação com o amortecimento estabelecido para o sistema. O terceiro inconveniente tem nome autoexplicativo. Naturalmente, com a redução do espaçamento Δt , esses inconvenientes são evitados.

Os métodos de integração numérica podem ser *explícitos* ou *implícitos*. Nos primeiros, a solução referente a cada instante é obtida com a condição de equilíbrio do instante anterior e, portanto, a resolução em determinado instante não requer valores do mesmo instante. Nos métodos implícitos, a condição de equilíbrio em cada instante fornece a solução referente ao mesmo instante e, portanto, a resolução requer um ou mais valores referentes a esse instante. Entre os primeiros, destaca-se o método por *diferença finita central* e, entre os últimos, sobressaem-se o método de *Newmark de aceleração constante* e o método de *Wilson θ* , todos detalhados a seguir para o caso do oscilador simples.

3-7.3.1 Método por Diferença Finita Central

Diferença finita é um clássico método numérico de resolução de equações diferenciais que se baseia em substituição dos operadores de derivação por expressões algébricas com valores discretos da(s) variável(eis) dependente(s).

³⁵ Como esses métodos são baseados em distintas leis de aproximação, cada método tem peculiaridades próprias, e o sucesso de um método depende de sua simplicidade e de aplicabilidade segura, principalmente em modelos de multigraus de liberdade, como será tratado na Seção 6-4.

Um caso particular é a resolução *por diferença finita central*, que utiliza a aproximação de derivada primeira ilustrada na Figura 3-7.6 e que se escreve para o instante t_i :

$$\dot{u}_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta t} \quad (3-7.26)$$

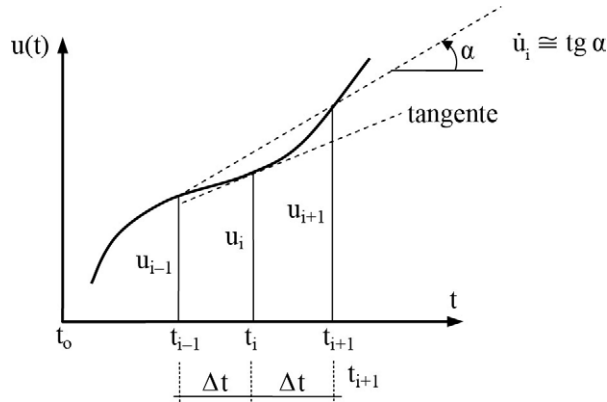


FIGURA 3-7.6 Aproximação da derivada primeira no instante t_i .

A derivada segunda é determinada com base na aproximação anterior, como se segue:

$$\ddot{u}_i = \frac{\dot{u}_{i+1/2} - \dot{u}_{i-1/2}}{\Delta t} \rightarrow \ddot{u}_i = \frac{(u_{i+1} - u_i)/\Delta t - (u_i - u_{i-1})/\Delta t}{\Delta t} \rightarrow \ddot{u}_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta t^2} \quad (3-7.27)$$

Com a substituição das duas últimas aproximações na equação de movimento particularizada ao instante t_i

$$m\ddot{u}_i + c\dot{u}_i + ku_i = f_i \quad (3-7.28)$$

e após a organização das diversas parcelas, obtém-se a expressão algébrica

$$m' u_{i+1} = f_i' \quad (3-7.29)$$

Nessa expressão, tem-se:

$$\begin{cases} m' = \frac{m}{\Delta t^2} + \frac{c}{2\Delta t} \\ f_i' = f_i - \left(k - \frac{2m}{\Delta t^2}\right)u_i - \left(\frac{m}{\Delta t^2} - \frac{c}{2\Delta t}\right)u_{i-1} \end{cases} \quad (3-7.30)$$

onde m' e f_i' são chamados, respectivamente, de *pseudomassa* e de *pseudoforça estática*.

Logo, a partir da Equação 3-7.29, obtém-se a solução de deslocamento referente ao instante t_{i+1} :

$$u_{i+1} = \frac{f_i'}{m'} \quad (3-7.31)$$

Essa solução é obtida com resultados de dois instantes anteriores, o que caracteriza *integração explícita*. Requer, portanto, para início do procedimento de integração, o deslocamento inicial e um deslocamento fictício em ($t = -\Delta t$). Esse último é obtido com base nas condições iniciais u_0 e \dot{u}_0 , e na equação de equilíbrio dinâmico no instante inicial, o que permite escrever a aceleração inicial

$$\ddot{u}_0 = (f_0 - c\dot{u}_0 - ku_0)/m \quad (3-7.32)$$

Além disso, com a particularização das aproximações expressas nas Equações 3-7.26 e 3-7.27 ao instante inicial e a correspondente resolução em termos do deslocamento em $-\Delta t$, obtém-se:

$$u_{-1} = u_0 - \dot{u}_0 \Delta t + \ddot{u}_0 \Delta t^2 / 2 \quad (3-7.33)$$

Com as fórmulas anteriores, constrói-se o **Algoritmo 3-7.3**:

– Especificação de $k, m, \xi, u_0, \dot{u}_0, \Delta t$ e f_i em cada discretização do tempo.

Se $u_0 = 0$ e $\dot{u}_0 = 0 \rightarrow \ddot{u}_0 = 0$

Se $u_0 \neq 0$ ou $\dot{u}_0 \neq 0 \rightarrow \ddot{u}_0 = (f_0 - c\dot{u}_0 - ku_0)/m$

$\omega_n = \sqrt{k/m}$, $c = 2\xi m \omega_n$

$aux = u_0 - \dot{u}_0 \Delta t + \ddot{u}_0 \Delta t^2 / 2$, $m' = \frac{m}{\Delta t^2} + \frac{c}{2\Delta t}$

→ $i = 0, 1, \dots$ até o número total de instantes de discretização

$f'_i = f_i - \left(k - \frac{2m}{\Delta t^2}\right)u_i - \left(\frac{m}{\Delta t^2} - \frac{c}{2\Delta t}\right)aux$

$u_{i+1} = \frac{f'_i}{m'}$

$aux = u_i$

– Além disso, caso seja de interesse determinar a velocidade e a aceleração:

→ $i = 1, 2, \dots$ até o número total de instantes de discretização

$\dot{u}_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta t}$

$\ddot{u}_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta t^2}$

ALGORITMO 3-7.3 Método de integração por *diferença finita central*.

Como todos os métodos explícitos, o por *diferença finita central* é condicionalmente estável, cuja estabilidade numérica é garantida com espaçamento de integração que atenda à condição:

$$\Delta t \leq T_n / \pi \quad (3-7.34)$$

Essa condição, contudo, não coloca o presente método em desvantagem frente aos métodos implícitos no presente caso de osciladores simples, porque, com qualquer que seja o método, é necessário adotar:

$$\Delta t \leq T_n / 10 \quad (3-7.35)$$

para se obter uma razoável representação de histórico de deslocamento.

3-7.3.2 Método de Newmark

Newmark apresentou uma família de métodos de integração numérica das equações de movimento de modelos estruturais, com as seguintes expressões: ³⁶

$$\begin{cases} \dot{u}_i = \dot{u}_{i-1} + ((1 - \gamma)\ddot{u}_{i-1} + \gamma\ddot{u}_i)\Delta t \\ u_i = u_{i-1} + \dot{u}_{i-1}\Delta t + ((1/2 - \beta)\ddot{u}_{i-1} + \beta\ddot{u}_i)\Delta t^2 \end{cases} \quad (3-7.36)$$

onde os parâmetros γ e β são estabelecidos com o objetivo de influir na estabilidade numérica e na precisão da solução. Com $(\gamma=1/2)$ e $(\beta=1/6)$, recai-se em aceleração linear em cada espaçamento de tempo. Com $(\gamma=1/2)$ e $(\beta=1/4)$, tem-se aceleração média (constante) nesse espaçamento, que é o caso detalhado a seguir, referido simplesmente como *método de Newmark*. Esse método se mostra vantajoso porque é simples, incondicionalmente estável e não introduz amortecimento numérico.

Para o espaçamento $(\Delta t = t_i - t_{i-1})$, arbitra-se a aceleração:

$$\ddot{u}(\tau) = \frac{1}{2}(\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i-1}) \quad (3-7.37)$$

em que $(0 \leq \tau \leq \Delta t)$, como ilustra a [Figura 3-7.7](#).

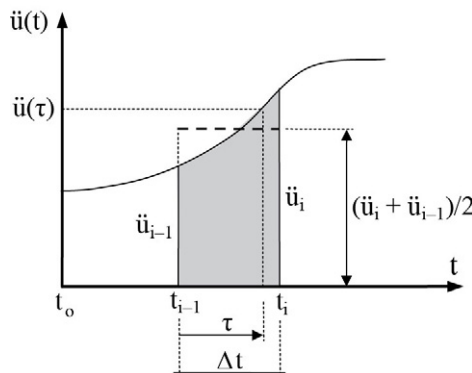


FIGURA 3-7.7 Média da aceleração no espaçamento de tempo.

³⁶ Newmark, N.M., 1959, "A Method of Computation for Structural Dynamics", ASCE, Journal of the Engineering Mechanics Division, vol. 44, pp. 67-94.

A integração analítica da equação anterior fornece as seguintes expressões de velocidade e de deslocamento, em termos da variável τ medida a partir do instante t_{i-1} :³⁷

$$\begin{cases} \dot{u}(\tau) = \dot{u}_{i-1} + \frac{\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i-1}}{2} \tau \\ u(\tau) = u_{i-1} + \dot{u}_{i-1} \tau + \frac{\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i-1}}{4} \tau^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{u}_{\tau=\Delta t} = \dot{u}_i = \dot{u}_{i-1} + \frac{\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i-1}}{2} \Delta t \\ u_{\tau=\Delta t} = u_i = u_{i-1} + \dot{u}_{i-1} \Delta t + \frac{\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i-1}}{4} \Delta t^2 \end{cases} \quad (3-7.38)$$

Com base nesses resultados, obtêm-se as seguintes expressões de aceleração e de velocidade, correspondentes ao i -ésimo instante:

$$\begin{cases} \ddot{u}_i = -\ddot{u}_{i-1} + \frac{4}{\Delta t^2} (u_i - u_{i-1} - \dot{u}_{i-1} \Delta t) \\ \dot{u}_i = -\dot{u}_{i-1} + \frac{2}{\Delta t} (u_i - u_{i-1}) \end{cases} \quad (3-7.39)$$

Logo, com a substituição dessas expressões na condição de equilíbrio no referido instante (vide Equação 3-7.28), obtém-se a equação algébrica:

$$k' u_i = f_i' \quad (3-7.40)$$

Nessa equação, tem-se:

$$\begin{cases} k' = k + \frac{4m}{\Delta t^2} + \frac{2c}{\Delta t} \\ f_i' = f_i + m \left(\ddot{u}_{i-1} + \frac{4\dot{u}_{i-1}}{\Delta t} + \frac{4u_{i-1}}{\Delta t^2} \right) + c \left(\dot{u}_{i-1} + \frac{2u_{i-1}}{\Delta t} \right) \end{cases} \quad (3-7.41)$$

onde k' e f_i' são denominados, respectivamente, *pseudorrigidez* e *pseudoforça estática*.

Assim, com a Equação 3-7.40, obtém-se a solução de deslocamento correspondente ao i -ésimo instante:

$$u_i = \frac{f_i'}{k'} \quad (3-7.42)$$

que, juntamente com as soluções do instante anterior, u_{i-1} , \dot{u}_{i-1} e \ddot{u}_{i-1} , fornece através da Equação 3-7.39 a velocidade \dot{u}_i e a aceleração \ddot{u}_i .

Logo, com base nas fórmulas anteriores, constrói-se o [Algoritmo 3-7.4](#) que se segue.³⁸

³⁷ Pode-se verificar que essas expressões são também obtidas com o estabelecimento dos valores ($\gamma=1/2$) e ($\beta=1/4$) na Equação 3-7.36.

³⁸ Relembra-se que, para se obter boa representação da resposta de deslocamento, deve ser atendida a condição estabelecida na Equação 3-7.35.

– Especificação de $k, m, \xi, u_0, \dot{u}_0, \Delta t$ e f_i em cada discretização do tempo.

Se $u_0 = 0$ e $\dot{u}_0 = 0 \rightarrow \ddot{u}_0 = 0$

Se $u_0 \neq 0$ ou $\dot{u}_0 \neq 0 \rightarrow \ddot{u}_0 = (f_0 - c\dot{u}_0 - k u_0)/m$

$$\omega_n = \sqrt{k/m}, \quad c = 2\xi m \omega_n, \quad k' = k + \frac{4m}{\Delta t^2} + \frac{2c}{\Delta t}$$

$i = 1, 2, \dots$ até o número total de instantes de discretização

$$f'_i = f_i + m \left(\ddot{u}_{i-1} + \frac{4\dot{u}_{i-1}}{\Delta t} + \frac{4u_{i-1}}{\Delta t^2} \right) + c \left(\dot{u}_{i-1} + \frac{2u_{i-1}}{\Delta t} \right)$$

$$u_i = f'_i / k'$$

$$\dot{u}_i = -\dot{u}_{i-1} + \frac{2}{\Delta t} (u_i - u_{i-1})$$

$$\ddot{u}_i = -\ddot{u}_{i-1} + \frac{4}{\Delta t^2} (u_i - u_{i-1} - \dot{u}_{i-1} \Delta t)$$

ALGORITMO 3-7.4 Método de Integração de Newmark.

3-7.3.3 Método de Wilson θ

O método de integração de Wilson θ é uma generalização da integração de Newmark de aceleração linear, porque adota essa lei no espaçamento estendido de tempo ($t_{i-1} \leq t \leq t_{i-1} + \theta \Delta t$), como esclarece a próxima figura.³⁹ O valor de θ é estabelecido com o objetivo de se obter estabilidade numérica e, portanto, se diz que esse método é condicionalmente estável. Experimentos numéricos mostram que, em caso de sistemas de equações de movimento, o método é estável com $\theta > 1,37$, sendo usualmente utilizado ($\theta = 1,4$) por sugestão de Bathe & Wilson.⁴⁰

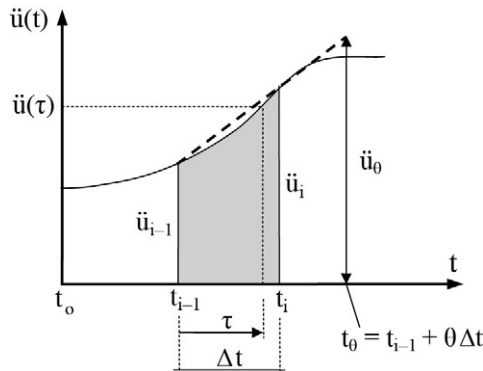


FIGURA 3-7.8 Aceleração linear em espaçamento estendido de tempo.

Para $0 \leq \tau \leq \theta \Delta t$, escreve-se a lei de aceleração linear:

$$\ddot{u}(\tau) = \ddot{u}_{i-1} + (\ddot{u}_0 - \ddot{u}_{i-1}) \frac{\tau}{\theta \Delta t} \quad (3-7.43)$$

³⁹ Wilson, E.L., Farhoomand, I. & Bathe, K.J., 1973, *Nonlinear Dynamic Analysis of Complex Structures*, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, vol. 1, pp. 241-252.

⁴⁰ Bathe, K.J. & Wilson, E.L., 1973, *Stability and Accuracy Analysis of Direct Integration Methods*, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, vol. 1, pp. 283-291.

Com a integração dessa lei, obtém-se:

$$\begin{cases} \dot{u}(\tau) = \dot{u}_{i-1} + \ddot{u}_{i-1}\tau + (\ddot{u}_\theta - \ddot{u}_{i-1})\frac{\tau^2}{2\theta\Delta t} \\ u(\tau) = u_{i-1} + \dot{u}_{i-1}\tau + \ddot{u}_{i-1}\frac{\tau^2}{2} + (\ddot{u}_\theta - \ddot{u}_{i-1})\frac{\tau^3}{6\theta\Delta t} \end{cases} \quad (3-7.44)$$

$$\rightarrow \begin{cases} \dot{u}_{\tau=\theta\Delta t} = \dot{u}_\theta = \dot{u}_{i-1} + (\ddot{u}_\theta - \ddot{u}_{i-1})\theta\frac{\Delta t}{2} \\ u_{\tau=\theta\Delta t} = u_\theta = u_{i-1} + \dot{u}_{i-1}\theta\Delta t + (\ddot{u}_\theta - \ddot{u}_{i-1})\theta^2\frac{\Delta t^2}{6} \end{cases} \quad (3-7.45)$$

A resolução do sistema anterior fornece as seguintes soluções do instante ($t_\theta = t_{i-1} + \theta\Delta t$):

$$\begin{cases} \ddot{u}_\theta = \frac{6}{\theta^2\Delta t^2}(u_\theta - u_{i-1}) - \frac{6}{\theta\Delta t}\dot{u}_{i-1} - 2\ddot{u}_{i-1} \\ \dot{u}_\theta = \frac{3}{\theta\Delta t}(u_\theta - u_{i-1}) - 2\dot{u}_{i-1} - \frac{\theta\Delta t}{2}\ddot{u}_{i-1} \end{cases} \quad (3-7.46)$$

Por outro lado, com ($f_\theta = f_{i-1} + \theta(f_i - f_{i-1})$), escreve-se a condição de equilíbrio referente ao instante t_θ :

$$m\ddot{u}_\theta + c\dot{u}_\theta + ku_\theta = f_{i-1} + \theta(f_i - f_{i-1}) \quad (3-7.47)$$

Logo, com a substituição, nessa equação, da velocidade e da aceleração expressas anteriormente, chega-se à equação algébrica:

$$k'u_\theta = f'_i \quad (3-7.48)$$

em que ocorrem a pseudorrigidez e a pseudoforça estática:

$$\begin{cases} k' = k + \frac{6m}{\theta^2\Delta t^2} + \frac{3c}{\theta\Delta t} \\ f'_i = f_{i-1} + \theta(f_i - f_{i-1}) + 6m\left(\frac{\ddot{u}_{i-1}}{3} + \frac{\dot{u}_{i-1}}{\theta\Delta t} + \frac{u_{i-1}}{\theta^2\Delta t^2}\right) + c\left(\frac{\theta\Delta t}{2}\ddot{u}_{i-1} + 2\dot{u}_{i-1} + \frac{3u_{i-1}}{\theta\Delta t}\right) \end{cases} \quad (3-7.49)$$

Assim, a partir da Equação 3-7.48, obtém-se a solução de deslocamento correspondente ao instante t_θ :

$$u_\theta = \frac{f'_i}{k'} \quad (3-7.50)$$

Resta determinar as soluções de deslocamento, velocidade e aceleração referentes ao instante t_i . Para isso, faz-se ($\tau = \Delta t$) nas Equações 3-7.44 e 3-7.43, de maneira a obter:

$$\begin{cases} \ddot{u}_i = \ddot{u}_{i-1} + (\ddot{u}_\theta - \ddot{u}_{i-1})\frac{1}{\theta} \\ \dot{u}_i = \dot{u}_{i-1} + \ddot{u}_{i-1}\Delta t + (\ddot{u}_\theta - \ddot{u}_{i-1})\frac{\Delta t}{2\theta} \\ u_i = u_{i-1} + \dot{u}_{i-1}\Delta t + \ddot{u}_{i-1}\frac{\Delta t^2}{2} + (\ddot{u}_\theta - \ddot{u}_{i-1})\frac{\Delta t^2}{6\theta} \end{cases} \quad (3-7.51)$$

e dessas expressões obtêm-se as soluções procuradas para o i -ésimo instante:

$$\begin{cases} \ddot{u}_i = \frac{6}{\theta^3 \Delta t^2} (u_\theta - u_{i-1}) - \frac{6}{\theta^2 \Delta t} \dot{u}_{i-1} + \left(1 - \frac{3}{\theta}\right) \ddot{u}_{i-1} \\ \dot{u}_i = \dot{u}_{i-1} + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i-1}) \\ u_i = u_{i-1} + \Delta t \dot{u}_{i-1} + \frac{\Delta t^2}{6} (\ddot{u}_i + 2\ddot{u}_{i-1}) \end{cases} \quad (3-7.52)$$

Com base nas soluções correspondentes ao instante t_{i-1} e com o deslocamento u_θ , obtêm-se as soluções para o instante t_i . Assim, semelhantemente ao *método de integração de Newmark*, constrói-se o [Algoritmo 3-7.5](#).

– Especificação de k , m , ξ , u_0 , \dot{u}_0 , Δt e f_i em cada discretização do tempo.

Se $u_0 = 0$ e $\dot{u}_0 = 0 \rightarrow \ddot{u}_0 = 0$
 Se $u_0 \neq 0$ ou $\dot{u}_0 \neq 0 \rightarrow \ddot{u}_0 = (f_0 - c \dot{u}_0 - k u_0) / m$

$\omega_n = \sqrt{k/m}$, $c = 2\xi m \omega_n$, $k' = k + \frac{6m}{\theta^2 \Delta t^2} + \frac{3c}{\theta \Delta t}$

$\rightarrow i = 1, 2, \dots$ até o número total de instantes de discretização

$f'_i = f_{i-1} + \theta(f_i - f_{i-1}) + 6m \left(\frac{\ddot{u}_{i-1}}{3} + \frac{\dot{u}_{i-1}}{\theta \Delta t} + \frac{u_{i-1}}{\theta^2 \Delta t^2} \right) + c \left(\frac{\theta \Delta t}{2} \ddot{u}_{i-1} + 2\dot{u}_{i-1} + \frac{3u_{i-1}}{\theta \Delta t} \right)$

$u_\theta = \frac{f'_i}{k'}$

$\ddot{u}_i = \frac{6}{\theta^3 \Delta t^2} (u_\theta - u_{i-1}) - \frac{6}{\theta^2 \Delta t} \dot{u}_{i-1} + \left(1 - \frac{3}{\theta}\right) \ddot{u}_{i-1}$

$\dot{u}_i = \dot{u}_{i-1} + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i-1})$

$u_i = u_{i-1} + \Delta t \dot{u}_{i-1} + \frac{\Delta t^2}{6} (\ddot{u}_i + 2\ddot{u}_{i-1})$

ALGORITMO 3-7.5 *Método de integração de Wilson θ .*

EXEMPLO 3-7.2

Para verificar o desempenho dos métodos de integração apresentados anteriormente, obtêm-se as respostas do deslocamento do oscilador simples utilizado no Exemplo 3-7.1, sob a força harmônica ($f(t) = 4,474 \cdot 10^5 \cos(10t)$) em newtons e, separadamente, sob a força de impacto que foi representada na [Figura E3-7.1a](#). Esse oscilador tem as características ($k = 130,46 \cdot 10^5 \text{ N/m}$), ($m = 456,05 \cdot 10^3 \text{ kg}$), ($\xi = 0,03$) e ($T_n = 1,175 \text{ s}$). E para quantificar a precisão das soluções dos referidos métodos em relação a uma solução de referência, define-se a norma

$$\| \text{dif} \| = \left(\sum_{i=0}^{n^\circ \text{ pontos}} (u_{i-\text{de referência}} - u_{i-\text{aproximado}})^2 \right)^{1/2}$$

Quanto à análise com a força harmônica, adotou-se inicialmente o espaçamento ($\Delta t = 0,1 \text{ s} \cong T_n / 10$). Na [Figura E3-7.2a](#) estão representados os correspondentes históricos de deslocamento nos dois primeiros segundos, obtidos com a solução exata expressa na Equação 3-4.10

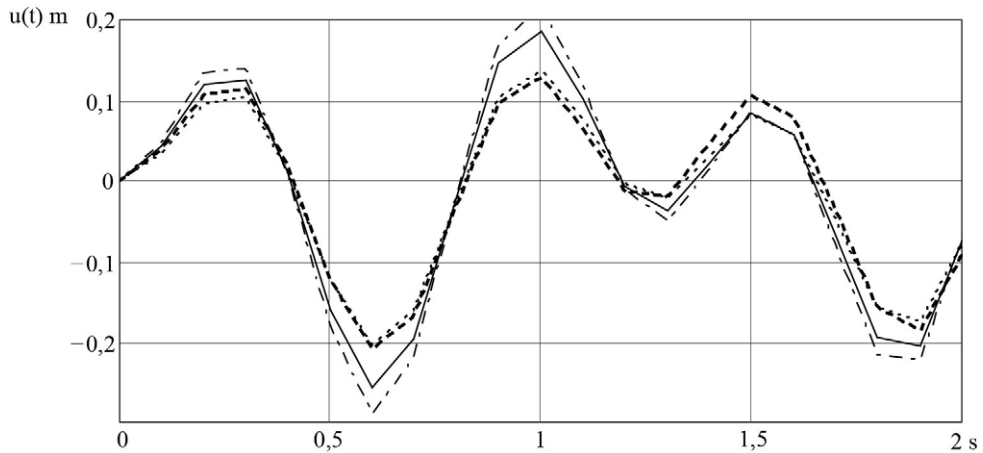


FIGURA E3-7.2a Históricos de deslocamento sob a força harmônica, com $\Delta t = 0,1s$.

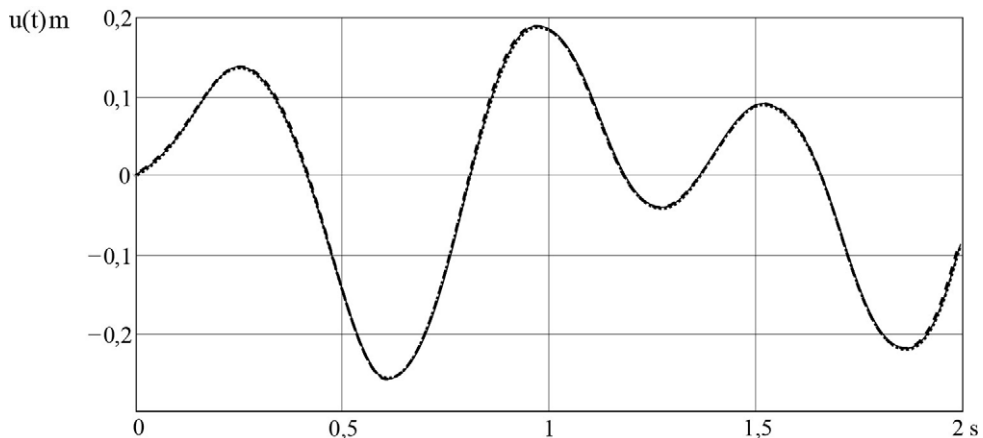


FIGURA E3-7.2b Históricos de deslocamento sob a força harmônica, com $(\Delta t = 0,01s)$.

(em linha contínua e representa após a troca de sinal), com a *integração por diferença finita central* (em traço-ponto), com a *integração de Newmark* (em linha pontilhada) e com a *integração de Wilson $\theta=1,4$* (em linha tracejada). Quanto à norma de diferença em relação à solução exata, foram obtidos os valores 0,245, 0,340 e 0,478, respectivamente, para as *integrações por diferença finita central*, de *Newmark* e de *Wilson $\theta=1,4$* . Com a adoção de $(\theta=1,0)$, obteve-se 0,209 para a norma de diferença, valor este que é menor do que no caso das duas outras resoluções numéricas, o que é natural, dado que a lei de aceleração é linear.

Para evidenciar a influência do espaçamento de tempo, a seguir estão representados os históricos de deslocamento com a mesma força harmônica, mas agora com o espaçamento $(\Delta t = 0,01s \equiv T_n/100)$. Esses históricos são graficamente coincidentes e foram obtidos os valores $2,096 \cdot 10^{-3}$, $4,149 \cdot 10^{-3}$ e $4,865 \cdot 10^{-3}$ para a norma de diferenças em relação à solução exata, respectivamente, com as resoluções *por diferença finita central*, de *Newmark* e de *Wilson $\theta=1,4$* .

Essas diferenças e as obtidas com o espaçamento $(\Delta t = T_n/10)$ comprovam que a acurácia dos diversos métodos depende do espaçamento de tempo adotado.

Quanto à força de impacto, a [Figura E3-7.2c](#) mostra os históricos de deslocamento nos dois primeiros segundos, obtidos com a adoção do espaçamento ($\Delta t = 0,005\text{ s}$) na resolução direta por segmentos lineares da excitação e nos *métodos por diferença finita central, de Newmark e de Wilson* $\theta = 1,4$. Vê-se que ocorreu coincidência de representações, o que confirma a adequação das integrações numéricas utilizadas.

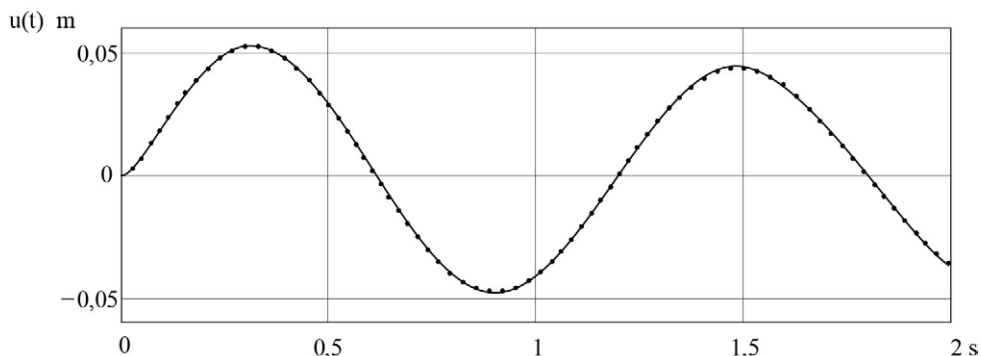


FIGURA E3-7.2c Históricos de deslocamento sob a força de impacto, com ($\Delta t = 0,005\text{ s}$).

Além disso, tendo-se como referência a resolução direta por segmentos lineares, foram obtidos, para as normas de diferença, os valores $8,284 \cdot 10^{-4}$, $1,420 \cdot 10^{-3}$ e $3,052 \cdot 10^{-3}$, respectivamente, com os *métodos por diferença finita central, de Newmark e de Wilson* $\theta = 1,4$.

EXEMPLO 3-7.3

Na idealização da viga em balanço do Exemplo Proposto 2-6.5 em oscilador simples obtêm-se as propriedades ($k_{eq} = 388,89\text{ kN/m}$) e ($m_{eq} = 360,42\text{ kg}$). Agora, com o amortecimento de ($\xi = 0,02$) e sob a força externa esquematizada na [Figura E3-7.3a](#) nos casos de ($t_d = 0,4\text{ s}$) e ($t_d = 0,04\text{ s}$), são determinados os históricos de deslocamento da extremidade livre.

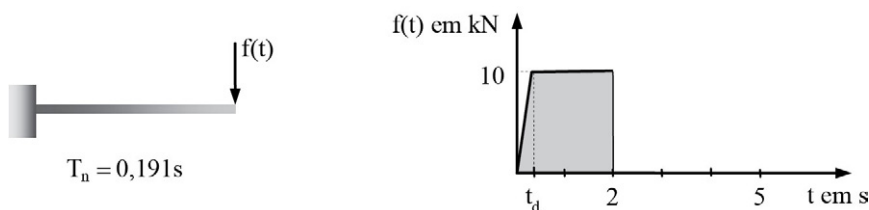


FIGURA E3-7.3a Viga em balanço sob força em rampa e em degrau.

No caso de ($t_d = 0,4\text{ s}$), adotou-se inicialmente o espaçamento ($\Delta t = 0,01\text{ s} \approx T_n/19,1$). Foram obtidos os históricos mostrados na [Figura E3-7.3b](#), em que as representações em linha contínua, em traço-ponto e em pontilhado se referem às soluções obtidas, respectivamente, com a resolução direta por segmentos lineares, com a *integração por diferença finita central*, com a *integração de Newmark* e com a *integração de Wilson* $\theta = 1,4$.

Observa-se, na figura anterior, que, embora as amplitudes máximas de oscilação fornecidas pelas integrações numéricas sejam praticamente coincidentes com as da resolução direta, os históricos

obtidos com essas integrações têm alongamento de período. Com o espaçamento ($\Delta t = 0,001s \approx T_n/191$), todas as soluções passaram a ser graficamente coincidentes, como representado na [Figura E3-7.3c](#).

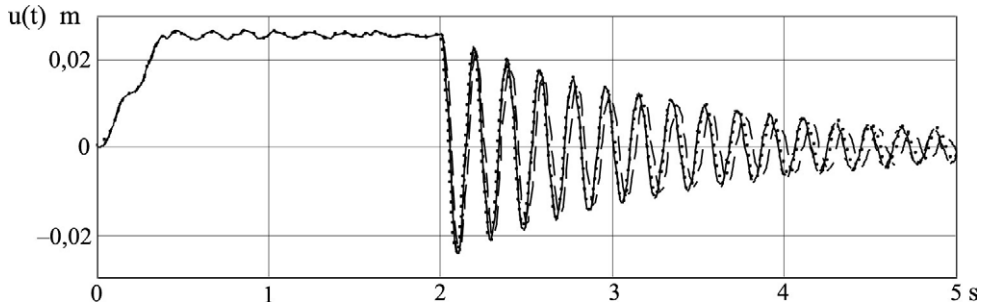


FIGURA E3-7.3b Históricos de deslocamento no caso de ($t_d = 0,04s$) e ($\Delta t = 0,01s$).

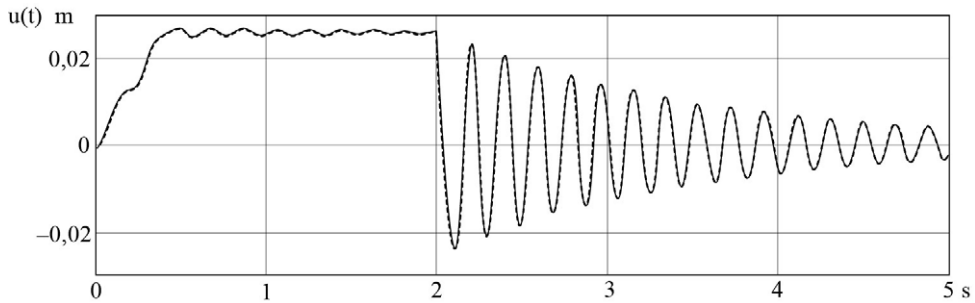


FIGURA E3-7.3c Históricos de deslocamento no caso de ($t_d = 0,04s$) e ($\Delta t = 0,001s$).

As figuras [E3-7.3b](#) e [E3-7.3c](#) mostram que o deslocamento aumenta continuamente com o trecho da força em rampa, até permanecer praticamente com o valor do deslocamento pseudoestático, $u = 10/388,89 \approx 0,026m$, durante a atuação do patamar da força. Esse aumento evidencia aplicação lenta de força em relação à capacidade de oscilação do sistema. No caso de ($t_d = 0,04s$), que corresponde a uma maior inclinação da força em rampa, recai-se em força de impacto, e o sistema oscila em torno da configuração estática até o final da atuação da força, quando então passa a oscilar em torno da configuração neutra, como mostra a [Figura E3-7.3d](#).

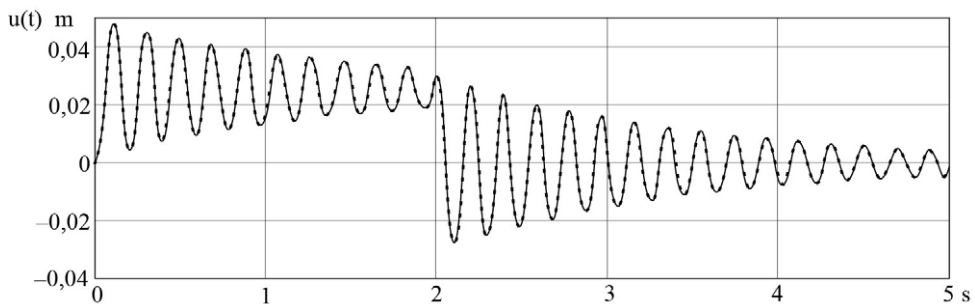


FIGURA E3-7.3d Históricos de deslocamento no caso de ($t_d = 0,04s$) e ($\Delta t = 0,001s$).

Os algoritmos de Newmark e de Wilson θ têm a mesma estruturação, o que permite tratamento uniforme em uma mesma programação. Com esse objetivo, para a *integração de Newmark* definem-se as variáveis:

$$\begin{cases} \theta = 1 & , & a_0 = 4/\Delta t^2 & , & a_1 = 2/\Delta t \\ a_2 = 1 & , & a_3 = 2a_1 \\ a_4 = 0 & , & a_5 = 1 \end{cases} \quad (3-7.53)$$

Já para a integração de Wilson θ , estabelecem-se as variáveis:

$$\begin{cases} \theta = 1,4 & , & a_0 = 6/(\theta \Delta t)^2 & , & a_1 = 3/(\theta \Delta t) \\ a_2 = 2 & , & a_3 = 2a_1 \\ a_4 = \theta \Delta t / 2 & , & a_5 = a_2 \end{cases} \quad (3-7.54)$$

Com as variáveis anteriores, têm-se para ambos os métodos a pseudorrigidez e a pseudoforça estática:

$$\begin{cases} k' = k + a_0 m + a_1 c \\ f_i' = \theta f_i + f_{i-1}(1-\theta) + m(a_2 \ddot{u}_{i-1} + a_3 \dot{u}_{i-1} + a_0 u_{i-1}) + c(a_4 \ddot{u}_{i-1} + a_5 \dot{u}_{i-1} + a_1 u_{i-1}) \end{cases} \quad (3-7.55)$$

com validade das Equações 3-7.40 e 3-7.39 da integração *de Newmark*, e das Equações 3-7.48 e 3-7.52 da integração *de Wilson θ* .

3-7.4 Integração numérica em caso não linear

Como ilustração de não linearidade, considera-se inicialmente o pêndulo simples mostrado na [Figura 3-7.9](#), cuja equação de movimento foi expressa na Equação 1-5.1 e que se repete:

$$m \ell^2 \ddot{\theta} + mg \ell \sin \theta = 0 \quad (3-7.56)$$

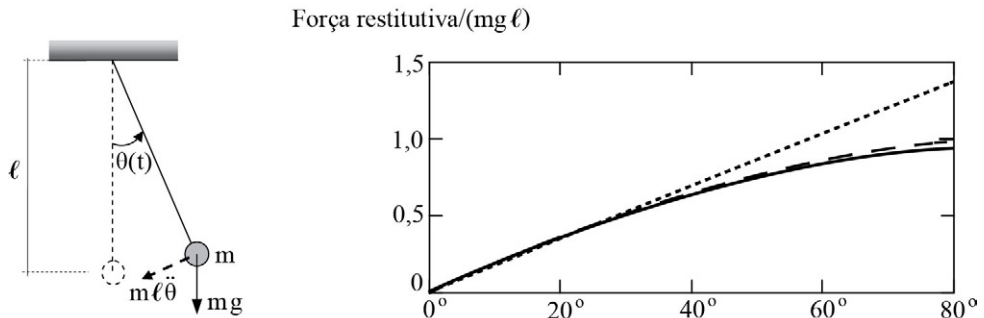


FIGURA 3-7.9 Força restitutiva gravitacional *versus* ângulo de inclinação do pêndulo simples.

A equação anterior é não linear e foi linearizada na Subseção 1-5.1 com a aproximação $(\sin \theta \approx \theta)$. Alternativamente, com o desenvolvimento em série de potências:

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots \quad (3-7.57)$$

e, considerando apenas os três primeiros termos dessa série, a referida equação toma a forma:

$$m \ell^2 \ddot{\theta} + mg \ell \left(\theta - \frac{\theta^3}{6} + \frac{\theta^5}{120} \right) = 0 \quad (3-7.58)$$

em que o segundo termo do primeiro membro é a *força restitutiva gravitacional*.⁴¹

Essa força, em normalização com respeito a $mg\ell$, está mostrada na parte direita da figura anterior. A representação em pontilhado diz respeito à parte linear. A em linha contínua é a da parcela de dois termos, que é do terceiro grau, e a em tracejado, a da parcela de três termos, que é do quinto grau. Nota-se que o comportamento não linear começa a se exibir aproximadamente a partir de 20° , com a redução da força restitutiva comparativamente à do comportamento linear. Portanto, com oscilações maiores do que 20° , o pêndulo não é isócrono.

Considera-se, agora, o oscilador simples representado na parte esquerda da [Figura 3-7.10](#), em que atua, sobre a massa e a partir de $u(t) > u'$, a mola de constante k_2 . A correspondente força restitutiva elástica está representada na parte direita da mesma figura, em caracterização de comportamento não linear por modificação de contato.

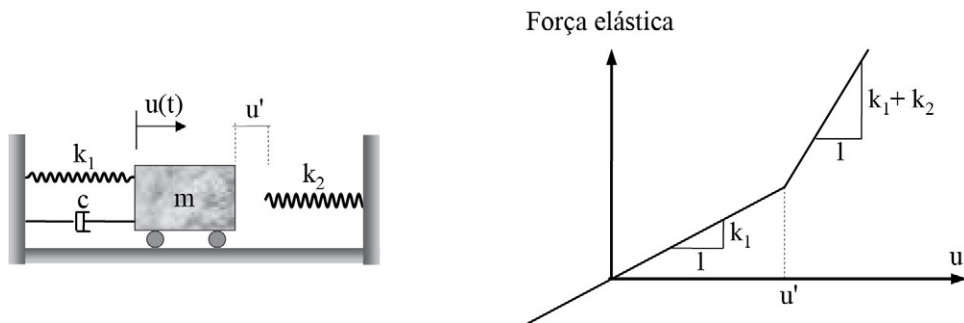


FIGURA 3-7.10 Enrijecimento de oscilador simples por modificação de contato.

Até a presente subseção, as forças de inércia, de amortecimento e elástica foram consideradas proporcionais, respectivamente, à massa, ao coeficiente de amortecimento viscoso e à constante de mola, o que caracteriza material de *comportamento linear*. Contudo, comportamentos não lineares podem ocorrer em estruturas.

A seguir, são detalhados métodos de integração numérica da equação de movimento do oscilador simples, no que concerne à não linearidade da força restitutiva elástica, inicialmente

⁴¹ Observa-se que o procedimento de linearização corresponde a reter apenas o termo linear da expansão em série e se aplica em caso de os termos de ordem superior terem influência desprezível no fenômeno físico.

apenas através de modificação da rigidez e, posteriormente, com um procedimento iterativo de correção da condição de equilíbrio em cada instante de integração.

3-7.4.1 Método por diferença finita central

Pelo fato de o método de integração por diferença finita central ser explícito, a solução referente ao instante t_{i+1} é obtida com a condição de equilíbrio do instante anterior em que se tem a rigidez tangente k_i dependente do deslocamento $u(t_i)$, como ilustra a Figura 3-7.11.

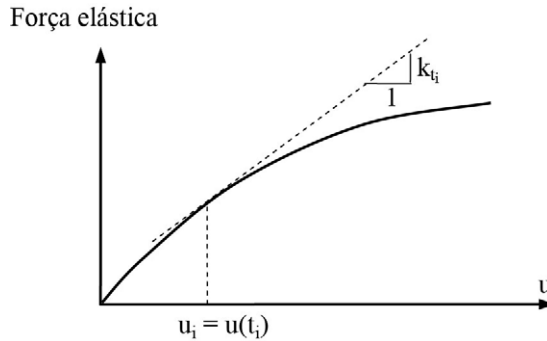


FIGURA 3-7.11 Força elástica versus deslocamento, em comportamento não linear.

Com essa rigidez, a pseudoforça estática expressa na Equação 3-7.30 modifica-se para a forma:

$$f'_i = f_i - \left(k_i - \frac{2m}{\Delta t^2} \right) u_i - \left(\frac{m}{\Delta t^2} - \frac{c}{2\Delta t} \right) u_{i-1} \quad (3-7.59)$$

E como não há alteração da pseudomassa, mantém-se a Equação 3-7.31 da solução de deslocamento referente ao instante t_{i+1} , Equação 3-7.31, que se repete:

$$u_{i+1} = \frac{f'_i}{m} \quad (3-7.60)$$

Naturalmente, a acurácia do método aumenta com a redução do espaçamento de tempo adotado.

3-7.4.2 Método de Newmark

No método de integração de Newmark, por se tratar de um método implícito, a solução referente ao instante t_i é obtida com a condição de equilíbrio desse mesmo instante, o que requer coeficiente de rigidez dependente do deslocamento desconhecido $u(t_i)$. Por essa razão, opera-se com incrementos de deslocamento. Para isso, escreve-se a equação de movimento referente ao instante t_{i-1} :

$$f_{in|i-1} + f_{a|i-1} + f_{ed|i-1} = f_{i-1} \quad (3-7.61)$$

e a equação referente ao instante t_i :

$$f_{in|i} + f_{a|i} + f_{ed|i} = f_i \quad (3-7.62)$$

Com a subtração dessa última equação pela penúltima, obtêm-se os incrementos de força:

$$\Delta f_{in|i} + \Delta f_{a|i} + \Delta f_{el|i} = \Delta f_i \quad (3-7.63)$$

onde

$$\begin{cases} \Delta f_{in|i} = f_{in|i} - f_{in|i-1} \\ \Delta f_{a|i} = f_{a|i} - f_{a|i-1} \\ \Delta f_{el|i} = f_{el|i} - f_{el|i-1} \\ \Delta f_i = f_i - f_{i-1} \end{cases} \quad (3-7.64)$$

Assim, com a aproximação de que o coeficiente de rigidez k_{i-1} se mantenha constante durante o espaçamento ($\Delta t = t_i - t_{i-1}$), escreve-se:

$$\begin{cases} \Delta f_{in|i} = m \Delta \ddot{u}_i \\ \Delta f_{a|i} = c \Delta \dot{u}_i \\ \Delta f_{el|i} = k_{i-1} \Delta u_i \end{cases} \quad (3-7.65)$$

onde

$$\begin{cases} \Delta \ddot{u}_i = \ddot{u}_i - \ddot{u}_{i-1} \\ \Delta \dot{u}_i = \dot{u}_i - \dot{u}_{i-1} \\ \Delta u_i = u_i - u_{i-1} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \ddot{u}_i = \ddot{u}_{i-1} + \Delta \ddot{u}_i \\ \dot{u}_i = \dot{u}_{i-1} + \Delta \dot{u}_i \\ u_i = u_{i-1} + \Delta u_i \end{cases} \quad (3-7.66)$$

Chega-se, assim, à equação de movimento incremental:

$$m \Delta \ddot{u}_i + c \Delta \dot{u}_i + k_{i-1} \Delta u_i = \Delta f_i \quad (3-7.67)$$

Para a resolução dessa equação, tem-se com base na primeira das expressões da Equação 3-7.39:

$$\ddot{u}_{i-1} + \Delta \ddot{u}_i = -\ddot{u}_{i-1} + \frac{4}{\Delta t^2} (\Delta u_i - \dot{u}_{i-1} \Delta t) \rightarrow \Delta \ddot{u}_i = -2\ddot{u}_{i-1} + \frac{4}{\Delta t^2} (\Delta u_i - \dot{u}_{i-1} \Delta t) \quad (3-7.68)$$

De forma semelhante, a partir da segunda das expressões da Equação 3-7.39, tem-se:

$$\dot{u}_{i-1} + \Delta \dot{u}_i = -\dot{u}_{i-1} + \frac{2}{\Delta t} \Delta u_i \rightarrow \Delta \dot{u}_i = -2\dot{u}_{i-1} + \frac{2}{\Delta t} \Delta u_i \quad (3-7.69)$$

Logo, com a substituição das Equações 3-7.68 e 3-7.69 na equação de movimento incremental que antecede a essas expressões, obtém-se:

$$\begin{aligned} & m \left(-2\ddot{u}_{i-1} + \frac{4}{\Delta t^2} (\Delta u_i - \dot{u}_{i-1} \Delta t) \right) + c \left(-2\dot{u}_{i-1} + \frac{2}{\Delta t} \Delta u_i \right) + k_{i-1} \Delta u_i = \Delta f_i \\ \rightarrow & \boxed{k'_i \Delta u_i = \Delta f'_i} \end{aligned} \quad (3-7.70)$$

onde

$$\begin{cases} k'_i = k_{i-1} + \frac{4m}{\Delta t^2} + \frac{2c}{\Delta t} \\ \Delta f'_i = \Delta f_i + m \left(2\ddot{u}_{i-1} + \frac{4}{\Delta t} \dot{u}_{i-1} \right) + 2c \dot{u}_{i-1} \end{cases} \quad (3-7.71)$$

A resolução da Equação 3-7.70 fornece o incremento de deslocamento:

$$\Delta u_i = \frac{\Delta f'_i}{k_{t_i}} \quad (3-7.72)$$

Assim, com as fórmulas anteriores, constrói-se o **Algoritmo 3-7.6**:

– Especificação de $k, m, \xi, u_0, \dot{u}_0, \Delta t$ e f_i em cada discretização do tempo.

Se $u_0 = 0$ e $\dot{u}_0 = 0 \rightarrow \ddot{u}_0 = 0$

Se $u_0 \neq 0$ ou $\dot{u}_0 \neq 0 \rightarrow \ddot{u}_0 = (f_0 - c\dot{u}_0 - k u_0)/m$

$\omega_n = \sqrt{k/m}, \quad c = 2\xi m \omega_n$

$\rightarrow i = 1, 2, \dots$ até o número total de instantes de discretização

$\Delta f_i = f_i - f_{i-1}, \quad k'_{t_i} = k_{t_{i-1}} + \frac{4m}{\Delta t^2} + \frac{2c}{\Delta t}$

$\Delta f'_i = \Delta f_i + m \left(2\ddot{u}_{i-1} + \frac{4}{\Delta t} \dot{u}_{i-1} \right) + 2c \dot{u}_{i-1}, \quad \Delta u_i = \frac{\Delta f'_i}{k'_{t_i}}$

$\Delta \dot{u}_i = -2\ddot{u}_{i-1} + \frac{2}{\Delta t} \Delta u_i, \quad \Delta \ddot{u}_i = -2\ddot{u}_{i-1} + \frac{4}{\Delta t^2} (\Delta u_i - \dot{u}_{i-1} \Delta t)$

$u_i = u_{i-1} + \Delta u_i, \quad \dot{u}_i = \dot{u}_{i-1} + \Delta \dot{u}_i, \quad \ddot{u}_i = \ddot{u}_{i-1} + \Delta \ddot{u}_i$

ALGORITMO 3-7.6 *Método de integração de Newmark com incrementos de deslocamento.*

3-7.4.3 Método de Wilson θ

O método de integração de Wilson θ é também implícito, para o qual, de forma semelhante à expressão da Equação 3-7.67, escreve-se a equação de movimento incremental:

$$m \Delta \ddot{u}_{\theta i} + c \Delta \dot{u}_{\theta i} + k_{t_{i-1}} \Delta u_{\theta i} = \Delta f_{\theta i} \quad (3-7.73)$$

em que se considera:

$$\begin{cases} \ddot{u}_{t_{i-1}+\theta\Delta t} \equiv \ddot{u}_{\theta} = \ddot{u}_{i-1} + \Delta \ddot{u}_{\theta i} \\ \dot{u}_{t_{i-1}+\theta\Delta t} \equiv \dot{u}_{\theta} = \dot{u}_{i-1} + \Delta \dot{u}_{\theta i} \\ u_{t_{i-1}+\theta\Delta t} \equiv u_{\theta} = u_{i-1} + \Delta u_{\theta i} \\ f_{t_{i-1}+\theta\Delta t} \equiv f_{\theta} = f_{i-1} + \Delta f_{\theta i} \end{cases} \quad (3-7.74)$$

Para a resolução da equação de movimento anterior, tem-se, com base na segunda das expressões da Equação 3-7.45:

$$\begin{aligned} u_{i-1} + \Delta u_{\theta i} &= u_{i-1} + \dot{u}_{i-1} \theta \Delta t + (\ddot{u}_{i-1} + \Delta \ddot{u}_{\theta i} + 2\ddot{u}_{i-1}) \frac{\theta^2 \Delta t^2}{6} \\ \rightarrow \Delta u_{\theta i} &= \theta \Delta t \dot{u}_{i-1} + \frac{\theta^2 \Delta t^2}{2} \ddot{u}_{i-1} + \frac{\theta^2 \Delta t^2}{6} \Delta \ddot{u}_{\theta i} \\ \rightarrow \Delta \ddot{u}_{\theta i} &= \frac{6}{\theta^2 \Delta t^2} \left(\Delta u_{\theta i} - \theta \Delta t \dot{u}_{i-1} - \frac{\theta^2 \Delta t^2}{2} \ddot{u}_{i-1} \right) \end{aligned} \quad (3-7.75)$$

De forma semelhante, com base na primeira das expressões da Equação 3-7.45 tem-se:

$$\dot{u}_{i-1} + \Delta \dot{u}_{\theta i} = \dot{u}_{i-1} + (\ddot{u}_{i-1} + \Delta \ddot{u}_{\theta i} + \ddot{u}_{i-1}) \frac{\theta \Delta t}{2} \rightarrow \Delta \dot{u}_{\theta i} = \theta \Delta t \ddot{u}_{i-1} - \frac{\theta \Delta t}{2} \Delta \ddot{u}_{\theta i} \quad (3-7.76)$$

Além disso, com a substituição da Equação 3-7.75 nessa última expressão, obtém-se:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{u}_{\theta i} &= \theta \Delta t \ddot{u}_{i-1} + \frac{3}{\theta \Delta t} \left(\Delta u_{\theta i} - \theta \Delta t \dot{u}_{i-1} - \frac{\theta^2 \Delta t^2}{2} \ddot{u}_{i-1} \right) \\ \rightarrow \Delta \dot{u}_{\theta i} &= \frac{3}{\theta \Delta t} \Delta u_{\theta i} - 3 \dot{u}_{i-1} - \frac{\theta \Delta t}{2} \ddot{u}_{i-1} \end{aligned} \quad (3-7.77)$$

Logo, com a substituição das Equações 3-7.75 e 3-7.77 na Equação de movimento 3-7.73, obtém-se:

$$\begin{aligned} m \frac{6}{\theta^2 \Delta t^2} \left(\Delta u_{\theta i} - \theta \Delta t \dot{u}_{i-1} - \frac{\theta^2 \Delta t^2}{2} \ddot{u}_{i-1} \right) + c \left(\frac{3}{\theta \Delta t} \Delta u_{\theta i} - 3 \dot{u}_{i-1} - \frac{\theta \Delta t}{2} \ddot{u}_{i-1} \right) + k_{t_{i-1}} \Delta u_{\theta i} &= \Delta f_{\theta i} \\ \rightarrow \boxed{k'_{t_i} \Delta u_{\theta i} = \Delta f'_i} \end{aligned} \quad (3-7.78)$$

onde

$$\begin{cases} k'_{t_i} = k_{t_{i-1}} + \frac{6m}{\theta^2 \Delta t^2} + \frac{3c}{\theta \Delta t} \\ \Delta f'_i = \Delta f_{\theta i} + m \left(\frac{6}{\theta \Delta t} \dot{u}_{i-1} + 3 \ddot{u}_{i-1} \right) + c \left(3 \dot{u}_{i-1} + \frac{\theta \Delta t}{2} \ddot{u}_{i-1} \right) \end{cases} \quad (3-7.79)$$

A resolução da Equação 3-7.78 fornece o incremento de deslocamento:

$$\boxed{\Delta u_{\theta i} = \frac{\Delta f'_i}{k'_{t_i}}} \quad (3-7.80)$$

Com as fórmulas anteriores, constrói-se o **Algoritmo 3-7.7**:

– Especificação de k , m , ξ , u_o , \dot{u}_o , Δt e f_i em cada discretização do tempo.

Se $u_o = 0$ e $\dot{u}_o = 0 \rightarrow \ddot{u}_o = 0$

Se $u_o \neq 0$ ou $\dot{u}_o \neq 0 \rightarrow \ddot{u}_o = (f_o - c \dot{u}_o - k u_o) / m$

$\omega_n = \sqrt{k / m}$, $c = 2 \xi m \omega_n$

→ $i = 1, 2, \dots$ até o número total de instantes de discretização

$\Delta f_{\theta i} = \theta (f_i - f_{i-1})$, $k'_{t_i} = k_{t_{i-1}} + \frac{6m}{\theta^2 \Delta t^2} + \frac{3c}{\theta \Delta t}$

$\Delta f'_i = \Delta f_{\theta i} + m \left(\frac{6}{\theta \Delta t} \dot{u}_{i-1} + 3 \ddot{u}_{i-1} \right) + c \left(3 \dot{u}_{i-1} + \frac{\theta \Delta t}{2} \ddot{u}_{i-1} \right)$, $\Delta u_{\theta i} = \frac{\Delta f'_i}{k'_{t_i}}$

$\Delta \ddot{u}_{\theta i} = \frac{6}{\theta^2 \Delta t^2} \left(\Delta u_{\theta i} - \theta \Delta t \dot{u}_{i-1} - \frac{\theta^2 \Delta t^2}{2} \ddot{u}_{i-1} \right)$

$\Delta \dot{u}_{\theta i} = \frac{3}{\theta \Delta t} \Delta u_{\theta i} - 3 \dot{u}_{i-1} - \frac{\theta \Delta t}{2} \ddot{u}_{i-1}$

$u_i = u_{i-1} + \frac{\Delta u_{\theta i}}{\theta}$, $\dot{u}_i = \dot{u}_{i-1} + \frac{\Delta \dot{u}_{\theta i}}{\theta}$, $\ddot{u}_i = \ddot{u}_{i-1} + \frac{\Delta \ddot{u}_{\theta i}}{\theta}$

ALGORITMO 3-7.7 Método de integração de Wilson θ com incrementos de deslocamento.

3-7.4.4 Procedimentos iterativos

Nas três resoluções incrementais anteriores, a solução referente a cada instante de integração foi obtida com a rigidez tangente do instante anterior, o que acarreta acumulação de aproximações ao longo da determinação de histórico de resposta. Correção ao equilíbrio em cada instante pode ser feita em procedimento iterativo, como o de *Newton-Raphson*⁴² que, na chamada *forma modificada*, é ilustrado na Figura 3-7.12.

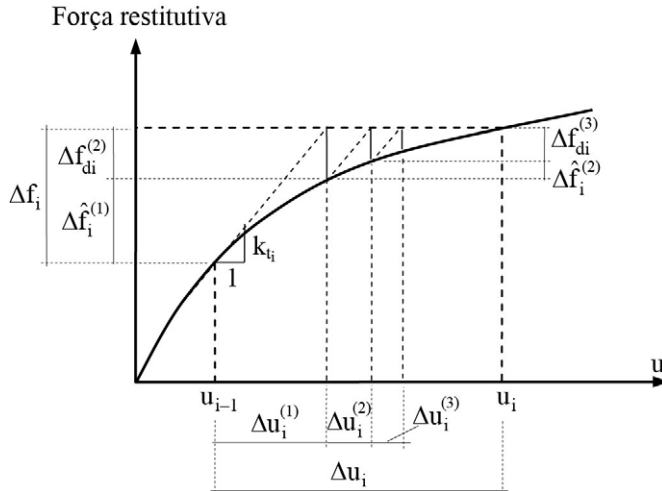


FIGURA 3-7.12 Procedimento iterativo de *Newton-Raphson modificado*.

Para o instante t_i e no *método de integração de Newmark*, obtém-se, como primeira etapa de procedimento iterativo, o incremento de deslocamento:

$$k'_{t_i} \Delta u_i^{(1)} = \Delta f'_i \rightarrow \Delta u_i^{(1)} = \frac{\Delta f'_i}{k'_{t_i}} \quad (3-7.81)$$

com k'_{t_i} e $\Delta f'_i$ definidos na Equação 3-7.71.

No *método de integração de Wilson* θ e em determinação do incremento de deslocamento $\theta \Delta u_i^{(1)}$, utilizam-se as Equações 3-7.78 e 3-7.79.

Com o incremento anterior e a lei da força restitutiva *versus* deslocamento, como mostra a referida figura, identifica-se a força desequilibrada:

$$\Delta f_{di}^{(2)} = \Delta f_i - \hat{\Delta f}_i^{(1)} \quad (3-7.82)$$

Com essa força, obtém-se um novo incremento de deslocamento:

⁴² Denominação em homenagem ao matemático inglês Joseph Raphson (1648-1715) e a Isaac Newton, que utilizaram esse método em determinação de raízes de funções de valores reais.

$$k_{t_i}' \Delta u_i^{(2)} = \Delta f_{di}^{(2)} \rightarrow \Delta u_i^{(2)} = \frac{\Delta f_{di}^{(2)}}{k_{t_i}'} \quad (3-7.83)$$

ao qual se associa a nova força desequilibrada:

$$\Delta f_{di}^{(3)} = \Delta f_{di}^{(2)} - \Delta \hat{f}_i^{(2)} \quad (3-7.84)$$

E com essa força, obtém-se outro incremento de deslocamento:

$$k_{t_i}' \Delta u_i^{(3)} = \Delta f_{di}^{(3)} \rightarrow \Delta u_i^{(3)} = \frac{\Delta f_{di}^{(3)}}{k_{t_i}'} \quad (3-7.85)$$

e assim por diante.

Dessa maneira, na I-ésima iteração tem-se o incremento de deslocamento referente ao instante t_i :

$$\Delta u_i = \sum_{j=1}^I \Delta u_i^{(j)} \quad (3-7.86)$$

e o procedimento deve ser interrompido ao se atingir uma certa tolerância de convergência, como por exemplo:

$$\left| \frac{\Delta u_i^{(1)}}{\Delta u_i} \right| \leq \text{tolerância} \quad (3-7.87)$$

Chega-se, assim, ao deslocamento, que diz respeito ao instante t_i :

$$u_i = u_{i-1} + \Delta u_i \quad (3-7.88)$$

É simples incluir esse procedimento iterativo nos dois últimos algoritmos e estendê-lo a modelos com diversos graus de liberdade. Contudo, em se tratando do oscilador simples, o presente procedimento é indicado apenas em caso de não linearidade moderada. Isso porque, com não linearidade severa, a convergência pode ser lenta ou não ocorrer. A alternativa é, então, utilizar o *procedimento de Newton-Raphson não modificado*, que se caracteriza pela atualização do coeficiente de rigidez em cada iteração, como ilustra a [Figura 3-7.13](#).

Através da observação das Figuras 3-7.12 e 3-7.13, evidencia-se a superioridade de convergência do *procedimento de Newton-Raphson não modificado*. Contudo, a extensão desse procedimento a modelos de muitos graus de liberdade requer volume de cálculo muito mais elevado do que com o procedimento modificado, o que pode vir a oferecer dificuldade de processamento computacional.

Já com o método por diferença finita central, uma vez que a solução em cada instante é obtida com a condição de equilíbrio do instante anterior, é mais indicado utilizar apenas iterações em cada instante de integração. Para isso, a partir da segunda iteração, substitui-se a rigidez tangente pela rigidez secante, como ilustra a [Figura 3-7.14](#). O procedimento deve ser interrompido na iteração em que seja atingida uma tolerância de convergência. Essa

tolerância pode ser em termos do incremento de deslocamento, do deslocamento total ou da força restitutiva. Para o caso do deslocamento total, por exemplo, estabelece-se a condição:

$$\frac{|u_{i+1}^{(1)}|}{|u_{i+1}^{(1-1)}|} \leq \text{tolerância} \quad (3-7.89)$$

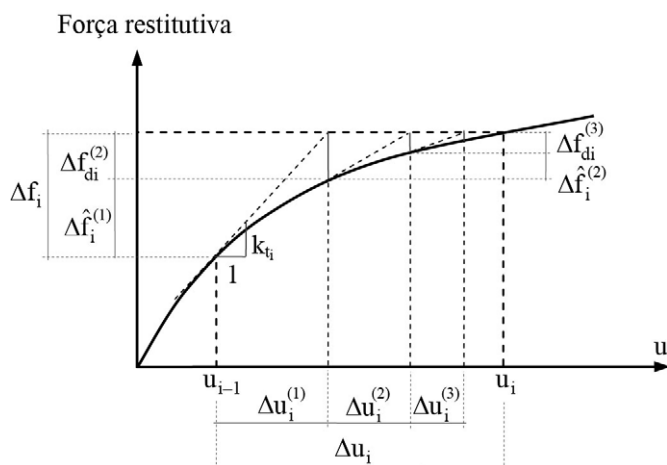


FIGURA 3-7.13 Procedimento iterativo de Newton-Raphson não modificado.

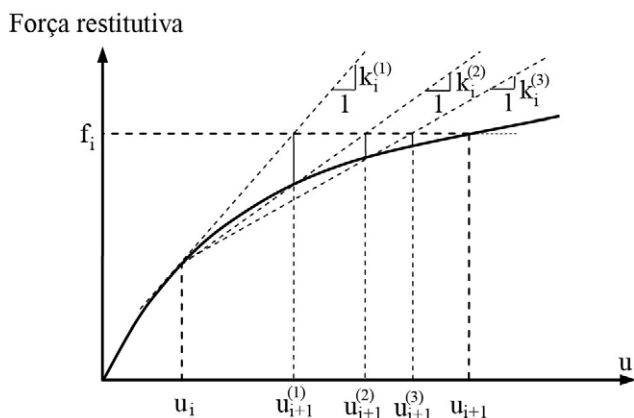


FIGURA 3-7.14 Procedimento iterativo com modificação da rigidez.

Assim, a eficácia e a acurácia de cada procedimento iterativo dependem da não linearidade e do espaçamento de integração.

3-8 CONTROLE DE TRANSMISSÃO DE VIBRAÇÃO

Estruturas podem ser excitadas através do movimento de suas bases ou suportes, como devido a terremotos, explosões subterrâneas e tráfego, assim como estruturas veiculares são excitadas ao se deslocarem em pisos irregulares. De forma inversa, vibrações provenientes de equipamentos instalados em estruturas podem ser transmitidas às correspondentes bases e se propagar no meio exterior. Em ambas as circunstâncias, as vibrações devem ser controladas para se evitar dano nas estruturas e correspondentes bases, como também para não afetar a utilização das mesmas, que é o caso do conforto de seus usuários e/ou do desgaste de peças e mau funcionamento de equipamentos sensíveis a vibrações. Em resumo, esse controle objetiva reduzir a transmissão, eliminando-se efeitos indesejáveis. E isso pode ser feito através de modificação da fonte excitadora, de alterações da estrutura, como também através de isoladores de base ou com a adição de dispositivos especiais que absorvam vibrações.

Os isoladores de vibração são usualmente molas metálicas, suportes constituídos de elásticos (naturais ou sintéticos) ou dispositivos metálicos com partes que se deslocam entre si. E esses isoladores são classificados como *passivos* ou *ativos*. Os primeiros convertem energia cinética em calor, absorvem vibrações ou transferem energia entre modos naturais de vibração.⁴³ Já os dispositivos ativos são os de atuação em tempo real, constituídos de sensores e controle digital, que ativam equipamentos hidráulicos que movimentam massas que “contrabalançam” as oscilações da estrutura. Dessa forma, o estudo do controle de transmissão de vibração tem diversas vertentes, e um amplo estudo está além do escopo deste livro, que apresenta uma introdução ao tema.

Seguidamente aborda-se o caso do oscilador subamortecido sob aceleração em sua base e, posteriormente, será tratada a questão em que uma força externa é aplicada à massa desse oscilador.⁴⁴

Esse oscilador está esquematizado na Figura 3-8.1, em que $u_b(t)$ é o deslocamento da base, $w(t)$ é o deslocamento da massa em relação à base, denominado *deslocamento relativo*, e $u(t)$

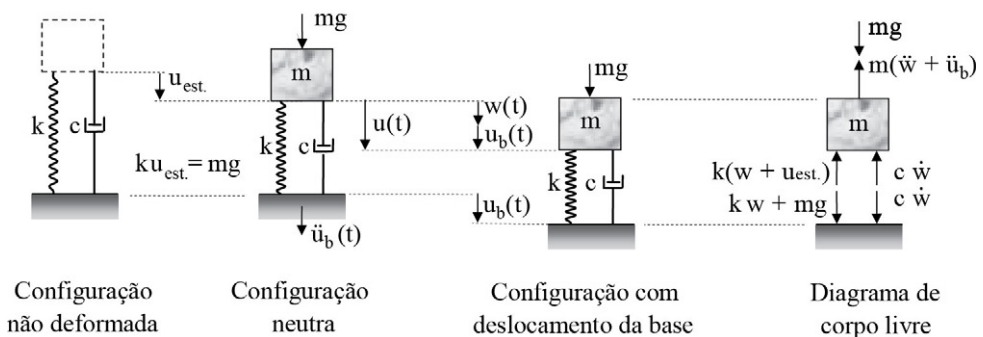


FIGURA 3-8.1 Oscilador simples com movimento da base.

⁴³ Os modos naturais de vibração serão apresentados no próximo capítulo.

⁴⁴ O controle de vibração através de *absorvedor de vibração* será apresentado na Seção 4-5, em aplicação do estudo de modelo de dois graus de liberdade, e o estudo de estruturas submetidas a terremotos será desenvolvido no Capítulo 8.

é o *deslocamento dinâmico (absoluto)* ou *deslocamento total*, medido a partir da configuração neutra (em relação a um referencial inercial). Esses deslocamentos se relacionam sob a forma:

$$u(t) = w(t) + u_b(t) \quad (3-8.1)$$

Para o descrito oscilador, escreve-se a força de inércia:

$$f_{in}(t) = m(\ddot{w}(t) + \ddot{u}_b(t)) \quad (3-8.2)$$

Com a consideração da força estática ($ku_{est.} = mg$), em que $u_{est.}$ é o deslocamento devido ao peso da massa e em relação à base do oscilador, a força transmitida à base está representada na parte direita da figura anterior e se escreve:

$$f_b(t) = mg + kw(t) + c\dot{w}(t) \quad (3-8.3)$$

Nessa figura está também representado o diagrama de corpo livre da massa do oscilador, que facilita escrever a equação de equilíbrio dinâmico:

$$\begin{aligned} m(\ddot{w}(t) + \ddot{u}_b(t)) - mg + c\dot{w}(t) + k(w(t) + u_{est.}) &= 0 \\ \rightarrow m\ddot{w}(t) + c\dot{w}(t) + kw(t) &= -m\ddot{u}_b(t) \end{aligned} \quad (3-8.4)$$

Essa equação evidencia equivalência entre a aceleração da base, $\ddot{u}_b(t)$, e a aplicação da força fictícia $-m\ddot{u}_b(t)$ suposta aplicada à massa. Consequentemente, os métodos de resolução da equação de movimento do oscilador simples desenvolvidos nas seções precedentes se adéquam à equação anterior, qualquer que seja a lei daquela aceleração.

Devido à grande importância de ações harmônicas, considera-se o movimento harmônico cossenoidal da base:

$$u_b(t) = u_{bo} \cos(\omega t) \quad (3-8.5)$$

que tem como força dinâmica equivalente:

$$f(t) = -m\ddot{u}_b(t) = mu_{bo}\omega^2 \cos(\omega t) \quad (3-8.6)$$

Com essa força, a equação de movimento anterior particulariza-se em:

$$m\ddot{w}(t) + c\dot{w}(t) + kw(t) = mu_{bo}\omega^2 \cos(\omega t) \quad (3-8.7)$$

Logo, com base na Equação 3-4.16, escreve-se a resposta em regime permanente do oscilador:

$$\begin{aligned} w(t) &= \frac{mu_{bo}\omega^2}{k} A_d \cos(\omega t - \phi) \\ \rightarrow w(t) &= u_{bo} A_d r^2 \cos(\omega t - \phi) \end{aligned} \quad (3-8.8)$$

Nessa expressão, A_d é o fator de amplificação dinâmica definido na Equação 3-4.15, ϕ é o ângulo de fase expresso na Equação 3-4.9 e r é a razão de frequências definida na Equação 3-4.5.

A partir dessa expressão define-se o *fator de amplificação do deslocamento relativo* como a razão entre a amplitude desse deslocamento e a amplitude do deslocamento da base, o que se escreve:

$$\frac{w_{\text{máx}}}{u_{\text{bo}}} = A_d r^2 = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\xi)^2}} \quad (3-8.9)$$

A **Figura 3-8.2** mostra representações desse fator *versus* razão de frequências, para diversos valores da razão de amortecimento.

Fator de amplificação do deslocamento relativo

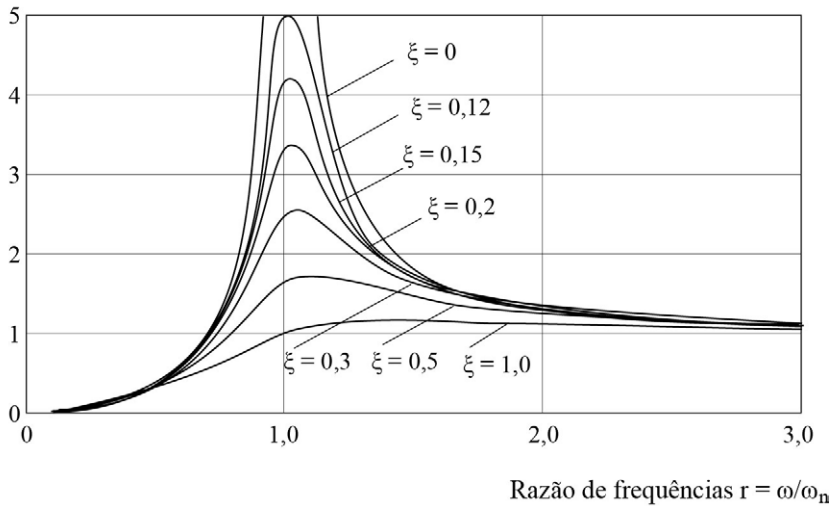


FIGURA 3-8.2 Fator de amplificação do deslocamento relativo *versus* razão de frequências.

Por observação da figura anterior, conclui-se que, em regime permanente:

1. Com $(\omega \ll \omega_n \rightarrow r \ll 1)$, que é condição que expressa movimento de base muito lento em relação à capacidade de oscilação do sistema, a massa praticamente acompanha esse movimento. Assim, o deslocamento relativo é muito pequeno, com conseqüente geração de forças elásticas e de inércia desprezíveis. Ou seja, em caso de rigidez muito grande relativamente à massa, o oscilador acompanha o movimento da base.
2. Com $(\omega \approx \omega_n \rightarrow r \approx 1)$, ocorre o fenômeno de quase ressonância no qual pequenos movimentos da base provocam grandes deslocamentos relativos e elevadas forças elásticas. Esses deslocamentos e forças se reduzem à medida que se aumenta o amortecimento do sistema.
3. Com $(\omega \gg \omega_n \rightarrow r \gg 1)$, que é condição que expressa movimento de base muito rápido em relação à capacidade de oscilação do sistema, os deslocamentos relativos são praticamente iguais aos deslocamentos da base, com o conseqüente desenvolvimento de grandes forças de inércia.⁴⁵ Isto é, em caso de rigidez muito pequena em relação à massa, esta permanece praticamente estacionária.

⁴⁵ O fato de que, com razões de frequência bem maiores do que a unidade, o deslocamento relativo praticamente iguala o deslocamento da base é utilizado em equipamentos registradores de deslocamentos.

Em continuidade do estudo de transmissão de vibração, a equação de movimento apresentada na Equação 3-8.4 se modifica para a seguinte forma em termos do deslocamento absoluto:

$$m\ddot{u}(t) + c(\dot{u}(t) - \dot{u}_b(t)) + k(u(t) - u_b(t)) = 0 \quad (3-8.10)$$

que, com o movimento harmônico da base expresso na Equação 3-8.5, se escreve:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = ku_{bo} \cos(\omega t) - cu_{bo}\omega \sin(\omega t) \quad (3-8.11)$$

Pode-se verificar que essa equação tem a solução particular:

$$u(t) = u_{bo} A_d \sqrt{1 + (2r\xi)^2} \cos(\omega t + \beta - \phi) \quad (3-8.12)$$

em que:

$$\beta = \arctg(2r\xi) \quad (3-8.13)$$

Logo, obtém-se o deslocamento absoluto máximo:

$$\begin{aligned} u_{\text{máx.}} &= u_{bo} A_d \sqrt{1 + (2r\xi)^2} \\ \rightarrow u_{\text{máx.}} &= u_{bo} \frac{\sqrt{1 + (2r\xi)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\xi)^2}} \end{aligned} \quad (3-8.14)$$

A partir da expressão anterior, define-se o *fator de amplificação do deslocamento absoluto* como a razão entre a amplitude desse deslocamento e a amplitude do deslocamento da base, o que se escreve:

$$\frac{u_{\text{máx.}}}{u_{bo}} = A_d \sqrt{1 + (2r\xi)^2} = \frac{\sqrt{1 + (2r\xi)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\xi)^2}} \quad (3-8.15)$$

A próxima figura mostra representações desse fator *versus* razão de frequências, com diversos valores de razão de amortecimento. Observa-se que todas as curvas passam por um mesmo correspondente à razão de frequências igual a $\sqrt{2}$, e conclui-se que, em regime permanente:

1. Com $(\omega \ll \omega_n \rightarrow r \ll 1)$, o deslocamento absoluto é muito próximo ao deslocamento da base, o que significa que a massa praticamente acompanha o movimento basal.
2. Com $(\omega / \omega_n > \sqrt{2} \rightarrow r > \sqrt{2})$, o deslocamento absoluto é menor do que o deslocamento da base, mas aumenta com o amortecimento.
3. Com $(\omega \gg \omega_n \rightarrow r \gg \sqrt{2})$, o deslocamento absoluto é muito menor do que o deslocamento da base. O deslocamento relativo tem sinal contrário ao basal, com valor absoluto próximo ao desse último.

Fator de amplificação do deslocamento absoluto

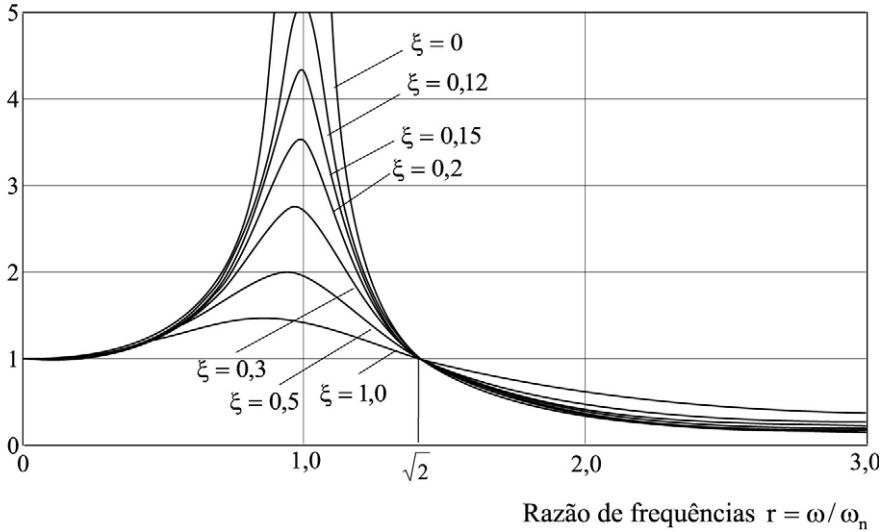


FIGURA 3-8.3 Fator de amplificação do deslocamento absoluto *versus* razão de frequências.

EXEMPLO 3-8.1

Um veículo idealizado como oscilador simples subamortecido desloca-se com velocidade horizontal constante v , em um piso irregular idealizado em forma cossenoidal, como esquematizado na Figura E3-8.1. Obtêm-se a equação de movimento desse oscilador e o esforço máximo na mola.

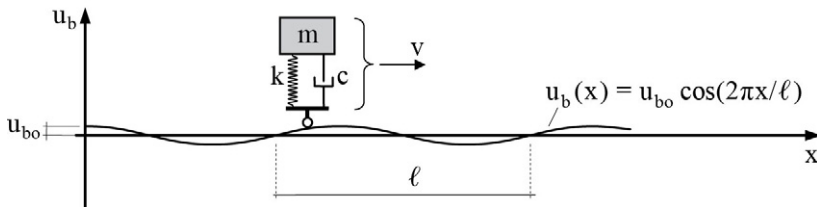


FIGURA E3-8.1 Oscilador simples em deslocamento sobre base cossenoidal.

A frequência natural do oscilador é $(\omega_n = (k/m)^{1/2})$, e a distância percorrida é $(x = vt)$. Logo, têm-se o período $(T = \ell/v)$ e o deslocamento imposto pela base $(u_b(t) = u_{bo}\cos(\omega t))$, onde $(\omega = 2\pi v/\ell)$. Assim, a partir da Equação 3-8.7 chega-se à equação do movimento do oscilador em termos do deslocamento relativo:

$$m\ddot{w}(t) + c\dot{w}(t) + kw(t) = mu_{bo}\left(\frac{2\pi v}{\ell}\right)^2 \cos\left(\frac{2\pi v}{\ell}t\right)$$

Com base na Equação 3-8.9 tem-se o deslocamento relativo máximo:

$$w_{\max.} = \frac{u_{bo}r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\xi)^2}}$$

Logo, o encurtamento máximo da mola é:

$$u_{\text{est.}} + w_{\text{máx.}} = \frac{mg}{k} + \frac{u_{\text{bo}} r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\xi)^2}}$$

Esse encurtamento fornece a força elástica compressiva máxima:

$$f_{\text{el}} = k(u_{\text{est.}} + w_{\text{máx.}}) \rightarrow f_{\text{el}} = mg + \frac{ku_{\text{bo}} r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\xi)^2}}$$

em que:

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{2\pi v}{\ell} \sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{e} \quad \xi = \frac{c}{2\sqrt{km}}$$

Considera-se, agora, o amortecedor simples subamortecido sob a força harmônica ($f(t) = f_o \cos(\omega t)$), como representado na [Figura 3-8.4](#), em que o deslocamento dinâmico $u(t)$ é medido a partir da configuração neutra.⁴⁶

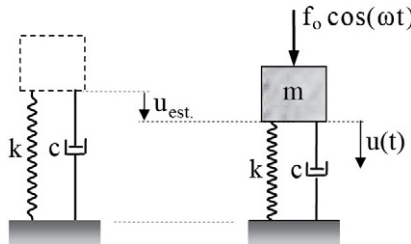


FIGURA 3-8.4 Oscilador sob força harmônica.

Esse oscilador tem a seguinte resposta em regime permanente:

$$u(t) = \frac{f_o}{k} A_d \cos(\omega t - \phi) \quad (3-8.16)$$

Assim, a correspondente força elástica exercida sobre a base é:

$$f_{\text{el}}(t) = ku(t) = f_o A_d \cos(\omega t - \phi) \quad (3-8.17)$$

que tem como valor máximo:

$$f_{\text{el}/\text{máx.}} = f_o A_d \quad (3-8.18)$$

⁴⁶ Esse pode ser o caso da excitação de um equipamento e que se deseje reduzir a vibração transmitida à base através da inserção, entre o equipamento e a base, de um componente resiliente de rigidez k e de um dissipador de energia de razão de amortecimento ξ , em constituição de um *isolamento passivo de vibração*. Alternativamente, pode-se alterar a frequência natural do sistema através de acréscimo de massa ao equipamento.

A partir da Equação 3-8.16, escreve-se a velocidade da massa em relação à base, que no presente caso é indeslocável:

$$\dot{u}(t) = -\frac{f_0}{k} A_d \omega \sin(\omega t - \phi) \quad (3-8.19)$$

Assim, a força de amortecimento ($c\dot{u}(t) = 2m\omega_n \xi \dot{u}(t)$) exercida sobre a base tem a expressão:

$$f_a(t) = -2m\omega_n \xi \frac{f_0}{k} A_d \omega \sin(\omega t - \phi) \rightarrow f_a(t) = -2f_0 \xi r A_d \sin(\omega t - \phi) \quad (3-8.20)$$

que corresponde ao valor máximo:

$$f_{a/m\acute{a}x.} = 2f_0 \xi r A_d \quad (3-8.21)$$

Logo, como a força dinâmica transmitida à base é ($f_{el}(t) + f_a(t)$) e a força de amortecimento é defasada de $\pi/2$ em relação à força elástica, a amplitude daquela força tem a forma:

$$f_{m\acute{a}x.} = \sqrt{f_{el/m\acute{a}x.}^2 + f_{a/m\acute{a}x.}^2} \rightarrow f_{m\acute{a}x.} = f_0 A_d \sqrt{1 + (2r\xi)^2} \quad (3-8.22)$$

A razão entre essa força máxima e a amplitude da força harmônica excitadora é chamada de *fator de transmissibilidade* ou, simplesmente, *transmissibilidade*, e se escreve:

$$TR = \frac{f_{m\acute{a}x.}}{f_0} \rightarrow TR = A_d \sqrt{1 + (2r\xi)^2} = \frac{\sqrt{1 + (2r\xi)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\xi)^2}} \quad (3-8.23)$$

Vê-se que esse resultado é idêntico ao *fator de amplificação do deslocamento absoluto* que foi expresso na Equação 3-8.15. Assim, a [Figura 3-8.3](#) representa também o fator de transmissibilidade *versus* razão de frequências.

Conclui-se que, em regime permanente:

1. Com $\omega/\omega_n < \sqrt{2}$, a força transmitida à base é maior do que a amplitude da força excitadora, embora aquela força diminua à medida que se aumenta o amortecimento. Assim, essa não é a condição desejável quando o objetivo é proteger a base quanto a vibrações. E não sendo possível modificar essa condição, é indicada a utilização de isoladores elastoplásticos, que têm elevado amortecimento.
2. Com $\omega/\omega_n > \sqrt{2}$, a força transmitida à base é menor do que a força excitadora. É essa a condição desejável em isolamento de vibração harmônica proveniente de uma estrutura, o que costuma requerer reduzido coeficiente de rigidez. No caso, como o amortecimento tem influência pequena (com muito pouco crescimento da força transmitida à medida que se aumenta o amortecimento), é indicado o uso de isoladores constituídos por molas metálicas, que têm amortecimento muito pequeno.

Em caso de $\omega/\omega_n > \sqrt{2}$, pode parecer conveniente eliminar o amortecimento para reduzir o referido fator de transmissibilidade que, então, se particulariza em:

$$TR = \frac{1}{r^2 - 1} \quad (3-8.24)$$

com a utilização do sinal negativo na Equação 3-8.23 para se ter esse fator com sinal positivo. Contudo, como a força harmônica proveniente de equipamento rotativo passa pela

condição de ressonância durante a partida e a parada do equipamento, é importante algum amortecimento para que sejam limitadas as amplitudes durante o regime transiente.

Além disso, para avaliar a transmissão de vibração na condição de $\omega/\omega_n > \sqrt{2}$, a partir da Equação 3-8.24 define-se a *eficiência de um isolamento de vibração* como:

$$\text{EIS} = 1 - \text{TR} = \frac{r^2 - 2}{r^2 - 1} \quad (3-8.25)$$

Um perfeito isolamento, que é hipotético, corresponde a ($\text{EIS} = 1$) e nenhum isolamento é expresso por ($\text{EIS} = 0$).

O estudo da transmissão de vibração é básico ao projeto de instrumentos de medição de vibrações que consistem em um oscilador simples amortecido instalado em uma cápsula rígida a ser fixada à superfície em que se deseja mensurar a vibração. A grandeza medida é o deslocamento relativo entre essa cápsula e a massa do oscilador, deslocamento este que é amplificado por dispositivo mecânico, elétrico ou ótico. E dependendo da aplicação, esse deslocamento é relacionado com a aceleração da base.

Este é um dos mais relevantes capítulos deste livro. As informações de amortecimento apresentadas são essenciais em análise dinâmica de estrutura. As resoluções desenvolvidas para o oscilador simples amortecido são fundamentais ao importante método de superposição modal de análise de modelo de multigráus de liberdade, que recai em resoluções de equações diferenciais desacopladas análogas às desse oscilador, como será mostrado no Capítulo 6. Também os métodos de integração numérica apresentados constituem a base para o desenvolvimento de métodos de integração direta das equações diferenciais de movimento daqueles modelos. As curvas de resposta em frequência obtidas para o oscilador simples são orientadoras em análise daqueles modelos. Além disso, a análise do oscilador simples por movimento da base será estendida e aplicada ao estudo dos sismos no Capítulo 8.

3-9 EXERCÍCIOS PROPOSTOS

- 3-9.1** Em vibração livre, um oscilador simples de ($m = 10 \text{ kg}$) e ($k = 5000 \text{ N/m}$) tem, em 10 ciclos, redução de 60% de amplitude. Pede-se determinar ω_n , ξ , ω_a e c .
- 3-9.2** Um oscilador simples de ($m = 10 \text{ kg}$), ($k = 10000 \text{ N/m}$) e ($c = 20 \text{ N.s/m}$) é colocado a vibrar com as condições iniciais ($u_0 = 0,05 \text{ m}$) e ($v_0 = 10 \text{ m/s}$). Pede-se obter a amplitude de oscilação máxima.
- 3-9.3** Em experimento de vibração livre de uma estrutura, obteve-se o registro mostrado na [Figura 3-9.3](#). Com o uso de uma escala, pede-se determinar o período natural amortecido. A partir desse período, calcule a razão de amortecimento. No caso de ($m = 200 \text{ kg}$), calcule o coeficiente de rigidez do oscilador simples correspondente. E com base em equivalência desenvolvida na [Subseção 3-5.5](#) e frequência forçante igual a 20 Hz, qual é o coeficiente de amortecimento estrutural equivalente?

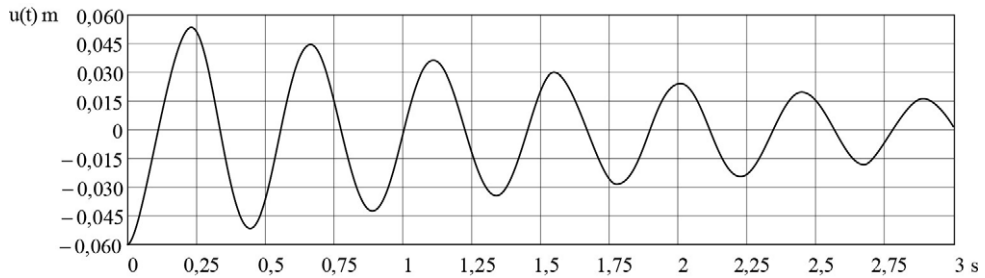


FIGURA 3-9.3 Registro de vibração livre amortecida.

3-9.4 Também em experimento de uma estrutura obteve-se a *curva de amplitude em regime permanente versus frequência forçante* mostrada na [Figura 3-9.4](#). A partir dessa curva, pede-se determinar a razão de amortecimento da estrutura. Além disso, considerando uma rigidez equivalente de 50 kN/m, determine a massa do oscilador simples equivalente.

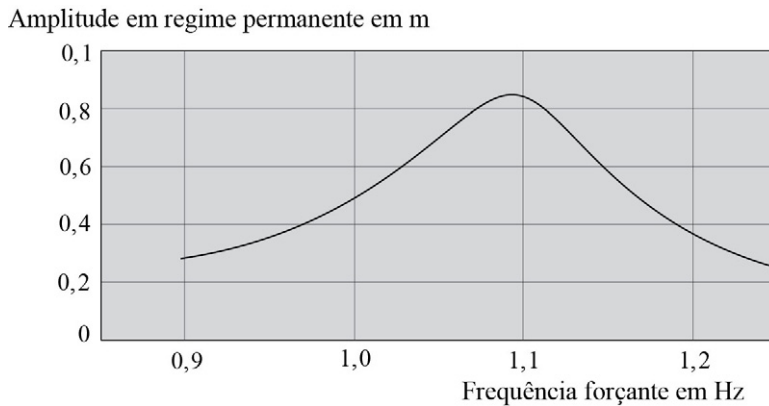
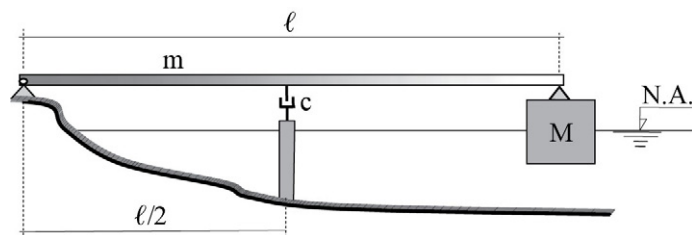
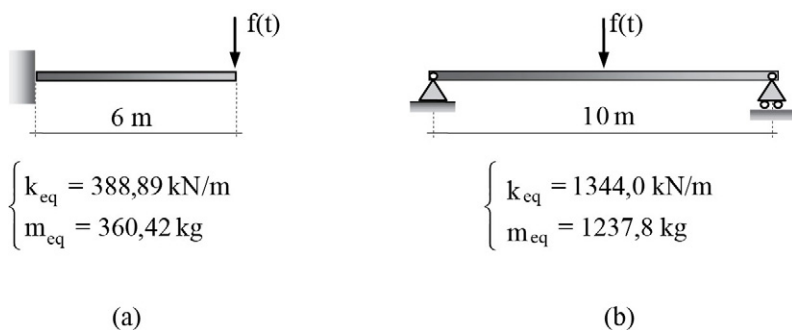


FIGURA 3-9.4 Amplitude em regime permanente *versus* frequência forçante.

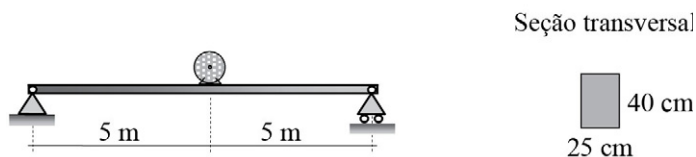
3-9.5 O sistema do Exemplo 1-5.2 é agora alterado pela inclusão de um amortecedor viscoso, como mostra a [Figura 3-9.5](#). Pede-se o coeficiente desse amortecedor para que o sistema seja criticamente amortecido.

**FIGURA 3-9.5** Viga apoiada em flutuador.

3-9.6 As vigas do Exemplo Proposto 2-6.5 são agora consideradas com a razão de amortecimento de 0,02 e sob a força harmônica ($f(t) = 10000 \cos(\omega t)$) em newtons e nos casos de ($\omega = 10 \text{ rad/s}$) e ($\omega = 18,5 \text{ rad/s}$), como esquematizado na [Figura 3-9.6](#). Determine a frequência natural amortecida, os fatores de amplificação dinâmica e as amplitudes das respostas em regime permanente, para essas vigas.

**FIGURA 3-9.6** Vigas simples sob força harmônica.

3-9.7 A viga biapoiada de módulo de elasticidade igual a 21 GPa representada na [Figura 3-9.7](#) suporta em seu meio um equipamento rotativo. Em varredura com a velocidade angular desse equipamento, identificou-se que foi alcançada a amplitude de oscilação máxima de 6,0 mm quando a amplitude da força harmônica de desbalanceamento foi de 500 N. Pede-se determinar o amortecimento do sistema.

**FIGURA 3-9.7** Viga biapoiada suporte de equipamento.

3-9.8 Obtenha a expressão do número de ciclos para que se tenha a redução mais próxima de 50% da amplitude em oscilação livre amortecida de oscilador simples.

3-9.9 Para a função representada na [Figura 3-9.9](#), faça a decomposição em série de Fourier e as correspondentes representações gráficas com 1, 3 e 20 termos.

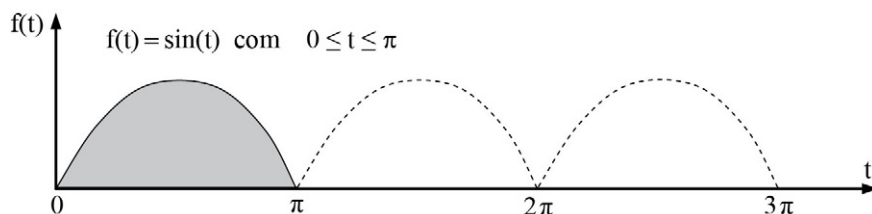


FIGURA 3-9.9 Força em pulsos senoidais.

3-9.10 Com a *integral de Duhamel* e através de um programa de linguagem simbólica, obtenha a solução de deslocamento do oscilador simples subamortecido sob a força $(f(t) = f_0 e^{-\alpha t})$. Particularize a solução obtida ao caso não amortecido.

3-9.11 Um oscilador simples de $(k = 710^4 \text{ N/m})$, $(m = 10^3 \text{ kg})$, e $(\xi = 0,04)$ é submetido à força de impacto $(f(t) = 10^4(e^{-10t} - e^{-70t}))$ em newtons. Pede-se:

- A representação gráfica dessa força.
- Os históricos de deslocamento com base na solução do exercício anterior, na resolução direta por segmentos lineares da excitação desenvolvida na [Subseção 3-7.2](#) e nos *métodos de integração de Newmark* e de *Wilson* $\theta = 1,4$ detalhados na [Subseção 3-7.3](#). Adote o espaçamento $(\Delta t = 0,01 \text{ s})$.
- A comprovação gráfica de que a influência do amortecimento é muito pequena quanto ao deslocamento máximo.

3-9.12 O oscilador simples do Exercício Proposto 3-9.2 é considerado agora com o movimento de base de $0,01 \cos(25t)$ em metros. Pede-se determinar o deslocamento relativo máximo da massa em relação à base. Além disso, de quanto deve ser alterada a massa do oscilador para que o fator de amplificação do deslocamento relativo seja unitário?

3-9.13 Quanto ao oscilador simples representado na [Figura 3-8.4](#), qual deve ser a expressão do amortecimento para que a amplitude da força transmitida à base seja um terço da amplitude da força externa harmônica aplicada à massa? Qual é a condição a ser atendida pela razão de frequências para se ter essa expressão?

3-9.14 Um equipamento rotativo de 300 kg está instalado em uma base elástica de $(k = 0,2 \cdot 10^4 \text{ N/m})$ e $(c = 500 \text{ N} \cdot \text{s/m})$. Verificou-se que a operação desse equipamento com a velocidade de $(\omega = 70 \text{ rad/s})$ provoca a amplitude de deslocamento de 2 mm. Pede-se determinar a força centrífuga associada a esse equipamento e a força máxima transmitida à base.

3-10 QUESTÕES PARA REFLEXÃO

- 3-10.1** O que é um *oscilador simples amortecido*? Qual é a utilidade desse modelo?
- 3-10.2** Por que propriedade de amortecimento em estrutura envolve grande incerteza? Como explicar as concepções dos amortecimentos: *viscoso* (linear), *de Coulomb* e *estrutural*?
- 3-10.3** Qual é a vantagem de se utilizar o amortecimento viscoso em análise dinâmica das estruturas? Por que essa concepção é uma idealização não realística dos reais mecanismos de dissipação de energia em estruturas?
- 3-10.4** Em que consistem o *amortecimento viscoso crítico* e a *razão de amortecimento*? Quais são os valores usualmente adotados para essa razão em análise dinâmica de estrutura?
- 3-10.5** O que diferencia uma *resposta em vibração livre* de uma *resposta em vibração forçada*?
- 3-10.6** O que é uma *função periódica*? Toda oscilação periódica é *harmônica*? E toda oscilação harmônica é *periódica*? Como explicar? E por que o período é uma grandeza conceitual em caso de vibração livre amortecida?
- 3-10.7** A seguir, estão relacionadas diversas características de oscilador simples e de suas respostas. Quais ocorrem em *vibrações livre não amortecida*, *livre subamortecida*, *subamortecida sob força harmônica*, *subamortecida sob força periódica* e *subamortecida sob força aperiódica*? Além disso, quais ocorrem em movimento *livre superamortecido* e em movimento *livre com amortecimento crítico*?
- Frequência natural ou período natural.
 - Frequência amortecida ou período amortecido.
 - Regime transiente.
 - Regime permanente.
 - Resposta periódica harmônica.
 - Resposta periódica.
 - Resposta aperiódica.
 - Resposta com decaimento total da amplitude.
 - Resposta sem oscilação.
- 3-10.8** Quais são as diferenças entre *frequência natural*, *frequência amortecida* e *frequência forçante*? Como as duas primeiras se relacionam entre si? Em vibração livre amortecida, o que são *amplitude* e *ângulo de fase*?
- 3-10.9** O que é o *fator de amplificação dinâmica*? Qual é a importância desse fator? Por que a concepção desse fator pressupõe o princípio da superposição dos efeitos?
- 3-10.10** Como determinar experimentalmente o *amortecimento viscoso*?
- 3-10.11** O que é *amortecimento viscoso equivalente*? Como e por que determiná-lo? Por que a equivalência de amortecimento apresentada na Subseção 5-5.5 só se aplica a movimentos oscilatórios próximos de harmônicos?

- 3-10.12** Por que a ressonância em sistema amortecido ocorre apenas em regime permanente? Qual é a diferença quanto à ressonância em sistema *não amortecido* e em sistema *subamortecido*? Por que se deve evitar a ocorrência de ressonância? Como evitá-la?
- 3-10.13** Em que circunstâncias o amortecimento se torna relevante?
- 3-10.14** Por que a determinação de resposta através do desenvolvimento em *série de Fourier* se aplica apenas a sistema de comportamento linear? Qual é a vantagem de se utilizar essa série?
- 3-10.15** O que é uma *resolução incremental recursiva* em análise dinâmica das estruturas? Que tipos de aproximações ou erros podem ocorrer nesse tipo de resolução?
- 3-10.16** O que é a *integral de Duhamel*? Quais são as hipóteses que embasam essa integral? Qual é a principal vantagem dessa integral?
- 3-10.17** Qual é a diferença entre a resolução numérica desenvolvida na Subseção 3-7.1 com base na *integral de Duhamel* e a resolução direta por segmentos lineares da ação externa tratada na Subseção 3-7.2? Como as condições iniciais são consideradas em cada caso?
- 3-10.18** Em que se baseia a integração numérica de equação de movimento? Nessa integração, qual é a diferença entre os *métodos explícitos* e os *métodos implícitos*?
- 3-10.19** O que significam *instabilidade numérica* e *amortecimento numérico* em integração numérica de equação de movimento? Como evitar esses inconvenientes?
- 3-10.20** Quais são as diferentes aproximações consideradas nas integrações por *diferença finita central*, de *Newmark* e de *Wilson θ* ? Esses métodos convergem para a mesma solução à medida que se reduz o espaçamento de tempo?
- 3-10.21** Qual é a diferença entre os procedimentos iterativos de *Newton-Raphson* e de *Newton-Raphson modificado*?
- 3-10.22** Como efetuar o controle de transmissão de vibração em estrutura? Como são os isoladores de vibração?
- 3-10.23** Por que a aceleração da gravidade não aparece no equacionamento do oscilador simples sob movimento de base?
- 3-10.24** Um dissipador viscoso na base de um equipamento indutor de ação harmônica sempre reduz a vibração transmitida à base? Por quê?
- 3-10.25** O que é o *fator de transmissibilidade* em oscilador simples sob força harmônica? Esse fator inclui o efeito do peso do oscilador? Como utilizar adequadamente esse fator no controle de vibrações?
- 3-10.26** Como é definida a *eficiência de um isolamento de vibração* em oscilador simples sob força harmônica?



CAPÍTULO 4

Modelo de Dois Graus de Liberdade

POR QUE ESTUDAR MODELO DE DOIS GRAUS DE LIBERDADE?

O modelo de um grau de liberdade foi o tema dos capítulos anteriores, quando então foram apresentados conceitos e desenvolvidas fórmulas fundamentais para a próxima determinação do comportamento de modelo com vários graus. Uma particularização deste último é o de dois graus, estudado neste capítulo pelo fato de permitir a apresentação de importantes propriedades que não ocorrem em caso de um grau, de ser útil em análise preliminar de diversos sistemas estruturais e de facilitar o entendimento da análise de modelo com um maior número de graus de liberdade. Contudo, faz-se uma apresentação resumida do tema, uma vez que, com vários graus, os métodos de análise serão desenvolvidos de forma ampla em capítulos subsequentes. Além disso, no presente tratamento, inicia-se a adoção da notação matricial, adequada a programações automáticas de análise de modelo com vários graus, embora não seja de utilização prática em procedimento manual.

Assim, as seções deste capítulo detalham os seguintes tópicos em caso de modelos de dois graus de liberdade:

- 4-1 Obtenção das equações de movimento e correspondentes identificações dos significados físicos dos coeficientes de rigidez e de massa.
- 4-2 Análise da vibração livre e correspondente apresentação dos conceitos de *frequências naturais* e de *modos naturais, de vibração*.
- 4-3 Caracterização do fenômeno de *batimento*.
- 4-4 Tratamento da vibração não amortecida sob força harmônica, com a apresentação das *funções de resposta em frequência* em que são identificadas as *frequências de ressonância*.
- 4-5 Apresentação do *amortecedor de massa sintonizada*, que permite reduzir vibrações indesejadas através de um oscilador simples adicionado à estrutura.
- 4-6 Sugestão de exercícios.
- 4-7 Proposição de questões para reflexão.

4-1 EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

Um modelo discreto de configuração geométrica caracterizada, em cada instante, por duas variáveis independentes entre si é denominado *oscilador duplo* ou *modelo de dois graus de liberdade*. Esse é o caso dos modelos representados na Figura 4-1.1, em que foi incluído amortecimento viscoso apenas no da esquerda, por simplicidade.

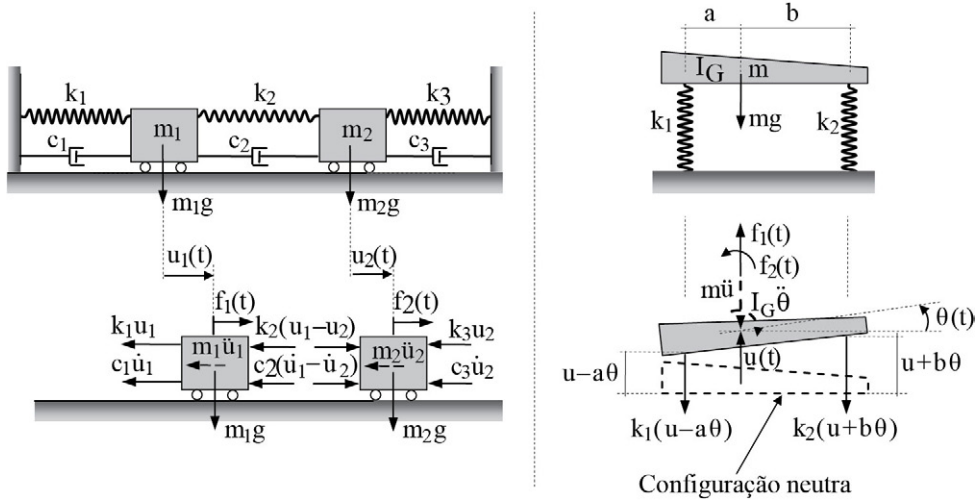


FIGURA 4-1.1 Modelos de dois graus de liberdade.

No primeiro desses modelos, têm-se as translações horizontais $u_1(t)$ e $u_2(t)$ das massas m_1 e m_2 , respectivamente, sob ação das forças externas $f_1(t)$ e $f_2(t)$. É, pois, um *oscilador duplo de vibração de translações*. E para uma configuração de tração na mola k_1 e compressão nas molas k_2 e k_3 , têm-se os diagramas de corpo livre mostrados na parte inferior do oscilador. Logo, a partir desses diagramas, obtêm-se as equações diferenciais de equilíbrio:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{u}_1 + c_1 \dot{u}_1 + c_2 (\dot{u}_1 - \dot{u}_2) + k_1 u_1 + k_2 (u_1 - u_2) = f_1(t) \\ m_2 \ddot{u}_2 - c_2 (\dot{u}_1 - \dot{u}_2) + c_3 \dot{u}_2 - k_2 (u_1 - u_2) + k_3 u_2 = f_2(t) \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} m_1 \ddot{u}_1 + (c_1 + c_2) \dot{u}_1 - c_2 \dot{u}_2 + (k_1 + k_2) u_1 - k_2 u_2 = f_1(t) \\ m_2 \ddot{u}_2 - c_2 \dot{u}_1 + (c_2 + c_3) \dot{u}_2 - k_2 u_1 + (k_2 + k_3) u_2 = f_2(t) \end{cases} \quad (4-1.1)$$

Esse sistema escreve-se sob a forma matricial:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (4.1.2)$$

$$\rightarrow \boxed{\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}} \quad (4-1.3)$$

onde \mathbf{M} , \mathbf{C} e \mathbf{K} são, respectivamente, as matrizes de massa (diagonal), de amortecimento (simétrica) e de rigidez (simétrica, em atendimento ao *teorema de reciprocidade de*

Betti-Maxwell); e $\ddot{\mathbf{u}}$, $\dot{\mathbf{u}}$, \mathbf{u} e \mathbf{f} são os vetores, respectivamente, das acelerações, das velocidades, dos deslocamentos e das forças externas.¹

O sistema com a notação anterior caracteriza as equações de movimento de um modelo amortecido sob vibração forçada, equações essas lineares, pelo fato de as matrizes \mathbf{K} , \mathbf{C} e \mathbf{M} serem de coeficientes constantes. Trata-se de duas equações diferenciais acopladas através das matrizes de rigidez e de amortecimento, porque cada equação envolve os dois graus de liberdade.

Já no modelo representado na parte direita da figura anterior, tem-se um corpo rígido de massa m e momento de inércia de massa I_G , suportado por duas molas de coeficientes k_1 e k_2 . Supõe-se que esse modelo esteja em vibração descrita pelo deslocamento vertical $u(t)$ e pela rotação $\theta(t)$, chamados genericamente de *deslocamentos*. É, pois, um *oscilador duplo de vibração de translação e de rotação*. O diagrama de corpo livre desse modelo, para uma configuração de tração nas molas e rotação pequena (de maneira a poder considerar $\tan\theta \approx \theta$), está mostrado na parte inferior da mesma figura. Logo, escrevem-se as correspondentes equações diferenciais de equilíbrio:

$$\begin{cases} m\ddot{u} + k_1(u - a\theta) + k_2(u + b\theta) = f_1(t) \\ I_G\ddot{\theta} - k_1(u - a\theta)a + k_2(u + b\theta)b = f_2(t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m\ddot{u} + (k_1 + k_2)u + (k_2b - k_1a)\theta = f_1(t) \\ I_G\ddot{\theta} + (k_2b - k_1a)u + (k_1a^2 + k_2b^2)\theta = f_2(t) \end{cases} \quad (4-1.4)$$

Essas são equações de movimento de um modelo não amortecido sob vibração forçada, que estão acopladas através de rigidez, o que é denominado *acoplamento elástico* ou *estático*. O sistema formado por essas equações se escreve com a notação matricial:

$$\rightarrow \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_2b - k_1a \\ k_2b - k_1a & k_1a^2 + k_2b^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \quad (4-1.5)$$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}$$

(4-1.6)

A solução geral desse sistema é a soma da solução complementar (que será detalhada na próxima seção) com uma solução particular (que será desenvolvida na Seção 4-4 para o caso de uma força harmônica).

É oportuno identificar o significado físico dos coeficientes da matriz de rigidez. Para isso, particulariza-se o sistema anterior ao caso estático, que se escreve:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \quad (4-1.7)$$

Dessa particularização e com a configuração de ($u \neq 0$) e ($\theta = 0$), obtém-se:

$$\begin{cases} k_{11} = f_1/u \\ k_{21} = f_2/u \end{cases} \quad (4-1.8)$$

¹ A inversa da matriz de rigidez é denominada *matriz de flexibilidade*.

Logo, identifica-se que o coeficiente k_{11} é numericamente igual à força necessária para impor ($u = 1$) e manter ($\theta = 0$). Para essa mesma configuração, o coeficiente k_{21} é numericamente igual ao momento restritivo segundo o grau de liberdade θ . Assim, em generalização dessa interpretação, diz-se que o coeficiente k_{ij} de um modelo discreto de vários graus de liberdade é numericamente igual à força restritiva (ou momento restritivo) na direção do i -ésimo grau de liberdade, quando se impõe, de forma estática, um valor unitário segundo o j -ésimo grau e se mantêm nulos todos os demais graus.²

De forma semelhante à interpretação do significado físico de coeficiente de rigidez, o coeficiente m_{ij} de uma matriz de massa é numericamente igual à força de inércia segundo o i -ésimo grau de liberdade devido a uma aceleração unitária segundo o j -ésimo grau de liberdade, quando se mantêm os demais graus com acelerações nulas.

4-2 VIBRAÇÃO LIVRE NÃO AMORTECIDA

Em caso de vibração livre não amortecida, o sistema de equações de movimento do oscilador duplo particulariza-se na forma homogênea:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (4-2.1)$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4-2.2)$$

Essa forma admite solução análoga à expressa na Equação 2-2.10 para o oscilador simples não amortecido, que se escreve:

$$\mathbf{u}(t) = \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_{1(j)} \\ \phi_{2(j)} \end{Bmatrix} \cos(\omega_j t - \phi_j) \rightarrow \mathbf{u}(t) = \hat{\phi}_j \cos(\omega_j t - \phi_j) \quad (4-2.3)$$

em que ω_j é frequência natural e ϕ_j , ângulo de fase. Essa solução é um vetor de amplitudes de deslocamentos multiplicado por uma função no tempo, que expressa oscilações harmônicas e em fase.

Tal solução fornece ($\ddot{\mathbf{u}}(t) = -\hat{\phi}_j \omega_j^2 \cos(\omega_j t - \phi_j)$), que substituído na Equação 4-2.1, conduz a:

$$(-\mathbf{M}\omega_j^2 + \mathbf{K}) \hat{\phi}_j \cos(\omega_j t - \phi_j) = \mathbf{0} \quad (4-2.4)$$

Essa equação só é satisfeita, para qualquer valor de t , com o seguinte sistema de equações algébricas lineares homogêneas:

$$(\mathbf{K} - \mathbf{M}\omega_j^2) \hat{\phi}_j = \mathbf{0} \quad (4-2.5)$$

que caracteriza um problema de autovalor.

² Essa interpretação facilitará a construção da matriz de rigidez de sistemas com multigraus de liberdade, que será um dos temas do próximo capítulo.

Esse sistema tem a solução trivial ($\hat{\phi}_j = \mathbf{0}$) que corresponde à ausência de movimento. Soluções não triviais são obtidas com a condição de o determinante da matriz dos coeficientes ser nulo, isto é:

$$\det(\mathbf{K} - \mathbf{M}\omega_j^2) = 0 \quad (4-2.6)$$

A expansão dessa expressão é uma equação polinomial do segundo grau em ω_j^2 , denominada *equação característica* ou *equação de frequências*, que fornece as soluções ω_1^2 e ω_2^2 . Essas soluções são os *autovalores*, quadrados das *frequências naturais de vibração* ω_1 e ω_2 . Logo, com a substituição de cada uma dessas soluções na Equação 4-2.5 e a resolução do consequente sistema de equações algébricas homogêneas, obtêm-se os autovetores $\hat{\phi}_1$ e $\hat{\phi}_2$, que são os vetores das amplitudes do movimento, chamados de *modos naturais de vibração* ou *formas modais*. Além disso, com a ordenação $\omega_1 < \omega_2$, disse que ω_1 é a *primeira frequência natural* de vibração ou *frequência fundamental* e que $\hat{\phi}_1$ é o *primeiro modo natural* de vibração ou *modo fundamental*.³ Caso se considere matriz de rigidez não restringida obtêm-se modos de corpo rígido correspondentes a “frequências” nulas.

Em resolução do problema de autovalor anterior, escreve-se:

$$\left(\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \omega_j^2 \right) \hat{\phi}_j = \mathbf{0} \quad (4-2.7)$$

onde foi considerada a simetria da matriz de rigidez. Logo, deve-se ter:

$$\det \left(\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \omega_j^2 \right) = 0 \quad (4-2.8)$$

que fornece a seguinte *equação característica* e respectivas soluções:

$$\omega_j^4 - \frac{k_{11}m_2 + k_{22}m_1}{m_1m_2} \omega_j^2 + \frac{k_{11}k_{22} - k_{12}^2}{m_1m_2} = 0 \quad (4-2.9)$$

$$\rightarrow \left. \begin{matrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \end{matrix} \right\} = \frac{k_{11}m_2 + k_{22}m_1}{2m_1m_2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{k_{11}m_2 + k_{22}m_1}{m_1m_2} \right)^2 - 4 \frac{k_{11}k_{22} - k_{12}^2}{m_1m_2}} \quad (4-2.10)$$

Em continuidade de resolução, com base na solução ω_1^2 busca-se o modo natural de vibração $\hat{\phi}_1$. Para isso, reescreve-se a Equação 4-2.7 nas formas:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \omega_1^2 \right) \begin{Bmatrix} \phi_{1,1} \\ \phi_{2,1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ & \rightarrow \begin{bmatrix} k_{11} - m_1\omega_1^2 & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} - m_2\omega_1^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{1,1} \\ \phi_{2,1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4-2.11)$$

em que o primeiro índice do modo de vibração se refere à ordem do coeficiente.

Devido ao fato de esse sistema ser homogêneo, a resolução requer o estabelecimento de um dos coeficientes do autovetor $\hat{\phi}_1$ e, portanto, qualquer múltiplo escalar desse vetor é solução e

³ A palavra *fundamental* nesses nomes advém do fato de que a primeira frequência e o primeiro modo natural de vibração têm influência primordial no comportamento dinâmico.

tem o mesmo significado matemático. Em determinação única a menos de sinal, normaliza-se o referido vetor, o que pode ser feito, entre outros procedimentos, com a imposição de que o seu primeiro coeficiente seja nulo. Para isso, a partir do sistema anterior, determina-se a razão:

$$r_1 = \frac{\varphi_{2,1}}{\varphi_{1,1}} \rightarrow r_1 = \frac{m_1 \omega_1^2 - k_{11}}{k_{12}} = \frac{k_{12}}{m_2 \omega_1^2 - k_{22}} \quad (4-2.12)$$

que conduz à seguinte expressão para o primeiro modo natural de vibração:⁴

$$\hat{\boldsymbol{\phi}}_1 = \pm \begin{Bmatrix} 1 \\ r_1 \end{Bmatrix} \quad (4-2.13)$$

De maneira semelhante à obtenção do autovetor $\hat{\boldsymbol{\phi}}_1$ em forma normalizada, para a solução ω_2^2 escreve-se a razão:

$$r_2 = \frac{\varphi_{2,2}}{\varphi_{1,2}} = \frac{m_1 \omega_2^2 - k_{11}}{k_{12}} = \frac{k_{12}}{m_2 \omega_2^2 - k_{22}} \quad (4-2.14)$$

com a qual se tem o segundo modo natural de vibração:

$$\hat{\boldsymbol{\phi}}_2 = \pm \begin{Bmatrix} 1 \\ r_2 \end{Bmatrix} \quad (4-2.15)$$

É oportuno observar que as frequências naturais e os correspondentes modos naturais de vibração dependem exclusivamente da geometria, das propriedades dos materiais e das condições de apoio do modelo. Além do que, o fato de se ter as soluções $(\mathbf{u}(t) = \hat{\boldsymbol{\phi}}_1 \cos(\omega_1 t - \phi_1))$ e $(\mathbf{u}(t) = \hat{\boldsymbol{\phi}}_2 \cos(\omega_2 t - \phi_2))$ significa que, com perturbações iniciais adequadas, o modelo vibra com a forma de cada um dos autovetores $\hat{\boldsymbol{\phi}}_1$ e $\hat{\boldsymbol{\phi}}_2$, respectivamente, com as frequências ω_1 e ω_2 , o que justifica o nome *modos naturais de vibração*. Assim, uma vez que seja imposta a um modelo não amortecido a configuração de um de seus modos naturais de vibração e se retirem as restrições externas que imponham essa configuração, esse modelo passa a vibrar em movimento harmônico simples, com a frequência associada ao modo em questão e em torno de sua configuração neutra.

Com a notação de *matriz espectral*:

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix} \quad (4-2.16)$$

e a notação de *matriz modal*:

$$\hat{\boldsymbol{\Phi}} = [\hat{\boldsymbol{\phi}}_1 \quad \hat{\boldsymbol{\phi}}_n] \quad (4-2.17)$$

o problema de autovalor expresso na Equação 4-2.5 toma a forma:

$$\mathbf{K}\hat{\boldsymbol{\Phi}} = \mathbf{M}\hat{\boldsymbol{\Phi}}\boldsymbol{\Omega} \quad (4-2.18)$$

A resolução computacional desse problema, em caso de modelo com múltiplos graus de liberdade, será detalhada no Capítulo 9.

⁴ A partir do próximo capítulo será adotada normalização em relação à matriz de massa, quando então o j-ésimo autovetor será denotado por $\boldsymbol{\varphi}_j$.

EXEMPLO 4-2.1

O *shear building* é um modelo simples destinado à análise de edifícios de andares múltiplos sob ação sísmica e que também tem a vantagem de ser muito útil em exercício de construção das equações de movimento de estruturas aporticadas, em treinamento da resolução dessas equações e em interpretação das correspondentes soluções. Nesse modelo, as lajes e vigas são idealizadas como indeformáveis (de maneira que as colunas fiquem inextensíveis), e as massas são supostas concentradas nos níveis das diversas lajes. Com essa concepção, os graus de liberdade da estrutura se reduzem aos deslocamentos horizontais de suas lajes, como ilustra a [Figura E4-2.1a](#) em particularização de um pórtico plano a um modelo *shear building* de dois níveis. Nessa representação, m_i é a massa ao nível da i -ésima viga, e k é o coeficiente de rigidez de flexão de cada uma das colunas.

A seguir, são obtidas as equações de movimento do *shear building* e, com os valores apresentados na [Figura E4-2.1a](#), são determinados os períodos naturais de vibração e os respectivos modos naturais de vibração.

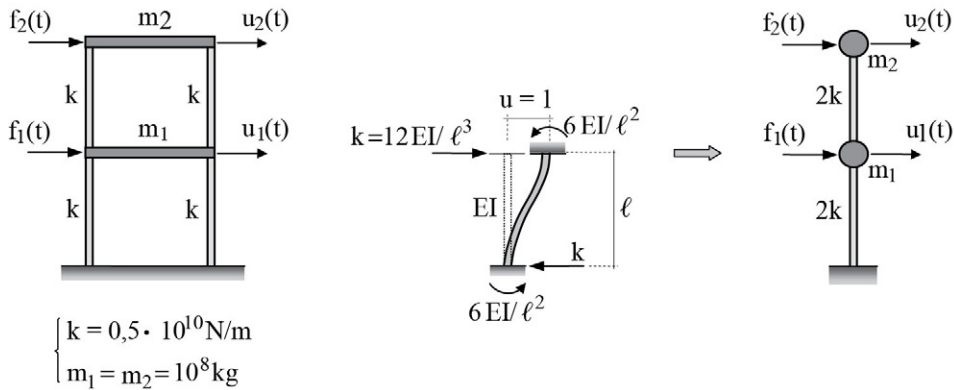


FIGURA E4-2.1a *Shear building* de dois graus de liberdade e correspondente idealização.

Esse *shear building* é equivalente ao modelo de dois graus de liberdade mostrado na parte direita da figura anterior. Em comportamento estático linear, as equações de equilíbrio desse modelo podem ser obtidas com a combinação linear dos estados de deformação representados na [Figura E4-2.1b](#), em que se impõe deslocamento unitário segundo cada um dos graus. É a utilização de conclusão anterior de que o coeficiente k_{ij} é numericamente igual à força restritiva na direção do i -ésimo grau de liberdade, quando se impõe, de forma estática, um valor unitário segundo o j -ésimo grau e se mantêm nulos todos os demais graus.

Por observação das forças atuantes nas massas, escreve-se o sistema de equilíbrio estático:

$$\begin{cases} (2k + 2k)u_1 - 2ku_2 = f_1 \\ -2ku_1 + 2ku_2 = f_2 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 4k & -2k \\ -2k & 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

Logo, com a inclusão das forças de inércia no sistema anterior, obtêm-se as equações de movimento:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 4k & -2k \\ -2k & 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{Bmatrix}$$

que, com os valores de rigidez e de massa especificados na figura anterior, essas equações se particularizam em:

$$10^8 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + 10^{10} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

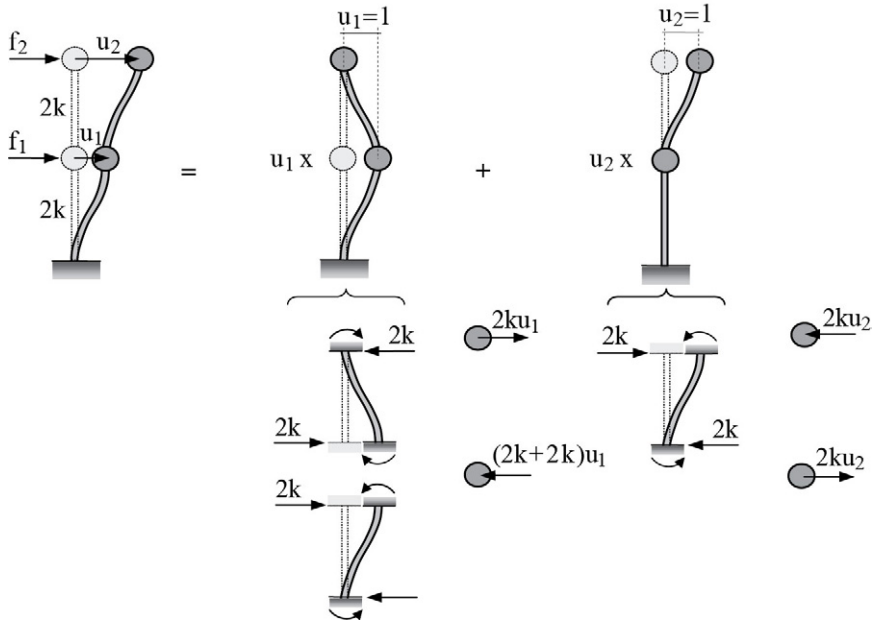


FIGURA E4-2.1b Combinação linear de configurações do modelo.

Além disso, o problema de autovalor expresso na Equação 4-2.5 toma a forma:

$$\left(\begin{bmatrix} 200 & -100 \\ -100 & 100 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \omega_j^2 \right) \hat{\phi}_j = \mathbf{0}$$

que, de acordo com a Equação 4-2.10, fornece as frequências naturais:

$$\begin{aligned} \left. \begin{matrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \end{matrix} \right\} &= \frac{200+100}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{200+100}{1} \right)^2 - 4 \frac{200 \cdot 100 - 100^2}{1}} \\ \rightarrow \left\{ \begin{matrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \end{matrix} \right\} &= \left\{ \begin{matrix} 38,197 \\ 261,80 \end{matrix} \right\} \rightarrow \boxed{\left\{ \begin{matrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 6,1804 \\ 16,180 \end{matrix} \right\} \text{rad/s}} \end{aligned}$$

a partir dessas frequências, obtêm-se os períodos naturais:

$$\boxed{\left\{ \begin{matrix} T_1 \\ T_2 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 1,0166 \\ 0,38833 \end{matrix} \right\} \text{s}}$$

Além disso, as Equações 4-2.12 e Eq.4-2.14 fornecem, respectivamente, as razões:

$$\begin{cases} r_1 = \frac{-100}{1 \cdot 38,197 - 100} = 1,618 \\ r_2 = \frac{-100}{1 \cdot 261,80 - 100} = -0,618 \end{cases}$$

que conduzem aos seguintes modos naturais de vibração:

$$\begin{cases} \hat{\phi}_1 \pm \begin{Bmatrix} 1 \\ 1,618 \end{Bmatrix} \\ \hat{\phi}_2 \pm \begin{Bmatrix} 1 \\ -0,618 \end{Bmatrix} \end{cases}$$

A Figura E4-2.1c mostra as representações desses modos.

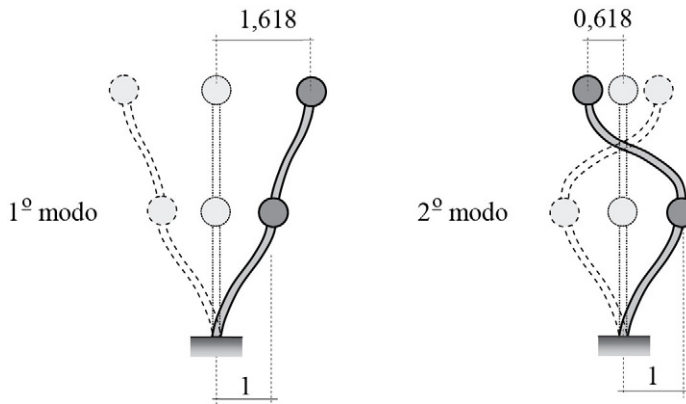
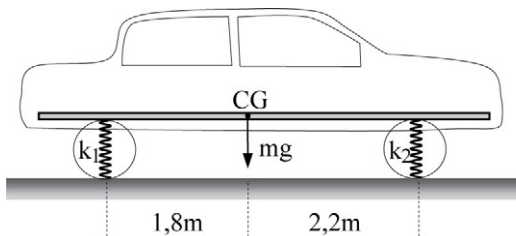


FIGURA E4-2.1c Modos naturais de vibração do *shear building*.

EXEMPLO 4-2.2

A Figura E4-2.2a apresenta a esquematização da suspensão de um automóvel em que o chassi é idealizado como rígido e a flexibilidade dos pneus é desconsiderada, assim como o amortecimento. A seguir, são obtidos os períodos naturais de vibração e os correspondentes modos de vibração, em caso de pequenas rotações.



$$\begin{cases} k_1 = 29,0 \text{ kN/m} \\ k_2 = 31,7 \text{ kN/m} \\ m = 1200 \text{ kg} \\ I_G = 4 \, 600 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{cases}$$

FIGURA E4-2.2a Idealização da suspensão de um automóvel.

O presente modelo é semelhante ao representado na parte direita da [Figura 4-1.1](#), agora com as dimensões ($a = 1,8\text{m}$) e ($b = 2,2\text{m}$). Logo, tem-se a matriz de rigidez (nas unidades N e m):

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 29000 + 31700 & 31700 \cdot 2,2 - 29000 \cdot 1,8 \\ 31700 \cdot 2,2 - 29000 \cdot 1,8 & 29000 \cdot 1,8^2 + 31700 \cdot 2,2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60700 & 17540 \\ 17540 & 247388 \end{bmatrix}$$

Tem-se, também, a matriz de massa (na unidade kg):

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1200 & 0 \\ 0 & 4600 \end{bmatrix}$$

Com essas matrizes e a Equação 4-2.10 são obtidos os autovalores ($\omega_1^2 = 44,918$) e ($\omega_2^2 = 60,640$), que correspondem às seguintes frequências naturais e respectivos períodos:

$$\begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6,702 \\ 7,787 \end{Bmatrix} \text{rad/s} \rightarrow \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,937 \\ 0,807 \end{Bmatrix} \text{s}$$

Além disso, com base nas Equações 4-2.12 e 4-2.14, calculam-se as razões ($r_1 = -0,430$) e ($r_2 = 0,556$), que correspondem, respectivamente, aos seguintes modos naturais de vibração:

$$\begin{Bmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \end{Bmatrix} = \pm \begin{Bmatrix} 1\text{m} \\ -0,430 \text{ rad} \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \end{Bmatrix} = \pm \begin{Bmatrix} 1\text{m} \\ -24,65^\circ \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \end{Bmatrix} = \pm \begin{Bmatrix} 1\text{m} \\ 31,85^\circ \end{Bmatrix}$$

O produto de 0,1 pelo primeiro modo calculado anteriormente está representado na [Figura E4-2.2b](#).



FIGURA E4-2.2b Primeiro modo natural de vibração.

EXEMPLO 4-2.3

Considera-se o pêndulo duplo esquematizado na parte esquerda da [Figura E4-2.3](#), em que as hastes estão ligadas por uma mola que supõe-se exercer apenas esforço horizontal e ser de massa desprezível. Para o caso de pequenas oscilações e hastes rígidas de massas desprezíveis, obtêm-se as correspondentes equações de movimento.

Com o arbítrio de $\theta_2 > \theta_1$, na parte direita da mesma figura estão representadas as forças intervenientes em cada uma das partes do pêndulo. Logo, as equações de momentos nulos em relação às rótulas são as equações de equilíbrio dinâmico:

$$\begin{cases} m_1 \ell \ddot{\theta}_1 \ell + m_1 g \ell \sin \theta_1 - k a (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) a \cos \theta_1 = 0 \\ m_2 \ell \ddot{\theta}_2 \ell + m_2 g \ell \sin \theta_2 + k a (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) a \cos \theta_2 = 0 \end{cases}$$

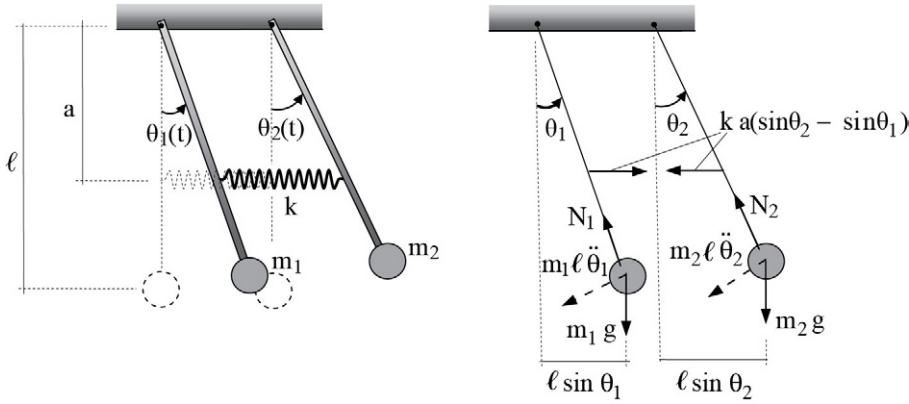


FIGURA E4-2.3 Pêndulo duplo acoplado por mola horizontal.

Com rotações pequenas, as equações anteriores simplificam-se para a forma:

$$\begin{cases} m_1 \ell^2 \ddot{\theta}_1 + m_1 g \ell \theta_1 + k a^2 \theta_1 - k a^2 \theta_2 = 0 \\ m_2 \ell^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 g \ell \theta_2 + k a^2 \theta_2 - k a^2 \theta_1 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} m_1 \ell^2 & 0 \\ 0 & m_2 \ell^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} m_1 g \ell + k a^2 & -k a^2 \\ -k a^2 & m_2 g \ell + k a^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Em continuidade de resolução do sistema de equações de movimento expresso na Equação 4-2.2, a combinação linear das soluções parciais ($\mathbf{u}(t) = \hat{\phi}_1 \cos(\omega_1 t - \phi_1)$) e ($\mathbf{u}(t) = \hat{\phi}_2 \cos(\omega_2 t - \phi_2)$) é a solução completa de deslocamentos:

$$\begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix} = c_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ r_1 \end{Bmatrix} \cos(\omega_1 t - \phi_1) + c_2 \begin{Bmatrix} 1 \\ r_2 \end{Bmatrix} \cos(\omega_2 t - \phi_2) \quad (4-2.19)$$

Nessa expressão, c_1 , c_2 , ϕ_1 e ϕ_2 são constantes a serem determinadas com as condições iniciais ao movimento, u_{o1} , u_{o2} , v_{o1} e v_{o2} . E dessa expressão, obtém-se a solução de velocidades:

$$\begin{Bmatrix} \dot{u}_1(t) \\ \dot{u}_2(t) \end{Bmatrix} = -c_1 \omega_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ r_1 \end{Bmatrix} \sin(\omega_1 t - \phi_1) - c_2 \omega_2 \begin{Bmatrix} 1 \\ r_2 \end{Bmatrix} \sin(\omega_2 t - \phi_2) \quad (4-2.20)$$

Logo, com as referidas condições, chega-se ao sistema de equações algébricas:

$$\begin{cases} u_{o1} = c_1 \cos \phi_1 + c_2 \cos \phi_2 \\ v_{o1} = c_1 \omega_1 \sin \phi_1 + c_2 \omega_2 \sin \phi_2 \\ u_{o2} = c_1 r_1 \cos \phi_1 + c_2 r_2 \cos \phi_2 \\ v_{o2} = c_1 \omega_1 r_1 \sin \phi_1 + c_2 \omega_2 r_2 \sin \phi_2 \end{cases} \quad (4-2.21)$$

cujas resoluções fornece as constantes:

$$\begin{cases} c_1 = \frac{1}{r_2 - r_1} \sqrt{(r_2 u_{o1} - u_{o2})^2 + (r_2 v_{o1} - v_{o2})^2} / \omega_1^2 \\ c_2 = \frac{1}{r_2 - r_1} \sqrt{(u_{o2} - r_1 u_{o1})^2 + (v_{o2} - r_1 v_{o1})^2} / \omega_2^2 \\ \phi_1 = \arctg \frac{r_2 v_{o1} - v_{o2}}{(r_2 u_{o1} - u_{o2}) \omega_1} \\ \phi_2 = \arctg \frac{r_1 v_{o1} - v_{o2}}{(r_1 u_{o1} - u_{o2}) \omega_2} \end{cases} \quad (4-2.22)$$

Fica, assim, determinada a solução expressa na Equação 4-2.19, que, com as condições iniciais $u_{o1} \neq 0$, $u_{o2} \neq 0$, $v_{o1} = 0$ e $v_{o2} = 0$, se particulariza em:

$$\begin{cases} u_1(t) \\ u_2(t) \end{cases} = \frac{r_2 u_{o1} - u_{o2}}{r_2 - r_1} \begin{Bmatrix} 1 \\ r_1 \end{Bmatrix} \cos(\omega_1 t) + \frac{u_{o2} - r_1 u_{o1}}{r_2 - r_1} \begin{Bmatrix} 1 \\ r_2 \end{Bmatrix} \cos(\omega_2 t) \quad (4-2.23)$$

Esse resultado mostra que com condições iniciais de deslocamentos não nulos, a deformada em cada instante é realmente uma combinação linear dos dois modos naturais de vibração.

Para apresentar uma importante propriedade desses modos, considera-se o sistema de equações da Equação 4-2.2 escrito sob a forma:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{u}_1 + k_{11} u_1 + k_{12} u_2 = 0 \\ m_2 \ddot{u}_2 + k_{12} u_1 + k_{22} u_2 = 0 \end{cases} \quad (4-2.24)$$

além da transformação de coordenadas:

$$\begin{cases} u_1(t) \\ u_2(t) \end{cases} = \hat{\Phi} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{cases} u_1(t) \\ u_2(t) \end{cases} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} \quad (4-2.25)$$

Essa é a *transformação modal*, que também se escreve sob a forma:

$$\begin{cases} u_1(t) = d_1 + d_2 \\ u_2(t) = r_1 d_1 + r_2 d_2 \end{cases} \quad (4-2.26)$$

em que d_1 e d_2 são as *coordenadas modais*.

Com a substituição dessa expressão na Equação 4-2.24, obtém-se:

$$\begin{cases} m_1 (\ddot{d}_1 + \ddot{d}_2) + k_{11} (d_1 + d_2) + k_{12} (r_1 d_1 + r_2 d_2) = 0 \\ m_2 (r_1 \ddot{d}_1 + r_2 \ddot{d}_2) + k_{12} (d_1 + d_2) + k_{22} (r_1 d_1 + r_2 d_2) = 0 \end{cases} \quad (4-2.27)$$

Com a multiplicação da primeira dessas equações por $m_2 r_2$, a multiplicação da segunda por m_1 , e a subtração da segunda a partir da primeira, obtém-se:

$$\begin{aligned} m_1 m_2 (r_2 - r_1) \ddot{d}_1 + (m_2 r_2 k_{11} + m_2 r_1 r_2 k_{12} - m_1 k_{12} - m_1 k_{22} r_1) d_1 + \\ + (m_2 r_2 k_{11} + m_2 r_2^2 k_{12} - m_1 k_{22} - m_1 k_{22} r_2) d_2 = 0 \end{aligned}$$

Também, com a multiplicação da primeira daquelas equações por $m_2 r_1$, a multiplicação da segunda por m_1 , e a subtração da segunda a partir da primeira, obtém-se:

$$m_1 m_2 (r_1 - r_2) \ddot{a}_2 + (m_2 r_1 k_{11} + m_2 r_1^2 k_{12} - m_1 k_{12} - m_1 k_{22} r_1) \dot{a}_1 + (m_2 r_1 k_{11} + m_2 r_1 r_2 k_{12} - m_1 k_{12} - m_1 k_{22} r_2) \dot{a}_2 = 0$$

Além disso, com a consideração das Equações 4-2.10, 4-2.12 e 4-2.14 nas duas últimas expressões, chega-se ao seguinte sistema de equações diferenciais desacopladas:

$$\begin{cases} \ddot{a}_1 + \omega_1^2 a_1 = 0 \\ \ddot{a}_2 + \omega_2^2 a_2 = 0 \end{cases} \quad (4-2.28)$$

Cada uma dessas equações pode ser resolvida separadamente, com a determinação de $a_1(t)$ e $a_2(t)$, para então retornar às coordenadas físicas $u_1(t)$ e $u_2(t)$ através da transformação modal.⁵ E diz-se que a matriz modal é ortogonal com respeito às matrizes de massa e de rigidez, isto é, que os produtos matriciais $\hat{\Phi}^T \mathbf{M} \hat{\Phi}$ e $\hat{\Phi}^T \mathbf{K} \hat{\Phi}$ fornecem matrizes diagonais.

4-3 BATIMENTO

A solução de deslocamento expressa na Equação 4-2.23 evidencia que o movimento de cada um dos graus de liberdade é a superposição de dois movimentos harmônicos simples, o que se escreve de forma compacta como:

$$u(t) = a \cos(\omega_1 t) + b \cos(\omega_2 t) \quad (4-3.1)$$

Como mostrado na Figura 4-3.1, a representação gráfica dessa solução pode ser obtida com a projeção horizontal da extremidade final de um vetor **c**, resultante dos vetores **a** e **b**. Observa-se que o módulo daquele vetor se altera entre um valor máximo igual à soma dos módulos de **a** e **b** (o que ocorre quando esses vetores estão em fase) e um valor mínimo igual à diferença entre esses módulos (o que acontece quando esses mesmos vetores estão defasados de 180°).

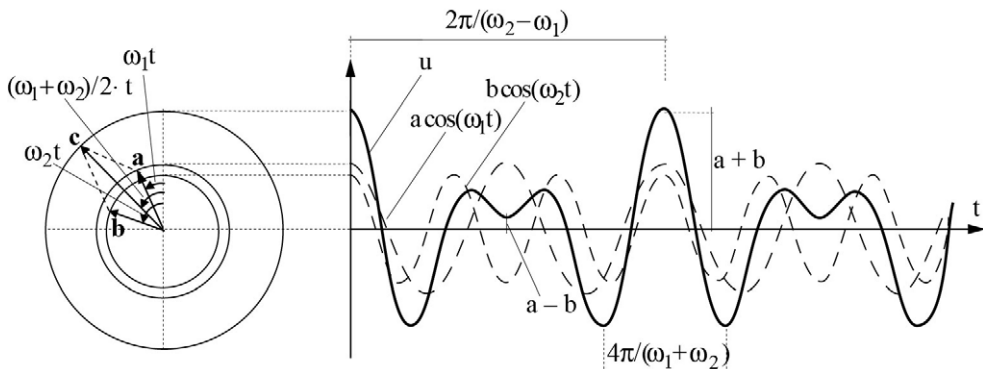


FIGURA 4-3.1 Superposição de duas oscilações harmônicas simples.

⁵ Essa transformação é a base do método de superposição modal que será detalhado na Seção 6-2.

Também é imediato identificar que o período entre dois picos consecutivos do movimento composto é igual a $(2\pi/((\omega_1 + \omega_2)/2) = 4\pi/(\omega_1 + \omega_2))$, indicado na figura anterior, e que o período desse movimento é a duração de tempo em que o vetor **b** gira em relação ao vetor **a** de 360° , o que é igual a $2\pi/(\omega_2 - \omega_1)$, com $\omega_2 > \omega_1$.

Em caso de os módulos dos vetores **a** e **b** serem próximos entre si, ocorre alternância entre grandes e pequenas amplitudes, circunstância em que a amplitude da superposição se alterna de forma periódica entre valor próximo a zero e o valor $(a + b)$. É o denominado fenômeno de *batimento*, ilustrado na Figura 4-3.2 para o caso de $(a = b)$, $(\omega_1 = 6 \text{ rad/s})$ e $(\omega_2 = 7 \text{ rad/s})$, cujo intervalo de tempo $2\pi/(\omega_2 - \omega_1)$ de repetição do movimento composto recebe o nome de *período de batimento*, e em que $2a$ é a *amplitude de batimento*. Na mesma figura estão também representadas isoladamente as funções harmônicas, assim como estão mostradas as envoltórias da superposição dessas funções. Pode-se verificar que, à medida que as frequências forçantes se aproximam uma da outra, o batimento se torna cada vez mais lento, até que desaparece quando da coincidência de frequências.

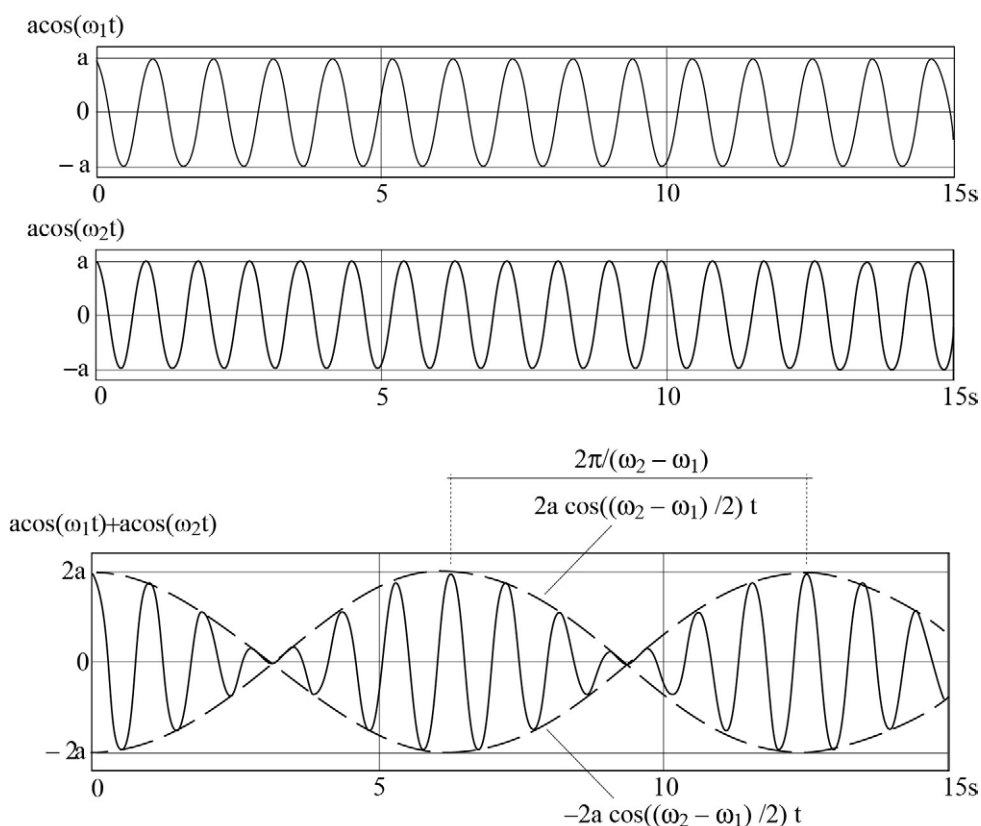


FIGURA 4-3.2 Representação da composição do fenômeno de batimento.

A ocorrência de batimento não é exclusiva de modelos estruturais de dois graus de liberdade. Esse fenômeno pode acontecer quando da soma de duas funções harmônicas simples quaisquer, como em vibração forçada de modelo de um grau de liberdade não amortecido sob força harmônica, em caso da frequência forçante ser próxima da frequência natural do sistema. Ele pode ocorrer também em outros fenômenos físicos, como em superposição de duas notas musicais de frequências ligeiramente diferentes.

4-4 VIBRAÇÃO NÃO AMORTECIDA SOB FORÇA HARMÔNICA

Para interpretar importante comportamento de modelo de dois graus de liberdade sob vibração forçada, considera-se o sistema de equações de movimento:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \cos(\omega t) \quad (4-4.1)$$

que diz respeito ao caso da força harmônica de intensidade $f_0 \cos(\omega t)$ aplicada à primeira massa.

De forma semelhante à solução parcial do oscilador simples tratado no Capítulo 2, o sistema anterior admite a solução particular:

$$\begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \cos(\omega t) \quad (4-4.2)$$

Com a substituição dessa solução no referido sistema, obtém-se:

$$\left(-\omega^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} k_{11} - m_1 \omega^2 & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} - m_2 \omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4-4.3)$$

Esse é um sistema de equações algébricas lineares de soluções:

$$\begin{cases} a_1 = \frac{(k_{22} - m_2 \omega^2) f_0}{(k_{11} - m_1 \omega^2)(k_{22} - m_2 \omega^2) - k_{12}^2} \\ a_2 = \frac{-k_{12} f_0}{(k_{11} - m_1 \omega^2)(k_{22} - m_2 \omega^2) - k_{12}^2} \end{cases} \quad (4-4.4)$$

que substituídas na Equação 4-4.2 define a resposta do modelo com base nas condições iniciais.

EXEMPLO 4-4.1

Considera-se o modelo mostrado na [Figura E4-4.1](#), em que $(m_1 = 2m)$, $(m_2 = m)$, $(k_1 = 2k)$, $(k_2 = k)$ e $(k_3 = k)$.

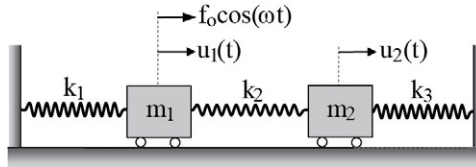


FIGURA E4-4.1 Modelo não amortecido de dois graus de liberdade.

No caso, o sistema de equações de movimento expresso na Equação 4-4.1 toma a forma:

$$\begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 3k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \cos(\omega t)$$

para o qual se têm, com base na Equação 4-4.4, as amplitudes de deslocamento:

$$\begin{cases} a_1 = \frac{(2k - m\omega^2)f_0}{(3k - 2m\omega^2)(2k - m\omega^2) - k^2} \\ a_2 = \frac{kf_0}{(3k - 2m\omega^2)(2k - m\omega^2) - k^2} \end{cases}$$

Com a Equação 4-2.10 obtêm-se os quadrados das frequências naturais:

$$\begin{cases} \omega_1^2 = \frac{k}{m} \\ \omega_2^2 = 2,5 \frac{k}{m} = 2,5 \omega_1^2 \end{cases}$$

Logo, em termos da primeira dessas frequências, as amplitudes anteriores se escrevem:

$$\begin{cases} a_1 = \frac{(2 - (\omega/\omega_1)^2)f_0}{k((3 - 2(\omega/\omega_1)^2)(2 - (\omega/\omega_1)^2) - 1)} \\ a_2 = \frac{f_0}{k((3 - 2(\omega/\omega_1)^2)(2 - (\omega/\omega_1)^2) - 1)} \end{cases}$$

A seguir, essas amplitudes são normalizadas nas formas:

$$\begin{cases} \frac{a_1 k}{f_0} = \frac{2 - (\omega/\omega_1)^2}{(3 - 2(\omega/\omega_1)^2)(2 - (\omega/\omega_1)^2) - 1} \\ \frac{a_2 k}{f_0} = \frac{1}{(3 - 2(\omega/\omega_1)^2)(2 - (\omega/\omega_1)^2) - 1} \end{cases}$$

Esses resultados são funções adimensionais da frequência forçante, denominadas *funções de resposta em frequência*, e representadas na [Figura E4-4.2](#).

Observa-se que as funções anteriores trocam de sinal quando a frequência forçante passa pelas frequências naturais, o que permite a identificação das frequências ressonantes $(\omega = \omega_1)$ e $(\omega = \omega_2)$, como indicado. Além disso, nota-se que, entre a primeira e a segunda frequências naturais, existe

um valor de frequência forçante para o qual é nula a amplitude da massa em que a força harmônica é aplicada, o que significa que essa massa não oscila. Essa identificação constitui a base do desenvolvimento do amortecedor tratado na próxima seção.

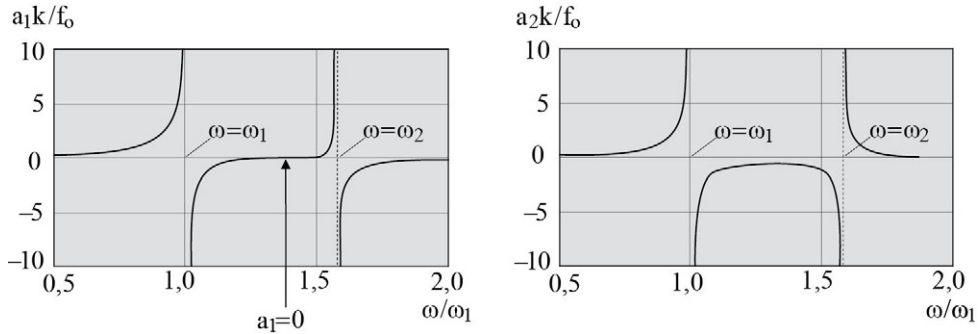


FIGURA E4-4.2 Funções de resposta em frequência.

4-5 AMORTECEDOR NÃO AMORTECIDO DE MASSA SINTONIZADA

Uma das maneiras de reduzir a vibração de uma estrutura é utilizar *amortecedor de massa sintonizada*, também denominado *atenuador de massa sintonizada*. No caso, a estrutura é modelada como um oscilador simples equivalente constituído por uma massa m_1 e por uma constante de mola k_1 , denominado *sistema principal*. A esse oscilador se conecta em série um *sistema secundário* composto de uma mola k_2 , que sustenta uma massa m_2 , em formação do *sistema composto* ilustrado em configuração neutra na Figura 4-5.1 e que tem dois graus de liberdade.

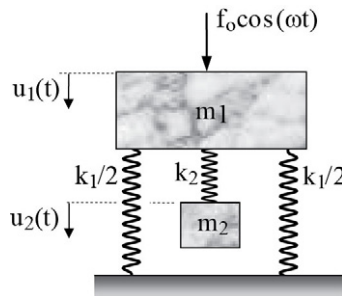


FIGURA 4-5.1 Oscilador de massa sintonizada.

Esse amortecedor costuma ser utilizado principalmente em estruturas já existentes, que, sob ações críticas, ofereçam dificuldades de modificação de suas características dinâmicas e/ou da fonte de excitação. Busca-se, então, determinar as características do sistema secundário de maneira a reduzir a vibração do sistema principal quando este é submetido à força harmônica $f_0 \cos(\omega t)$. Consequentemente obtém-se a redução da ação dinâmica transmitida ao suporte desse último sistema.⁶

⁶ Esse pode ser o caso de uma máquina rotativa fixada a uma estrutura e que opera em regime permanente em faixa de frequências que inclui a frequência fundamental da estrutura.

O sistema composto tem as equações de movimento:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \cos(\omega t) \quad (4-5.1)$$

de solução particular expressa na Equação 4-4.2, que se repete por conveniência:

$$\begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \cos(\omega t)$$

Essa solução tem amplitudes que se escrevem com base na Equação 4-4.4:

$$\begin{cases} a_1 = \frac{(k_2 - m_2 \omega^2) f_0}{(k_1 + k_2 - m_1 \omega^2)(k_2 - m_2 \omega^2) - k_2^2} \\ a_2 = \frac{k_2 f_0}{(k_1 + k_2 - m_1 \omega^2)(k_2 - m_2 \omega^2) - k_2^2} \end{cases} \quad (4-5.2)$$

Além disso, com as notações:

$$\begin{cases} \omega_1^* = \sqrt{k_1 / m_1} \\ \omega_2^* = \sqrt{k_2 / m_2} \\ \mu = m_2 / m_1 \end{cases} \quad (4-5.3)$$

as referidas amplitudes tomam as novas formas:

$$\begin{cases} a_1 = \frac{f_0}{k_1} \frac{1 - (\omega / \omega_2^*)^2}{(1 + \mu(\omega_2^* / \omega_1^*)^2 - (\omega / \omega_1^*)^2)(1 - (\omega / \omega_2^*)^2) - \mu(\omega_2^* / \omega_1^*)^2} \\ a_2 = \frac{f_0}{k_1} \frac{1}{(1 + \mu(\omega_2^* / \omega_1^*)^2 - (\omega / \omega_1^*)^2)(1 - (\omega / \omega_2^*)^2) - \mu(\omega_2^* / \omega_1^*)^2} \end{cases} \quad (4-5.4)$$

A primeira expressão do par anterior mostra que, com $(\omega_2^* = \omega)$, a amplitude do sistema principal se anula. Isto é, esse sistema fica imóvel, o que ocorre na condição de:

$$m_2 = \frac{k_2}{\omega^2} \quad (4-5.5)$$

Diz-se, então, que o sistema secundário está em *sintonia* com o principal, condição em que a segunda das expressões da Equação Eq.4-5.4 fornece:

$$a_2 = \frac{f_0}{k_1} \frac{1}{1 - \mu(\omega_2^* / \omega_1^*)^2} \rightarrow a_2 = -\frac{f_0}{k_2} \quad (4-5.6)$$

Logo, obtém-se a força atuante na massa do sistema secundário:

$$f_2(t) = k_2 u_2(t) = k_2 a_2 \cos(\omega t) \rightarrow \boxed{f_2(t) = -f_0 \cos(\omega t)} \quad (4-5.7)$$

Assim, na referida condição, o sistema secundário exerce sobre o principal uma força igual e contrária à força externa aplicada à massa m_1 , o que explica o fato de essa ficar imóvel. Contudo, aquela força provoca oscilação do sistema secundário, o que requer adequado

dimensionamento desse sistema. Para isso, em atendimento a imposições de espaço para essa oscilação, arbitra-se um valor para a amplitude a_2 , e determina-se o coeficiente de rigidez:

$$k_2 = f_o / a_2 \quad (4-5.8)$$

Em complemento da caracterização do sistema secundário, pode-se utilizar a Equação 4-5.5 para obter a massa m_2 . Contudo, o sistema composto tem duas frequências naturais que não devem estar próximas da frequência forçante. Assim, é necessário estabelecer uma faixa de operacionalidade, o que tem como consequência a não eliminação total da vibração do sistema principal.

Como ilustração, com $(\omega_1^* = \omega_2^*)$, a primeira das expressões da Equação 4-5.4 fornece a função de resposta em frequência:

$$\frac{a_1 k_1}{f_o} = \frac{1 - (\omega / \omega_1^*)^2}{1 - (2 + m)(\omega / \omega_1^*)^2 + (\omega / \omega_1^*)^4} \quad (4-5.9)$$

A Figura 4-5.2 mostra, em linha contínua, as representações dessa função nos casos de $(m = 0,1)$ e $(m = 0,3)$. Também mostra, em pontilhado, as representações da amplitude normalizada do sistema principal na ausência do secundário, o que é obtido com base na Equação 2-3.4 e que, com as notações atuais, se escreve:

$$\frac{a_1 k_1}{f_o} = \frac{1}{1 - (\omega / \omega_1^*)^2} \quad (4-5.10)$$

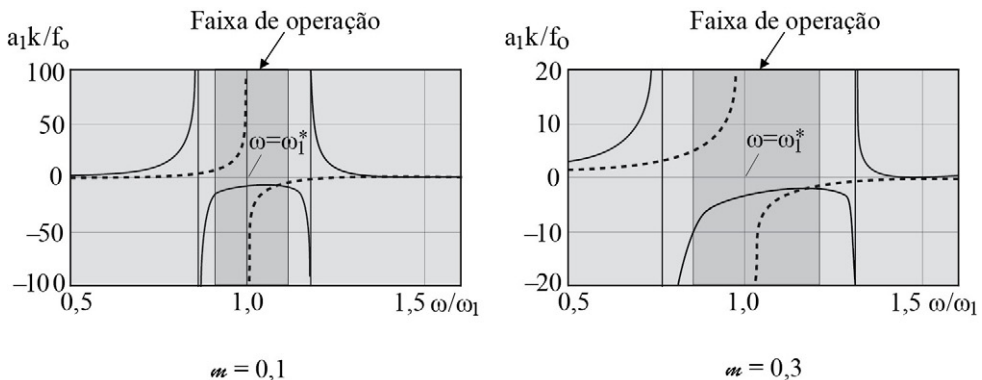


FIGURA 4-5.2 Funções de resposta em frequência do amortecedor.

Por observação da figura anterior, identifica-se que a primeira frequência do sistema composto é menor do que a frequência natural do sistema primário e que a segunda frequência daquele sistema é maior do que essa frequência. Em ambos os casos ilustrados nessa figura, escolhe-se uma faixa entre as frequências naturais do sistema composto, em que possa ocorrer a frequência forçante. Essa faixa situa-se em torno da frequência natural do sistema principal e pode ser mais larga à medida que se aumenta a razão entre as massas m_2 e m_1 .⁷

⁷ Backmann et al (1995) sugere adotar m_2/m_1 entre 1/45 e 1/50, e apresenta resultados do absorvedor amortecido de massa sintonizada. O sistema secundário pode também ser instalado sobre a estrutura, de maneira que a(s) sua(s) mola(s) fiquem sob compressão quando em configuração neutra.

Na prática, toda máquina rotativa inicia rotação a partir do repouso e, portanto, a frequência forçante passa pela primeira frequência do sistema composto. Contudo, a frequência forçante de regime permanente é atingida com grande rapidez e sempre há amortecimento, o que costuma resguardar o sistema composto quanto à ressonância em sua primeira frequência.

A importância deste capítulo reside principalmente nos conceitos de frequências e modos naturais de vibração de osciladores duplos, como introdução ao amplo tratamento dessas propriedades dinâmicas que será desenvolvido no próximo capítulo. Tem também relevância pelo treinamento de obtenção das equações de movimento, detalhamento do fenômeno de batimento e apresentação do amortecedor de massa sintonizada.

4-6 EXERCÍCIOS PROPOSTOS

4-6.1 Considerando pequenos deslocamentos medidos a partir da configuração neutra, obtenha as equações de movimento dos sistemas mostrados na [Figura 4-6.1](#). O da parte esquerda tem barra rígida de massa total m e o sistema da parte direita tem barra de módulo de rigidez à flexão EI e de massa por unidade de comprimento m' .

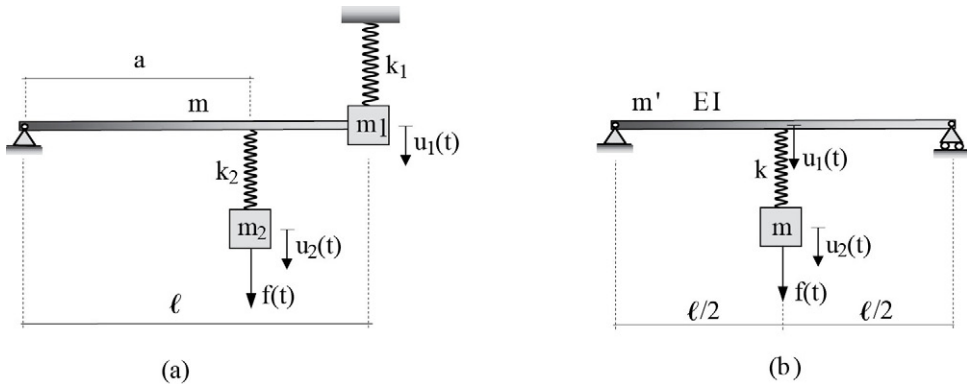


FIGURA 4-6.1 Sistemas de dois graus de liberdade.

4-6.2 Considerando pequenas oscilações e hastes rígidas de massas desprezíveis, obtenha as equações de movimento dos pêndulos duplos representados na [Figura 4-6.2](#).

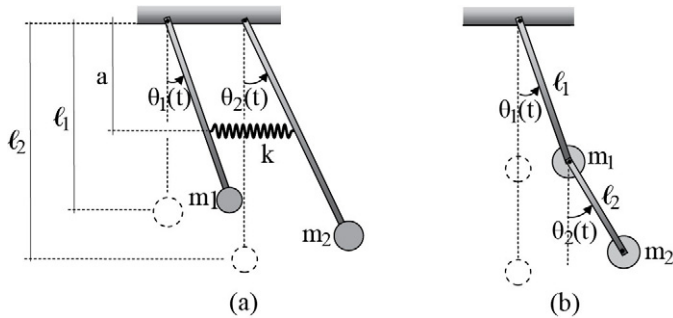


FIGURA 4-6.2 Pêndulos duplos de rotação.

4-6.3 Idem para o pêndulo da Figura 4-6.3, em que a extremidade rotulada está fixada à massa m_1 que pode se deslocar, sem atrito, ao longo de um cursor horizontal indeformável. O deslocamento $u(t)$ é em relação a um referencial absoluto, as oscilações são pequenas e a haste do pêndulo é indeformável e sem massa.

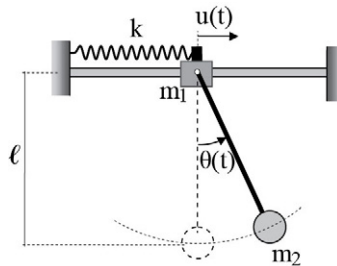


FIGURA 4-6.3 Oscilador duplo de translação e rotação.

4-6.4 A suspensão de um veículo tem chassi rígido, massa m , momento de inércia de massa I_G em relação ao eixo horizontal que passa pelo CG e é idealizado como esquematizado na Figura 4-6.4, em que a flexibilidade dos pneus não é levada em conta e o deslocamento $u(t)$ é medido a partir da configuração neutra. Para o caso de deslocamento angular pequeno, pedem-se as equações de movimento e a soma dos coeficientes de amortecimento c_1 e c_2 correspondente ao movimento vertical criticamente amortecido.

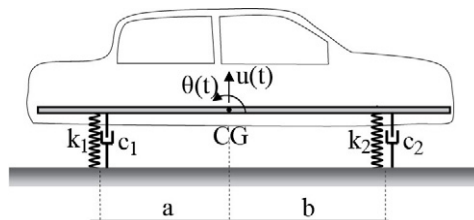


FIGURA 4-6.4 Suspensão veicular com translação vertical e rotação.

4-6.5 Para o oscilador duplo representado na Figura 4-6.5, pede-se:

- Sistema de equações de movimento.
- Matriz espectral e matriz modal.
- Verificar que a matriz modal é ortogonal com respeito às matrizes de massa e de rigidez.

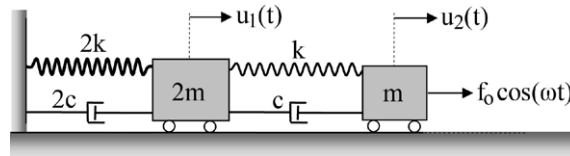


FIGURA 4-6.5 Oscilador duplo de translações.

4-6.6 A Figura 4-6.6 mostra um oscilador simples suspenso na extremidade de uma viga em balanço, de módulo de rigidez à flexão EI e massa por unidade de comprimento m' . Em idealização com os dois graus de liberdade indicados, a suposição de validade da massa equivalente expressa na Equação 2-4.9 e que os deslocamentos indicados estejam medidos a partir da configuração neutra, pede-se:

- Sistema de equações de movimento.
- Matriz espectral e matriz modal.
- Verificar que a matriz modal é ortogonal com respeito às matrizes de massa e de rigidez.

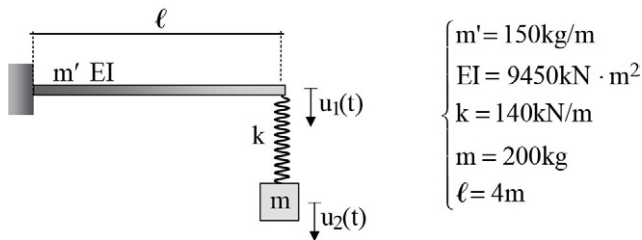


FIGURA 4-6.6 Modelo de dois graus de liberdade.

4-6.7 Um oscilador duplo se desloca com a velocidade constante v , em trajetória cossenoidal, como mostra a Figura 4-6.7, em que u_1 e u_2 são deslocamentos absolutos. Escreva os sistemas de equações de movimento em termos dos deslocamentos relativos à base, de notação w_i , e em termos dos deslocamentos absolutos, de notação u_i .

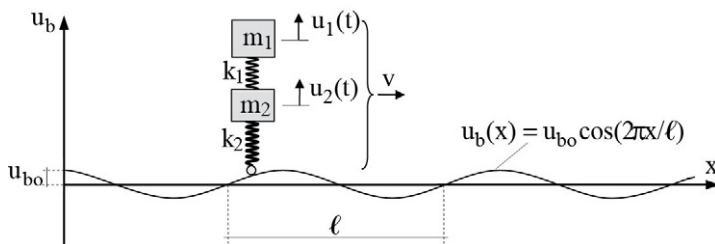


FIGURA 4-6.7 Oscilador duplo em deslocamento horizontal constante.

4-7 QUESTÕES PARA REFLEXÃO

- 4-7.1** O que é um *sistema de equações diferenciais acopladas*? Por que as equações de movimento dos modelos de dois graus de liberdade são usualmente equações diferenciais acopladas? Como desacoplar essas equações em caso de modelo não amortecido? Qual é a vantagem desse desacoplamento?
- 4-7.2** Por que toda matriz de rigidez é simétrica? Qual o significado físico do coeficiente de rigidez k_{ij} ? E por que o coeficiente k_{ij} tem dimensão física distinta do seu simétrico, k_{ji} , embora sejam numericamente iguais?
- 4-7.3** Como explicar a obtenção do problema de autovalor em vibração livre não amortecida? Qual é a relação entre os correspondentes autovalores e as frequências naturais? Por que, para um sistema estrutural adequadamente vinculado, os autovalores são sempre positivos?
- 4-7.4** O que são *frequências naturais* e *modos naturais* de vibração de um modelo discreto? E o que são *frequência fundamental* e *modo fundamental* de vibração?
- 4-7.5** O que são *modos naturais de vibração*? Por que as amplitudes em cada um desses modos não têm valores únicos, apenas têm uma relação linear entre si? Como estabelecer procedimento para se ter determinação única desses modos?
- 4-7.6** O que é o modelo *shear building*? Quais são as hipóteses que embasam esse modelo? Qual é a importância desse modelo?
- 4-7.7** Em que consiste o *fenômeno de batimento*? E em que circunstância ocorre esse fenômeno?
- 4-7.8** Qual é a diferença entre *isolador de vibração* e *absorvedor de vibração*?
- 4-7.9** O que é um *amortecedor de massa sintonizada*? Como funciona e quais são as limitações de uso desse amortecedor?



CAPÍTULO 5

Construção de Modelo de Multigraus de Liberdade

O QUE SIGNIFICA E COMO SÃO CONSTRUÍDOS OS MODELOS DE MULTIGRAUS DE LIBERDADE?

Conforme foi esclarecido em capítulos anteriores, os modelos de estruturas podem ser *contínuos* ou *discretos*. Um modelo contínuo tem equações diferenciais de movimento com funções contínuas de posição e do tempo, equações estas que só admitem resolução analítica em casos muito simples. Já um modelo discreto é baseado em configuração geométrica especificada por um número finito de parâmetros independentes entre si, tem equações diferenciais apenas na variável temporal, o que facilita a resolução numérica, e é dito de *multigraus de liberdade* ou de *n graus de liberdade*.

Modelos discretos constituídos de elementos de barra e em comportamento estático são tratados na *Análise Matricial de Estruturas*, e modelos discretos formados por componentes bi e tridimensionais são analisados com o *Método dos Elementos Finitos*. As equações de movimento desses modelos são ampliações das equações de equilíbrio estático, através da inclusão de forças de inércia e de amortecimento, além da consideração das ações externas como funções do tempo. Assim, os métodos de análise da *Dinâmica das Estruturas* são independentes da forma em que são obtidas as equações de movimento, embora aquele método seja o mais prático para fornecer essas equações.

Este capítulo apresenta a obtenção das equações de movimento dos modelos de multigraus, a partir de um resumo de conhecimentos básicos, para o desenvolvimento posterior da *Dinâmica das Estruturas*. Maior detalhamento dessa obtenção pode ser encontrado em literatura específica, como em Soriano (2003, 2005 e 2009). Apresenta, também, as características dinâmicas daqueles modelos, por serem necessárias à determinação da resposta dinâmica pelo *método de superposição modal*, que é um dos tópicos do próximo capítulo. Neste contexto, as seções deste capítulo tratam os seguintes temas:

- 5-1** Apresentação de informações básicas dos modelos discretos de estruturas reticuladas e estruturas contínuas, e das correspondentes equações de movimento.
- 5-2** Desenvolvimento das equações de movimento dos elementos de barra.

- 5-3** Formulação das equações de movimento dos elementos finitos bi e tridimensionais.
- 5-4** Obtenção do sistema das equações de movimento dos modelos discretos, a partir das correspondentes equações de seus elementos constituintes.
- 5-5** Determinação das *frequências* e *modos naturais de vibração* dos referidos modelos.
- 5-6** Redução de graus de liberdade, em obtenção de um menor número de equações de movimento.
- 5-7** Sugestão de exercícios.
- 5-8** Proposição de questões para reflexão.

5-1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A análise de uma estrutura requer a construção de um modelo matemático e, para facilitar essa análise, as estruturas são classificadas em *reticuladas* e *contínuas*. As reticuladas são constituídas de *barras* que são componentes com uma dimensão preponderante em relação às suas demais dimensões, idealizadas em forma unidimensional, com a *hipótese da seção plana*.¹ Já as estruturas contínuas são formadas por componente(s) idealizado(s) com duas coordenadas espaciais independentes entre si, como os *estados planos* (de tensão e de deformação), *membranas*, *placas* e *cascas*, ou idealizado(s) com três coordenadas espaciais, como os *sólidos deformáveis*.

Assim, a barra é idealizada no lugar geométrico dos centroides de suas seções transversais, denominado *eixo geométrico* (reto ou curvo). Para essa idealização, considera-se um *referencial cartesiano local xyz*, em que *x* é dirigido de uma extremidade desse eixo (denominado *ponto nodal inicial* e numerado como 1) em sentido à sua outra extremidade (chamado de *ponto nodal final* e numerado como 2), e em que *y* e *z* são escolhidos coincidentes com os eixos principais de inércia da seção transversal inicial.² Em caso de barra reta de seção transversal constante, isto é ilustrado na [Figura 5-1.1](#) juntamente com o sistema

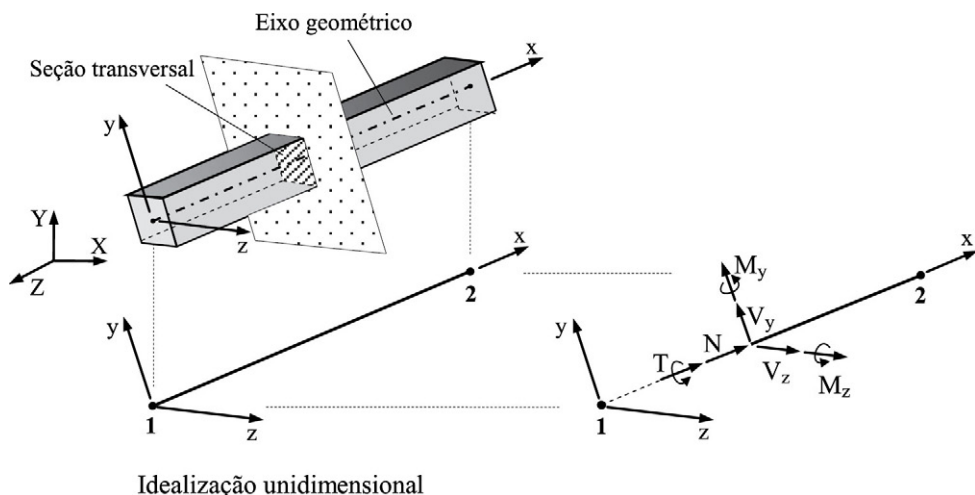


FIGURA 5-1.1 Barra reta de seção transversal constante.

¹ As estruturas em barras de nós rígidos são também denominadas *estruturas reticuladas contínuas*.

² Em barra de treliça são irrelevantes as direções dos eixos *y* e *z*.

de referência XYZ qualificado como *global* e utilizado na especificação da posição dos pontos nodais do modelo.³ E em cada seção transversal de uma barra, de forma mais geral, são definidos os esforços seccionais: normal N , cortantes V_y e V_z , momento de torção T e momentos fletores M_y e M_z .

As estruturas reticuladas são classificadas em *vigas*, *treliças* (planas e espaciais), *pórticos* (planos e espaciais) e *grelhas*, conforme os esforços seccionais que venham a ocorrer. As reticuladas planas são usualmente consideradas em um plano XY, com o eixo local z de cada barra escolhido de mesmo sentido que o eixo global Z . E pelo fato de as barras serem idealizadas em seus eixos geométricos, as estruturas reticuladas são discretizadas de forma natural pelos pontos extremos desses eixos, denominados *pontos nodais* e que definem os *elementos de barra* constituintes do modelo. Em caso do pórtico plano, o modelo é ilustrado na Figura 5-1.2 na qual os pontos nodais e os elementos de barra estão numerados separados e sequencialmente a partir de 1. Os demais modelos reticulados recebem numerações semelhantes.

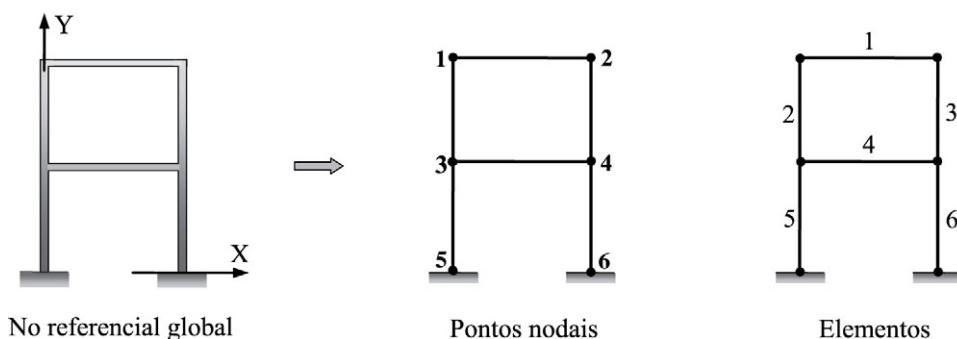


FIGURA 5-1.2 Discretização de pórtico plano.

O termo *deslocamento* referente a um ponto nodal diz respeito, em um determinado referencial, a um componente de deslocamento de translação ou de rotação, da seção transversal representada por esse ponto. Portanto, os deslocamentos de um ponto nodal são em número de seis em caso tridimensional, três de translação e três de rotação da seção. E como há casos de modelos em que alguns desses componentes são nulos, os deslocamentos nodais relevantes de cada elemento de barra dependem do modelo. Tais deslocamentos descrevem de forma completa a configuração de deformação do elemento sem ações externas ao longo do mesmo e estão mostrados na Figura 5-1.3 em termos do referencial local.⁴ Observa-se que, em cada ponto nodal, estão inicialmente numerados os deslocamentos translacionais que ocorrem nas direções x , y e z , seguidos das rotações segundo essas mesmas direções.

³ Barra curva e/ou de seção transversal variável costuma ser considerada, de forma simplista e aproximada, através de um conjunto de segmentos retos de seção constante.

⁴ Embora momento fletor, esforço cortante e, eventualmente, esforço normal possam ocorrer em viga, optou-se por denominar *elemento de viga* aquele em que há apenas os dois primeiros desses esforços, para diferenciá-lo do *elemento de pórtico plano*.

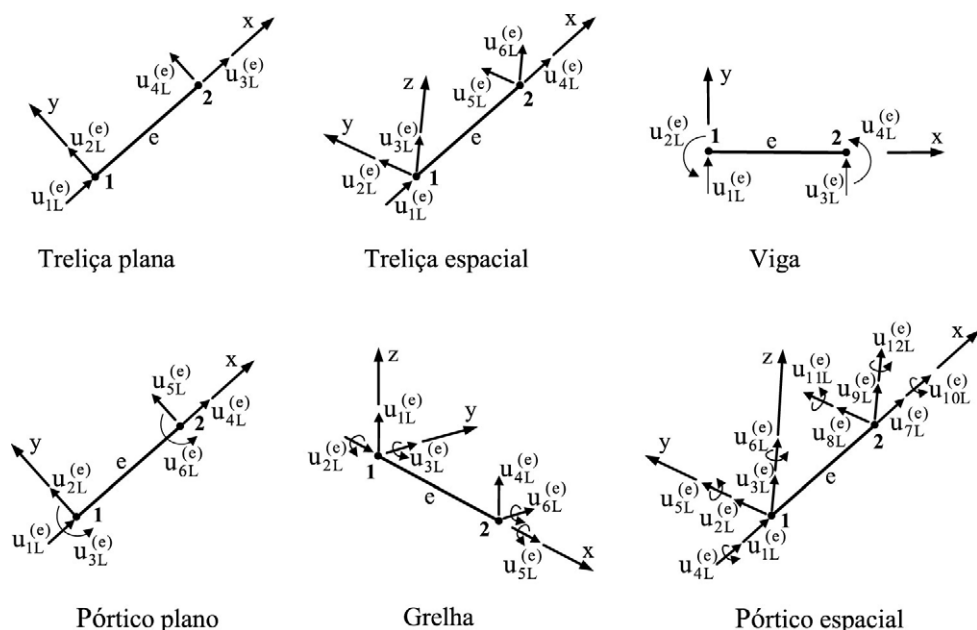


FIGURA 5-1.3 Deslocamentos nodais dos elementos de barra reta no referencial local.

Já em modelo contínuo, faz-se a divisão do domínio geométrico em subdomínios denominados *elementos finitos*, em constituição de uma *malha de elementos finitos*, como a chapa mostrada na [Figura 5-1.4](#) em que a força externa aplicada em parte do contorno e a restrição em outra parte do contorno são discretizadas em pontos nodais. Em cada elemento é imposto o cumprimento de equações de equilíbrio local e a interação dos elementos entre si e com o meio exterior através de pontos nodais, de maneira a se obter um equilíbrio global. Assim, a complexidade da geometria e das condições de contorno do modelo contínuo original se reduz basicamente ao se construir uma malha a partir de formas simples de elementos finitos e de restrições e forças nodais. E tal como nos modelos reticulados, os pontos nodais, os elementos e os deslocamentos nodais são numerados, separados e sequencialmente, a partir

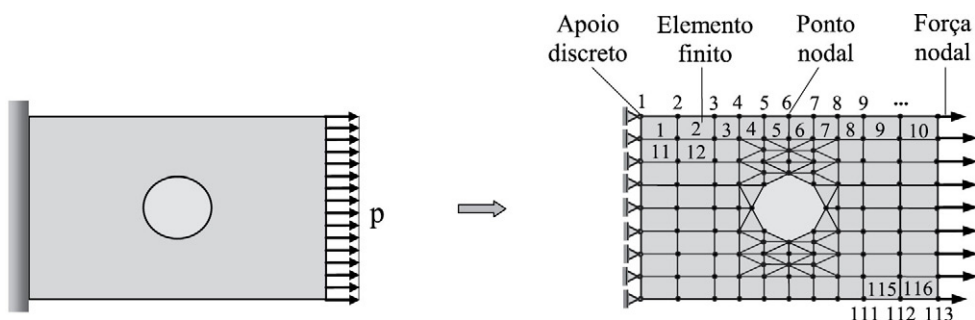


FIGURA 5-1.4 Discretização em elementos finitos, de uma chapa tracionada.

de 1. O índice superior entre parêntesis denota o elemento e os índices inferiores L e G designam, respectivamente, o *referencial local* e *referencial global*. Outros índices inferiores dizem respeito a componentes de vetor ou de matriz.

Os elementos finitos de modelos estruturais são formulados a partir do arbítrio de um campo de deslocamentos por interpolação dos deslocamentos nodais do elemento. Esses deslocamentos estão ilustrados na [Figura 5-1.5](#) nos casos de elementos triangulares de estado plano e de flexão de placa, considerados no referencial global.⁵ O campo de deslocamentos é aproximativo ao modelo matemático original e dependente dos deslocamentos nodais considerados.⁶ Contudo, as aproximações introduzidas pela discretização se reduzem com o refinamento da malha de elementos finitos. E com os modernos sistemas computacionais de análise podem ser construídos modelos com grande refinamento, com a consideração de detalhes do sistema físico.

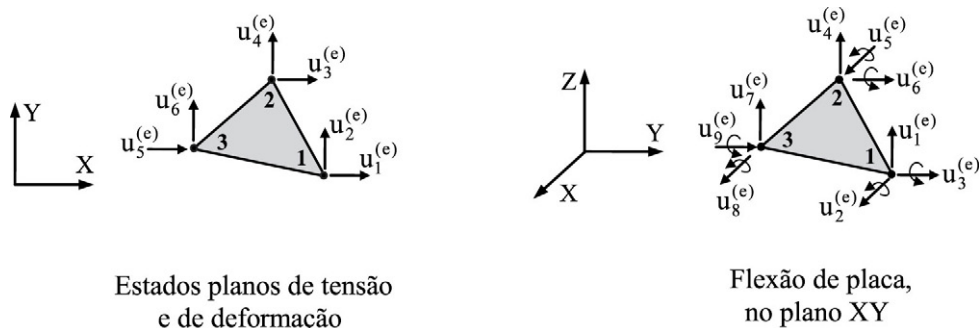


FIGURA 5-1.5 Deslocamentos nodais de elementos finitos triangulares.

Em estruturas constituídas de barras, há uma natural definição mínima de pontos nodais que são as extremidades das idealizações das barras. Pontos adicionais costumam ser utilizados para substituir uma barra curva por trechos lineares, ou aproximar uma barra de seção transversal variável por trechos de seção constante, por exemplo. Já em discretização de modelos contínuos, não existe um procedimento geral de definição dos pontos nodais e dos elementos finitos, e a discretização pode ser detalhada o quanto for necessária para reduzir os erros de discretização a um nível aceitável. As propriedades de material e as ações externas podem variar de elemento a elemento.

Assim, com o aumento da discretização, a solução numérica converge para a solução do modelo contínuo original.⁷ Refinamento de discretização implica mais trabalho de geração

⁵ Elemento de barra pode ser formulado a partir de campo de deslocamentos, mas não é um elemento finito verdadeiro porque esse campo não acrescenta aproximação à idealização unidimensional de teorias clássicas de barra. Contudo, em generalidade de denominação, os elementos de barra costumam também ser referidos como elementos finitos.

⁶ Referencial local é utilizado em formulação de elemento de casca.

⁷ Convergência a menos das aproximações da aritmética de ponto flutuante inerentes aos computadores, de eventuais aproximações de discretização no tempo das ações externas, de aproximações de integrações numéricas e de aproximações em transformação modal de coordenadas, que é apresentada no próximo capítulo.

do modelo discreto, em extensão do processamento automático e em maior quantidade de resultados a interpretar e validar. Assim, nem sempre é indicado efetuar muito refinamento, ainda mais devido ao fato de o modelo contínuo já conter aproximações em relação ao sistema físico cujo comportamento busca-se prever. Somente a experiência desenvolve a habilidade de discretizar adequadamente, que pode ser adquirida através de sucessivas discretizações de modelos matemáticos de soluções conhecidas e comparação dessas soluções com as correspondentes soluções numéricas.

Quanto ao sistema das equações de movimento de cada elemento, este tem forma semelhante ao do oscilador duplo e, sem indicação a referencial, se escreve:

$$\mathbf{M}^{(e)}\ddot{\mathbf{u}}^{(e)}(t) + \mathbf{C}^{(e)}\dot{\mathbf{u}}^{(e)}(t) + \mathbf{K}^{(e)}\mathbf{u}^{(e)}(t) = \mathbf{f}^{(e)}(t) \quad (5-1.1)$$

Nesse sistema, $\ddot{\mathbf{u}}^{(e)}$, $\dot{\mathbf{u}}^{(e)}$ e $\mathbf{u}^{(e)}$ são, respectivamente, os vetores das acelerações, velocidades e deslocamentos, todos nodais; $\mathbf{M}^{(e)}$, $\mathbf{C}^{(e)}$ e $\mathbf{K}^{(e)}$ são, respectivamente, as matrizes de *massa*, de *amortecimento viscoso* e de *rigidez*; $\mathbf{M}^{(e)}\ddot{\mathbf{u}}^{(e)}$, $\mathbf{C}^{(e)}\dot{\mathbf{u}}^{(e)}$ e $\mathbf{K}^{(e)}\mathbf{u}^{(e)}$ são, respectivamente, as *forças de inércia*, de *amortecimento* e *restitutivas elásticas*; assim como $\mathbf{f}^{(e)}$ é o vetor das *forças nodais equivalentes* às ações externas aplicadas ao elemento. No caso de elemento de barra, essas matrizes e vetor são obtidos no referencial local do elemento, para posterior transformação ao referencial global, como será mostrado na próxima seção.

Em capítulos anteriores, as equações de movimento foram construídas com a aplicação do *princípio de d'Alembert*. Em discretizações com o *Método dos Elementos Finitos*, que inclui as estruturas constituídas de barras como caso particular, faz-se essa construção a partir das equações de movimento dos diversos elementos do modelo, através da soma das contribuições das forças de inércia, de amortecimento, de rigidez e das forças externas, que dizem respeito a cada um dos deslocamentos nodais. É o que se diz *agrupamento das equações de movimento* dos elementos, de maneira a obter o *sistema global das equações de movimento*, como será mostrado na Seção 5-4. A partir desse sistema e com a consideração das restrições de contorno, chega-se ao *sistema global restringido* cuja resolução fornece a solução numérica referente aos pontos nodais.

Esse contexto de análise está esquematizado na [Figura 5-1.6](#), que esclarece o encaminhamento de obtenção das frequências e dos modos naturais de vibração, assim como ilustra as etapas de obtenção da resposta de um modelo de estrutura.⁸

A seguir, considera-se material elástico linear (*linearidade física*), assim como deformações e deslocamentos pequenos (*linearidade geométrica*), para que seja válido o *princípio da superposição dos esforços* segundo o qual o comportamento de um modelo sob várias ações externas é igual à superposição de seus comportamentos sob cada uma dessas ações separadamente. As análises de comportamentos não lineares são realizadas através de procedimentos de linearizações, como será descrito no próximo capítulo.

⁸ Essa resposta é um conjunto de resultados numéricos de deslocamentos, velocidades, acelerações, esforços internos e/ou tensões, resultados estes que podem ser em uma sequência de valores discretos do tempo ou, simplesmente, valores máximos sem a identificação dos correspondentes instantes de ocorrência.

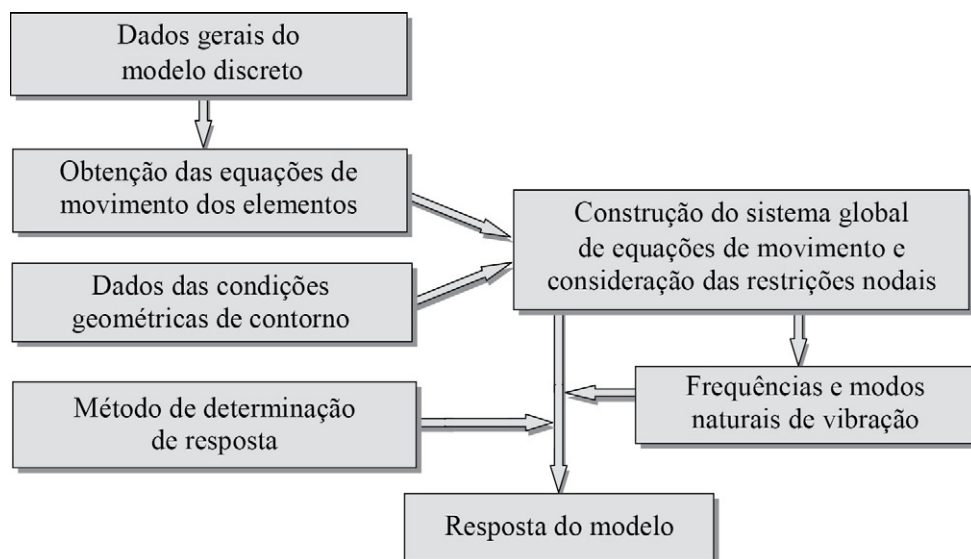


FIGURA 5-1.6 Esquema da análise de um modelo de estrutura de multigraus de liberdade.

5-2 EQUAÇÕES DE MOVIMENTO DOS ELEMENTOS DE BARRA

As equações de equilíbrio estático dos elementos de barra podem ser obtidas com as teorias clássicas de tração/compressão, flexão e torção, ou através de formulação do *Método dos Elementos Finitos*. O primeiro encaminhamento é vantajoso em obtenção de matriz de rigidez, pelo fato de facilitar a consideração do efeito das deformações dos esforços cortantes e a obtenção do vetor das forças nodais equivalentes a qualquer ação externa, assim como por permitir acurada determinação dos esforços seccionais. Já o segundo encaminhamento é essencial na obtenção de *matriz de massa consistente* e na obtenção teórica de matriz de amortecimento, para complementar as equações de movimento dos elementos.

Seguidamente, serão apresentados os procedimentos de obtenção das referidas matrizes, inicialmente pelo procedimento clássico e, posteriormente, pelo *Método dos Elementos Finitos*.

5-2.1 Matriz de rigidez

Como foi esclarecido no capítulo anterior, o coeficiente de rigidez k_{ij} de um modelo com vários graus de liberdade é numericamente igual à força restritiva (ou momento restritivo) na direção do i -ésimo deslocamento, quando se impõe, de forma estática, valor unitário ao j -ésimo grau e se mantêm com valores nulos os demais graus. Assim, os coeficientes de rigidez de um elemento de barra podem ser obtidos diretamente por imposição sucessiva de valor unitário para cada um dos seus deslocamentos nodais, mantidos nulos os demais, com os correspondentes esforços de extremidade obtidos pelo *Método das Forças* de análise de estruturas hiperestáticas.

No caso de barra reta biengastada de seção transversal constante, por exemplo, são obtidos os esforços mostrados na [Figura 5-2.1](#), sem interação entre esforço normal e deformação de flexão.⁹ A notação φ assume as expressões:

$$\varphi_y = \frac{12EI_z f_y}{GA \ell^2} \quad \text{e} \quad \varphi_z = \frac{12EI_y f_z}{GA \ell^2} \quad (5-2.1)$$

em que f_y e f_z os denominados *fatores de cisalhamento* que levam em consideração as deformações dos esforços cortantes V_y e V_z , respectivamente.¹⁰ O efeito dessas deformações é relevante em barras de grande altura e na medida em que são necessários modos naturais de vibração de ordens elevadas.

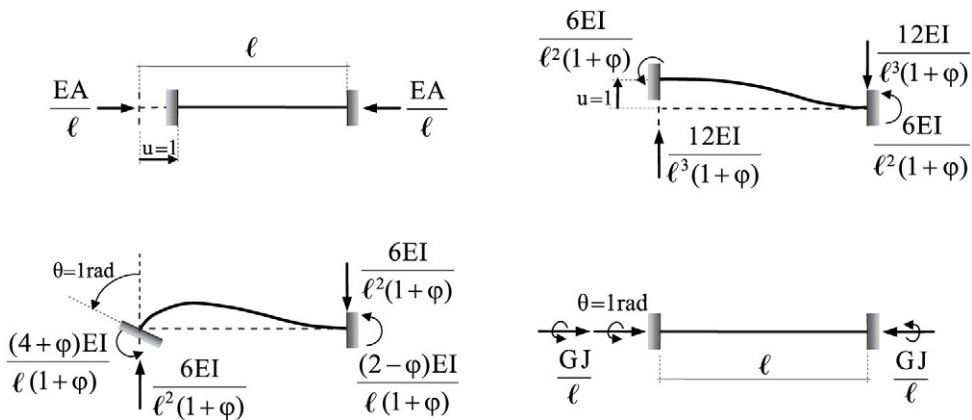


Figura 5-2.1 Esforços correspondentes a deslocamento unitário.

A partir dos esforços anteriores, identificam-se os coeficientes de rigidez do elemento de viga mostrados na [Figura 5-2.2](#), que atendem à convenção de sinais dos deslocamentos nodais.

Para desconSIDERAR o efeito das deformações dos esforços cortantes, o que é usual em barra longa comparativamente com suas dimensões transversais, basta atribuir valor nulo a φ_y (e/ou φ_z). Assim, com as numerações de deslocamentos mostradas na [Figura 5-1.3](#) e coeficientes positivos nos sentidos positivos desses deslocamentos, escrevem-se as seguintes

⁹ Com o mesmo método, podem ser obtidos os coeficientes de rigidez de barra com articulações em suas extremidades, assim como de barras curvas e/ou de seção transversal variável. J é a constante de torção que, no caso de seção transversal circular, é igual ao momento de inércia polar, e I é momento de inércia da seção transversal. Em análise dinâmica de estruturas em concreto considera-se módulo de elasticidade dinâmico até 15% a mais do que o módulo de elasticidade estático. As áreas e os momentos de inércia das seções transversais são usualmente determinados sem considerar fissuração, e os momentos de inércia de torção são calculados com a consideração de redução da seção integral, por fissuração, em até 90%.

¹⁰ Em seção retangular, $f_y = f_z = 6/5$; em seção circular, $f_y = f_z = 10/9$ e em seção circular de parede fina, $f_y = f_z = 2$, por exemplo. Para a especificação de fatores de outras formas de seção transversal, vide Roark, R.J., 1975, *Formulas for Stress and Strain*, McGraw-Hill.

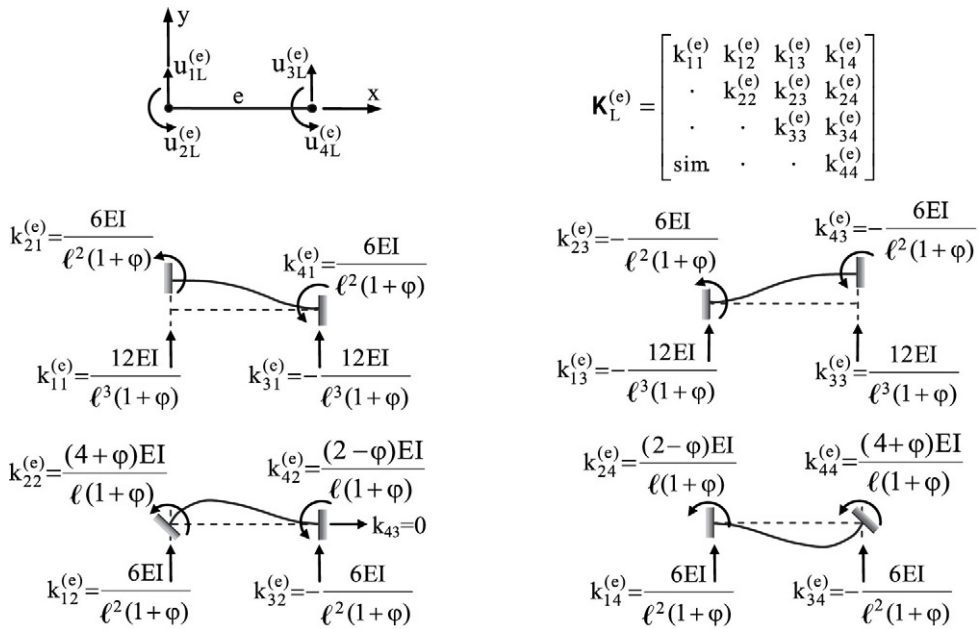


Figura 5-2.2 Coeficientes de rigidez do elemento da viga.

matrizes de rigidez dos elementos de barra biengastada de seção transversal constante, em seus referenciais locais:

a) Treliça plana:

$$\mathbf{K}_L^{(e)} = \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & 1 & 0 \\ \text{sim.} & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix} \quad (5-2.2)$$

b) Treliça espacial:

$$\mathbf{K}_L^{(e)} = \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \text{sim.} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix} \quad (5-2.3)$$

c) Viga:

$$\mathbf{K}_L^{(e)} = \frac{EI_z}{\ell} \begin{bmatrix} \frac{12}{\ell^2} & \frac{6}{\ell} & -\frac{12}{\ell^2} & \frac{6}{\ell} \\ \cdot & 4 & -\frac{6}{\ell} & 2 \\ \cdot & \cdot & \frac{12}{\ell^2} & -\frac{6}{\ell} \\ \text{sim.} & \cdot & \cdot & 4 \end{bmatrix} \quad (5-2.4)$$

d) Pórtico plano:

$$\mathbf{K}_L^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 \\ . & \frac{12EI_z}{\ell^3} & \frac{6EI_z}{\ell^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{\ell^3} & \frac{6EI_z}{\ell^2} \\ . & . & \frac{4EI_z}{\ell} & 0 & -\frac{6EI_z}{\ell^2} & \frac{2EI_z}{\ell} \\ . & . & . & \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 \\ . & . & . & . & \frac{12EI_z}{\ell^3} & -\frac{6EI_z}{\ell^2} \\ \text{sim.} & . & . & . & . & \frac{4EI_z}{\ell} \end{bmatrix} \quad (5-2.5)$$

e) Grelha:

$$\mathbf{K}_L^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{12EI_y}{\ell^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{\ell^2} & -\frac{12EI_y}{\ell^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{\ell^2} \\ . & \frac{GJ}{\ell} & 0 & 0 & -\frac{GJ}{\ell} & 0 \\ . & . & \frac{4EI_y}{\ell} & \frac{6EI_y}{\ell^2} & 0 & \frac{2EI_y}{\ell} \\ . & . & . & \frac{12EI_y}{\ell^3} & 0 & \frac{6EI_y}{\ell^2} \\ . & . & . & . & \frac{GJ}{\ell} & 0 \\ \text{sim.} & . & . & . & . & \frac{4EI_y}{\ell} \end{bmatrix} \quad (5-2.6)$$

f) Pórtico espacial:

$$\mathbf{K}_L^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & \frac{12EI_z}{\ell^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{\ell^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{\ell^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{\ell^2} \\ . & . & \frac{12EI_y}{\ell^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{\ell^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{\ell^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{\ell^2} & 0 \\ . & . & . & \frac{GJ}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{\ell} & 0 & 0 \\ . & . & . & . & \frac{4EI_y}{\ell} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{\ell^2} & 0 & \frac{2EI_y}{\ell} & 0 \\ . & . & . & . & . & \frac{4EI_z}{\ell} & 0 & -\frac{6EI_z}{\ell^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{\ell} \\ . & . & . & . & . & . & \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & \frac{12EI_z}{\ell^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{\ell^2} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & \frac{12EI_y}{\ell^3} & 0 & \frac{6EI_y}{\ell^2} & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & \frac{GJ}{\ell} & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & \frac{4EI_y}{\ell} & 0 \\ \text{sim.} & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & \frac{4EI_z}{\ell} \end{bmatrix} \quad (5-2.7)$$

Observa-se que o elemento de pórtico plano é a combinação do elemento de treliça plana com o de viga, e que o elemento de pórtico espacial é a união do de pórtico plano como o de grelha.

5-2.2 Matriz de massa

Uma matriz de massa pode ser *discreta* ou *consistente*. É qualificada como discreta quando se adota procedimento simplificado de consideração de massa concentrada nos pontos nodais, o que tem a vantagem de fornecer matriz diagonal, simplificando o tratamento numérico. É qualificada como consistente quando obtida com a formulação do *Método dos Elementos Finitos*.

Com a notação ($m' = \rho A$) designativa de *massa por unidade de comprimento* de barra reta de seção transversal constante, seguem as matrizes de massa discretas mais usuais, no referencial local. As correspondentes matrizes consistentes serão detalhadas na [Seção 5-3](#) que também apresentará uma expressão para a matriz de amortecimento.

- a) Treliça plana:** Considera-se que a metade da massa do elemento esteja concentrada em cada um dos seus pontos nodais, de maneira a obter:

$$\mathbf{M}_L^{(e)} = \frac{m'\ell}{2} \text{diag} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (5-2.8)$$

onde o símbolo $\text{diag}[\dots]$ representa matriz diagonal com os coeficientes diagonais mostrados.

- b) Treliça espacial:** Idem a consideração anterior, obtendo-se:

$$\mathbf{M}_L^{(e)} = \frac{m'\ell}{2} \text{diag} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (5-2.9)$$

- c) Viga:** Para os deslocamentos nodais lineares, considera-se o mesmo que em elemento de treliça. Quanto aos deslocamentos de rotação, desconsidera-se inércia rotacional ou adota-se a inércia rotacional de até metade do elemento, em relação a cada um de seus pontos nodais.

Momento de inércia de massa de barra foi obtida como resultado intermediário no Exemplo 1-5.1, que para a metade de uma barra se escreve:

$$I_o = \frac{(m'\ell/2)(\ell/2)^2}{3} = \frac{m'\ell^3}{24} \quad (5-2.10)$$

Logo, tem-se a matriz de massa discreta com essa inércia de rotação:

$$\mathbf{M}_L^{(e)} = \frac{m'\ell}{2} \text{diag} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\ell^2}{12} & 1 & \frac{\ell^2}{12} \end{bmatrix} \quad (5-2.11)$$

Contudo, é usual desconsiderar essa inércia e adotar:¹¹

¹¹ A inclusão do referido momento, como é sugerido em parte da literatura, não conduz a resultados mais acurados. Contudo, uma pequena fração dessa inércia é útil para evitar coeficientes diagonais nulos na matriz de massa.

$$\mathbf{M}_L^{(e)} = \frac{m'\ell}{2} \text{diag} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5-2.12)$$

- d) **Pórtico plano:** Por ser a combinação do elemento de treliça plana com o elemento de viga, chega-se à matriz de massa sem a consideração de inércia de rotação:

$$\mathbf{M}_L^{(e)} = \frac{m'\ell}{2} \text{diag} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5-2.13)$$

- e) **Grelha:** Para os deslocamentos nodais transversais adota-se o mesmo que em elemento de treliça. Quanto aos deslocamentos de flexão, faz-se o mesmo que no elemento de pórtico plano e, para os deslocamentos de torção, considera-se, em cada ponto nodal, a inércia de rotação de metade da barra em torno de seu eixo. Logo, em caso de seção transversal circular, escreve-se a inércia:

$$I_o = \frac{\pi r^4 (\ell/2)}{4} = \frac{\rho \ell J}{4} = \frac{m'\ell J}{4A} \quad (5-2.14)$$

em que J é o momento de inércia polar. E por se tratar de procedimento aproximativo, substitui-se, no caso de seção transversal não circular, J pelo momento de inércia de torção. Assim, chega-se à matriz de massa discreta:

$$\mathbf{M}_L^{(e)} = \frac{m'\ell}{2} \text{diag} \begin{bmatrix} 1 & \frac{J}{2A} & 0 & 1 & \frac{J}{2A} & 0 \end{bmatrix} \quad (5-2.15)$$

- f) **Pórtico espacial:** A matriz de massa discreta de pórtico espacial é obtida por combinação adequada dos coeficientes da correspondente matriz do elemento de pórtico plano com os da matriz do elemento de grelha, e se escreve:

$$\mathbf{M}_L^{(e)} = \frac{m'\ell}{2} \text{diag} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \frac{J}{2A} & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \frac{J}{2A} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5-2.16)$$

5-2.3 Vetor das forças nodais equivalentes

As ações externas podem ser aplicadas nos pontos nodais e ao longo dos elementos. As primeiras são diretamente consideradas quando da formação do sistema global das equações de movimento, e as segundas são tratadas através de *forças nodais equivalentes*. O vetor dessas últimas forças é designado por $\mathbf{f}_L^{(e)}$ e constituído pelos esforços de engastamento perfeito do elemento (reações nas extremidades restringidas, no referencial local), com sinais contrários. E assim como os coeficientes de rigidez de barra, esses esforços podem ser determinados através do *Método das Forças*.

Como ilustração, os casos de força concentrada e de força uniformemente transversal distribuída em barra biengastada, reta de seção transversal constante, estão apresentados na Figura 5-2.3. Logo, para aquela força, tem-se o vetor das forças nodais equivalentes:

$$\mathbf{f}_L^{(e)}(t) = -\frac{f(t)}{\ell^2} \begin{bmatrix} \frac{b^2(3a+b)}{\ell} & ab^2 & \frac{a^2(a+3b)}{\ell} & -a^2b \end{bmatrix}^T \quad (5-2.17)$$

onde o índice T superior à notação matricial indica matriz transposta.

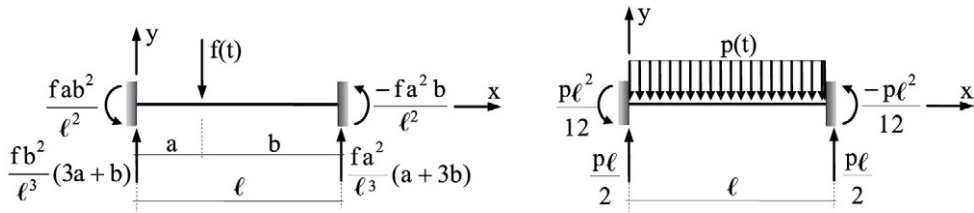


FIGURA 5-2.3 Esforços de engastamento perfeito de barra reta.

No caso da força uniformemente distribuída no elemento, como mostrado na parte direita da Figura 5-2.3, tem-se o vetor das forças nodais equivalentes:

$$\mathbf{f}_L^{(e)}(t) = -\frac{p(t)\ell}{2} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\ell}{6} & 1 & -\frac{\ell}{6} \end{bmatrix}^T \quad (5-2.18)$$

5-2.4 Transformação ao referencial global

Com a matriz de massa $\mathbf{M}_L^{(e)}$, a matriz de rigidez $\mathbf{K}_L^{(e)}$ e o vetor das forças nodais equivalentes $\mathbf{f}_L^{(e)}$ apresentados anteriormente, assim como com a matriz de amortecimento $\mathbf{C}_L^{(e)}$ que será expressa na Seção 5-3, escreve-se o sistema das equações de movimento de elemento de barra, similar ao da Equação 5-1.1 e expresso agora no sistema local como:

$$\mathbf{M}_L^{(e)} \ddot{\mathbf{u}}_L^{(e)}(t) + \mathbf{C}_L^{(e)} \dot{\mathbf{u}}_L^{(e)}(t) + \mathbf{K}_L^{(e)} \mathbf{u}_L^{(e)}(t) = \mathbf{f}_L^{(e)}(t) \quad (5-2.19)$$

Mas, pelo fato de os deslocamentos no modelo discreto serem considerados em um referencial (global) XYZ, como ilustra a Figura 5-2.4 para um pórtico plano, é necessário transformar o sistema anterior a esse referencial.¹²

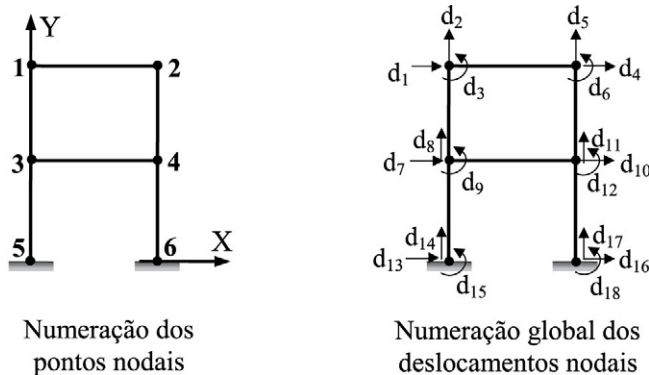


FIGURA 5-2.4 Numerações nodais do pórtico plano da Figura 5-1.2.

¹² A rigor não é necessário que todos os deslocamentos nodais do modelo digam respeito a um único referencial. Basta que, em cada ponto nodal, esses deslocamentos estejam em um mesmo referencial.

Importa observar que se adota a notação “d” para os deslocamentos nodais na numeração global, diferentemente da notação “u” utilizada em tratamento de elemento. Além disso, observa-se que os deslocamentos do modelo são numerados na ordem de seus pontos nodais e que, em cada ponto nodal, se considera inicialmente o deslocamento na direção de X, seguido do deslocamento na direção de Y e seguido da rotação segundo o eixo Z.¹³

Na referida transformação entre referenciais, utiliza-se matriz de rotação obtida por decomposição de um vetor \mathbf{u} em seus componentes (u_x, u_y, u_z) em um determinado referencial xyz e em seus componentes (u_X, u_Y, u_Z) em um referencial XYZ, como mostrado na parte esquerda da Figura 5-2.5.¹⁴

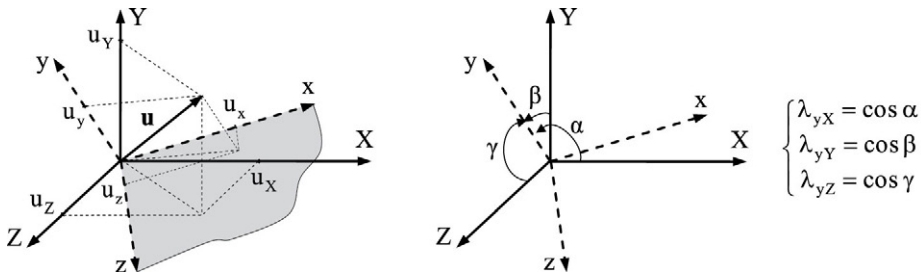


FIGURA 5-2.5 Decomposição vetorial no espaço tridimensional.

Logo, escreve-se a transformação entre os referidos componentes de vetor:

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{xX} & \lambda_{xY} & \lambda_{xZ} \\ \lambda_{yX} & \lambda_{yY} & \lambda_{yZ} \\ \lambda_{zX} & \lambda_{zY} & \lambda_{zZ} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_X \\ u_Y \\ u_Z \end{Bmatrix} = \mathbf{R} \begin{Bmatrix} u_X \\ u_Y \\ u_Z \end{Bmatrix} \quad (5-2.20)$$

onde $(\lambda_{xX}, \lambda_{xY}, \lambda_{xZ})$, $(\lambda_{yX}, \lambda_{yY}, \lambda_{yZ})$ e $(\lambda_{zX}, \lambda_{zY}, \lambda_{zZ})$ são os cossenos diretores dos eixos x, y e z, respectivamente, em relação aos eixos X, Y e Z, em que identifica-se a matriz (ortogonal) de rotação.¹⁵

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \lambda_{xX} & \lambda_{xY} & \lambda_{xZ} \\ \lambda_{yX} & \lambda_{yY} & \lambda_{yZ} \\ \lambda_{zX} & \lambda_{zY} & \lambda_{zZ} \end{bmatrix} \quad (5-2.21)$$

Em decomposição vetorial no plano XY e com o ângulo α formado pelos eixos x e X, como mostra a Figura 5-2.6, a matriz anterior particulariza-se para a forma:

¹³ Para facilidade de formulação, optou-se por numerar inicialmente os deslocamentos não restringidos, que são os graus de liberdade, seguidos da numeração dos deslocamentos restritos por apoios (condições geométricas de contorno). Esses últimos deslocamentos são necessários no caso de ação múltipla de apoios, como será apresentado no Capítulo 7.

¹⁴ Grandeza vetorial tem independência do referencial em que é considerada.

¹⁵ Esses cossenos não são mutuamente independentes, porque três ângulos definem a orientação de um referencial local em relação ao global. E a forma mais prática de especificar essa orientação é através de um ponto auxiliar que defina, juntamente com o eixo x, o plano que contém o eixo y.

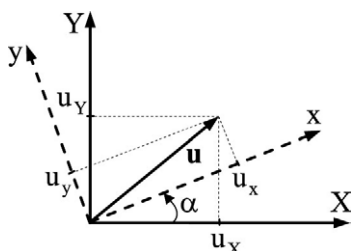


FIGURA 5-2.6 Decomposição vetorial no plano.

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (5-2.22)$$

As duas matrizes anteriores são referentes aos deslocamentos em um ponto nodal de elemento de barra. Contudo, como cada barra tem dois pontos nodais, essas matrizes precisam ser adequadamente expandidas para dizer respeito à transformação dos deslocamentos desses pontos. Assim, faz-se a transformação dos deslocamentos nodais do elemento de barra em seu referencial local, $\mathbf{u}_L^{(e)}$, aos deslocamentos nodais desse elemento no referencial global, $\mathbf{u}_G^{(e)}$, sob a forma:

$$\mathbf{u}_L^{(e)} = \mathbf{R}^{(e)} \mathbf{u}_G^{(e)} \quad (5-2.23)$$

que em caso de pórtico espacial utiliza a matriz de ordem 12×12 :

$$\mathbf{R}^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \cdot & \mathbf{R} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \cdot & \cdot & \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \text{sim.} & \cdot & \cdot & \mathbf{R} \end{bmatrix} \quad (5-2.24)$$

em que a matriz \mathbf{R} está expressa na Equação 5-2.21.¹⁶

Os deslocamentos do elemento de pórtico espacial no referencial local e no referencial global estão mostrados na Figura 5-2.7.

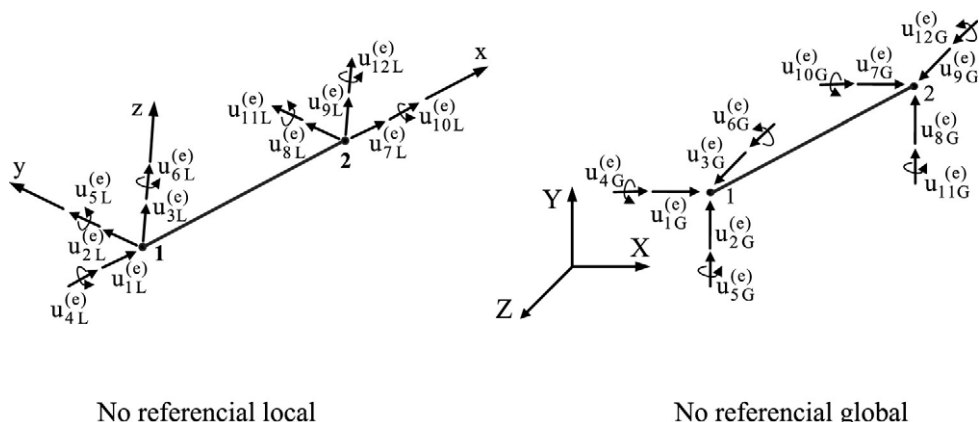


FIGURA 5-2.7 Deslocamentos nodais do elemento de pórtico espacial.

¹⁶ Uma rotação muito pequena comparativamente com um radiano pode ser decomposta como se tratasse de vetor. Vide Lemos, N.A., 2007, p. 94.

De forma análoga ao procedimento anterior, têm-se as seguintes transformações de velocidades, acelerações e forças, nodais:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}}_L^{(e)} = \mathbf{R}^{(e)} \dot{\mathbf{u}}_G^{(e)} \\ \ddot{\mathbf{u}}_L^{(e)} = \mathbf{R}^{(e)} \ddot{\mathbf{u}}_G^{(e)} \\ \mathbf{f}_L^{(e)} = \mathbf{R}^{(e)} \mathbf{f}_G^{(e)} \end{cases} \quad (5-2.25)$$

As transformações entre os deslocamentos nodais dos demais elementos de barra são casos particulares do elemento de pórtico espacial, quando então se têm as matrizes de rotação especificadas a seguir:

a) Treliça plana:

$$\mathbf{R}^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \quad (5-2.26)$$

em que \mathbf{R} é a matriz expressa na Equação 5-2.24.

b) Treliça espacial:

$$\mathbf{R}^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \quad (5-2.27)$$

em que a matriz \mathbf{R} está expressa na Equação 5-2.21.

c) Pórtico plano:

$$\mathbf{R}^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \cdot & 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \cdot & \cdot & \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \text{sim.} & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \quad (5-2.28)$$

com a matriz \mathbf{R} contida na Equação 5-2.22 e em que os coeficientes unitários expressam que $(u_{3L}^{(e)} \equiv u_{3G}^{(e)})$ e $(u_{6L}^{(e)} \equiv u_{6G}^{(e)})$.

d) Grelha:

$$\mathbf{R}^{(e)} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \cdot & \mathbf{R} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \cdot & \cdot & 1 & \mathbf{0} \\ \text{sim.} & \cdot & \cdot & \mathbf{R} \end{bmatrix} \quad (5-2.29)$$

com a matriz \mathbf{R} expressa na Equação 5-2.22, de maneira que $(u_{1L}^{(e)} \equiv u_{1G}^{(e)})$ e $(u_{4L}^{(e)} \equiv u_{4G}^{(e)})$.

Tendo-se a matriz de rotação $\mathbf{R}^{(e)}$, multiplica-se a Equação 5-2.19 por $\mathbf{R}^{(e)T}$, e empregam-se as Equações 5-2.23 e 5-2.25 para obter o sistema das equações de movimento do elemento de barra no referencial global:

$$(\mathbf{R}^{(e)T} \mathbf{M}_L^{(e)} \mathbf{R}^{(e)}) \ddot{\mathbf{u}}^{(e)}(t) + (\mathbf{R}^{(e)T} \mathbf{C}_L^{(e)} \mathbf{R}^{(e)}) \dot{\mathbf{u}}^{(e)}(t) + (\mathbf{R}^{(e)T} \mathbf{K}_L^{(e)} \mathbf{R}^{(e)}) \mathbf{u}^{(e)}(t) = \mathbf{R}^{(e)T} \mathbf{f}_L^{(e)}(t)$$

que com as notações:

$$\begin{cases} \mathbf{M}_G^{(e)} = \mathbf{R}^{(e)T} \mathbf{M}_L^{(e)} \mathbf{R}^{(e)} \\ \mathbf{C}_G^{(e)} = \mathbf{R}^{(e)T} \mathbf{C}_L^{(e)} \mathbf{R}^{(e)} \\ \mathbf{K}_G^{(e)} = \mathbf{R}^{(e)T} \mathbf{K}_L^{(e)} \mathbf{R}^{(e)} \\ \mathbf{f}_G^{(e)}(t) = \mathbf{R}^{(e)T} \mathbf{f}_L^{(e)}(t) \end{cases} \quad (5-2.30)$$

fica sob a forma:

$$\mathbf{M}_G^{(e)} \ddot{\mathbf{u}}_G^{(e)}(t) + \mathbf{C}_G^{(e)} \dot{\mathbf{u}}_G^{(e)}(t) + \mathbf{K}_G^{(e)} \mathbf{u}_G^{(e)}(t) = \mathbf{f}_G^{(e)}(t) \quad (5-2.31)$$

5-3 EQUAÇÕES DE MOVIMENTO DE ELEMENTO FINITO

A literatura do *Método dos Elementos Finitos* é muito ampla. No que se segue apresenta-se apenas um resumo esclarecedor à obtenção das equações de movimento de modelo de elemento finito. E como já esclarecido, com esse método, divide-se o domínio geométrico em subdomínios denominados elementos finitos, que interagem entre si e com o meio exterior através de pontos nodais.¹⁷ Inicialmente, obtêm-se as equações de movimento desses elementos para, em seguida, construir o sistema das equações de movimento da malha de elementos e, posteriormente, considerar as condições de apoio.

Para obter as equações de um elemento finito na formulação de deslocamentos, arbitra-se o campo:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{N} \mathbf{u}^{(e)}(t) \quad (5-3.1)$$

onde \mathbf{u} é o vetor dos deslocamentos de um ponto qualquer do elemento, \mathbf{N} é uma matriz de funções de interpolação ou de forma e $\mathbf{u}^{(e)}$ é o vetor dos deslocamentos nodais do elemento (presentemente sem indicação de referencial, por simplicidade).¹⁸

No caso do elemento de treliça plana, por exemplo, as funções de interpolação estão mostradas na [Figura 5-3.1](#), e a referida interpolação tem a forma:

$$\mathbf{u}(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{v}(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1(x) & 0 & N_2(x) & 0 \\ 0 & N_1(x) & 0 & N_2(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{1L}^{(e)}(t) \\ u_{2L}^{(e)}(t) \\ u_{3L}^{(e)}(t) \\ u_{4L}^{(e)}(t) \end{Bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{u}_L^{(e)}(t) \quad (5-3.2)$$

¹⁷ Contribuições pioneiras são devidas a Argyris, J.H. & Kelsey, S., apresentadas em 1955 e reproduzidas em 1960, *Energy Theorems and Structural Analysis*, Butterworth & Co.. São também devidas a Turner, M.J., Clough, R.W., Martin, H.C. & Topp, L.J., em 1956, *Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures*, Journal of Aeronautic Society. O nome *elemento finito* foi cunhado por Clough, R.W., em 1960, *The Finite Element Method in Plane Stress Analysis*, ASCE, 2nd Conference on Electronic Computation.

¹⁸ Os deslocamentos nodais podem incluir derivadas de deslocamentos de translação. As funções de interpolação devem ser contínuas no interior do elemento e, na maior parte das vezes, garantem continuidade de deslocamentos nas interfaces dos elementos, quando então o elemento é dito *conforme* ou *compatível*. A grande simplicidade do método é que o campo de deslocamentos não precisa satisfazer às condições geométricas de contorno do modelo original, apenas atender a determinados critérios de convergência.

onde se identifica a matriz **N**. Nessa equação, u e v são os componentes do deslocamento de um ponto qualquer do elemento, no referencial local, assim como o são os deslocamentos nodais. Em elemento de treliça, como só há deformação axial, não é relevante a interpolação do deslocamento transversal. E observa-se que as funções de interpolação N_1 e N_2 são lineares, têm valor unitário em um ponto nodal do elemento e valor nulo no outro ponto nodal.

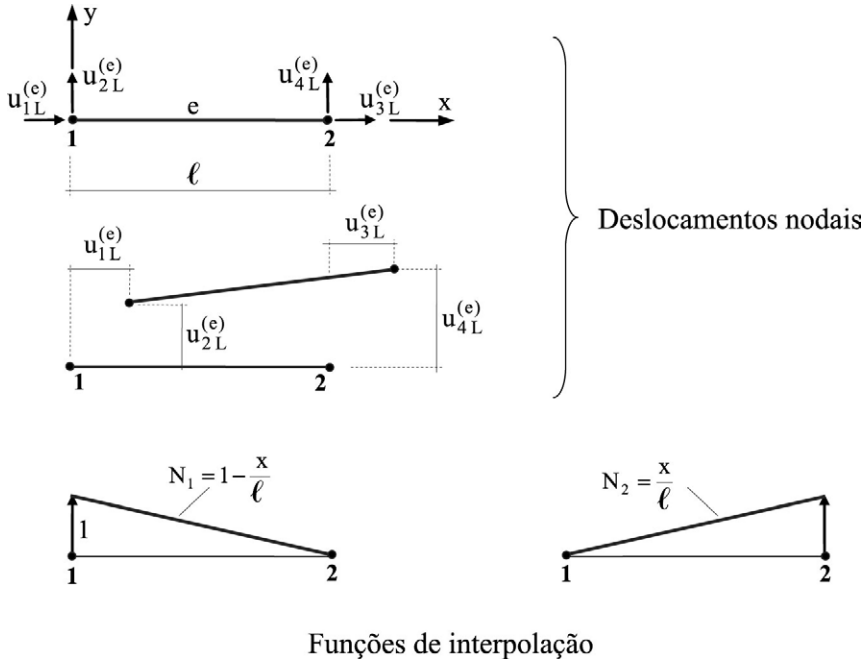


FIGURA 5-3.1 Elemento de treliça plana.

Para o elemento de viga sem o efeito de deformação de esforço cortante, as funções de interpolação estão mostradas na [Figura 5-3.2](#), e o campo de deslocamentos tem a forma:

$$u(t) = \begin{bmatrix} N_1(x) & N_2(x) & N_3(x) & N_4(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{1L}^{(e)}(t) \\ u_{2L}^{(e)}(t) \\ u_{3L}^{(e)}(t) \\ u_{4L}^{(e)}(t) \end{Bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{u}_L^{(e)}(t) \quad (5-3.3)$$

em que u é o deslocamento (transversal) de um ponto qualquer do elemento, e os deslocamentos nodais são no referencial local. Essas funções são *polinômios de Hermite* cúbicos e têm os valores nodais $(u_{1L}^{(e)} = u_{|x=0})$, $(u_{2L}^{(e)} = u_{,x|x=0})$, $(u_{3L}^{(e)} = u_{|x=\ell})$ e $(u_{4L}^{(e)} = u_{,x|x=\ell})$.¹⁹

Para um elemento de estado plano de tensões, tem-se o vetor de deslocamentos de um ponto qualquer:

¹⁹ Como a integração da equação diferencial da *teoria clássica de viga* ($EI u_{,xxxx} = p$) fornece uma equação cúbica no caso de $(p=0)$, o campo de deslocamentos anterior representa exatamente a deformada do elemento imposta por deslocamentos nodais.

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (5-3.4)$$

onde u e v são os deslocamentos nas direções x e y , em que as funções de interpolação dependem dos deslocamentos nodais (usualmente no referencial global) que sejam considerados no elemento.

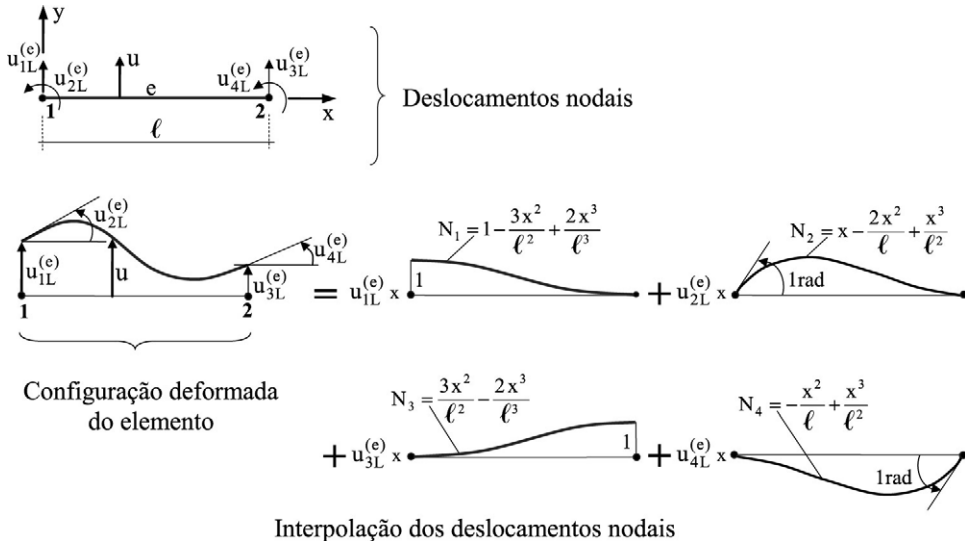


FIGURA 5-3.2 Elemento de viga.

A partir do arbítrio do campo de deslocamentos para o elemento, como expresso na Equação 5-3.1, tem-se o campo de velocidades:

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{N} \dot{\mathbf{u}}_L^{(e)}(t) \quad (5-3.5)$$

e o de acelerações:

$$\ddot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{N} \ddot{\mathbf{u}}_L^{(e)}(t) \quad (5-3.6)$$

em que $\dot{\mathbf{u}}_L^{(e)}$ e $\ddot{\mathbf{u}}_L^{(e)}$ são os vetores, respectivamente, das velocidades e das acelerações, nodais.

Para cada modelo matemático, têm-se relações entre os componentes de deformação e os componentes de deslocamento, o que se escreve:

$$\boldsymbol{\epsilon}(t) = \mathbf{L} \mathbf{u}(t) = \mathbf{L} \mathbf{N} \mathbf{u}_L^{(e)}(t) = \mathbf{B} \mathbf{u}_L^{(e)}(t) \quad (5-3.7)$$

onde \mathbf{L} é uma matriz de operadores diferenciais e em que se adota a notação ($\mathbf{B} = \mathbf{L} \mathbf{N}$).

No caso do elemento de viga em flexão, por exemplo, a partir da equação da linha elástica ($EI u_{,xx} = -M$), considera-se ($\boldsymbol{\epsilon} = u_{,xx}$). Assim, escreve-se:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{d\mathbf{N}}{dx^2} \mathbf{u}_L^{(e)} \rightarrow \boldsymbol{\epsilon} = \frac{d}{dx^2} \mathbf{N} \mathbf{u}_L^{(e)} \quad (5-3.8)$$

em que o vetor $\boldsymbol{\varepsilon}$ se degenera em um coeficiente e a matriz \mathbf{L} se particulariza ao operador derivada segunda. Logo, com as funções de interpolação incluídas na figura anterior, chega-se ao campo de deformações do elemento:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} -\frac{6}{\ell^2} + \frac{12x}{\ell^3} & -\frac{4}{\ell} + \frac{6x}{\ell^2} & -\frac{6}{\ell^2} - \frac{12x}{\ell^3} & -\frac{2}{\ell} + \frac{6x}{\ell^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{1L}^{(e)} \\ \mathbf{u}_{2L}^{(e)} \\ \mathbf{u}_{3L}^{(e)} \\ \mathbf{u}_{4L}^{(e)} \end{Bmatrix} = \mathbf{B} \mathbf{u}_L^{(e)} \quad (5-3.9)$$

onde se identifica a matriz \mathbf{B} .

Nos casos do estado plano de tensões e do estado plano de deformações, têm-se os componentes de deformação:²⁰

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ u_{,y} + v_{,x} \end{Bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \mathbf{L} \mathbf{u} \quad (5-3.10)$$

onde se identifica a matriz de operadores diferenciais \mathbf{L} .

Para cada modelo matemático, escrevem-se as relações entre os componentes de tensão e os correspondentes componentes de deformação, que constituem as equações constitutivas:

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon}(t) \rightarrow \boxed{\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathbf{E} \mathbf{B} \mathbf{u}_L^{(e)}(t)} \quad (5-3.11)$$

onde \mathbf{E} é uma matriz simétrica positiva-definida de propriedades elásticas dependente do material e do modelo.

Com o elemento de viga, por exemplo, como se considerou ($\varepsilon = u_{,xx}$) e ($EI u_{,xx} = -M$), toma-se:

$$\sigma = EI \boldsymbol{\varepsilon} \quad (5-3.12)$$

em que o vetor $\boldsymbol{\sigma}$ se degenera em um coeficiente (resultante de tensões de flexão) e a matriz \mathbf{E} se degenera na rigidez de flexão EI .

No caso do estado plano de tensões em material isotrópico (em que as propriedades independem da direção), a relação entre componentes de tensão e componentes de deformação é obtida a partir da *lei de Hooke generalizada* e se escreve:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (5-3.13)$$

onde ν é o coeficiente de Poisson e se identifica a matriz de propriedades elásticas \mathbf{E} .²¹

²⁰ Com a consideração de pequeno gradiente de deslocamento e do atendimento de condições de compatibilidade ao longo do material, de maneira que não haja fissura.

²¹ Por simplicidade, desconsideram-se deformações e tensões iniciais.

As equações de movimento de elementos finitos podem ser obtidas através de vários procedimentos. A seguir, utiliza-se o *princípio dos deslocamentos virtuais* cuja forma conceitual foi apresentada na Seção 1-4 e que, com a inclusão das forças de amortecimento, se escreve:

$$\text{Trab. virtual das forças internas} + \text{Trab. virtual das forças de inércia} + \text{Trabalho virtual das forças de amortecimento} = \text{Trab. virtual das forças externas} \quad (5-3.14)$$

De forma explícita e com a presente notação, esse princípio se escreve:

$$\int_{V_e} \boldsymbol{\sigma}^T \delta \boldsymbol{\epsilon} dV_e + \int_{V_e} \mathbf{f}_{in}^T \delta \mathbf{u} dV_e + \int_{V_e} \mathbf{f}_a^T \delta \mathbf{u} dV_e = \int_{V_e} \mathbf{p}^T \delta \mathbf{u} dV_e + \int_{S_e} \mathbf{q}^T \delta \mathbf{u} dS_e \quad (5-3.15)$$

onde δ indica grandeza virtual; V_e e S_e denotam, respectivamente, o volume e a superfície do elemento; \mathbf{p} e \mathbf{q} são os componentes das forças de volume e de superfície, respectivamente. Os deslocamentos virtuais independem das forças externas, das propriedades do material e do tempo.

A partir do campo de deslocamentos expresso na Equação 5-3.1 têm-se os vetores dos componentes das forças de inércia e de amortecimento viscoso:

$$\begin{cases} \mathbf{f}_{in}(t) = \rho \ddot{\mathbf{u}} = \rho \mathbf{N} \ddot{\mathbf{u}}^{(e)}(t) \\ \mathbf{f}_a(t) = c \dot{\mathbf{u}} = \rho \mathbf{N} \dot{\mathbf{u}}^{(e)}(t) \end{cases} \quad (5-3.16)$$

Além disso, a partir do mesmo campo de deslocamentos, das relações deformações-deslocamentos expressas na Equação 5-3.7 e das relações tensões-deformações apresentadas na Equação 5-3.11, obtêm-se, respectivamente, os campos virtuais de deslocamentos, de deformações e de tensões:

$$\begin{cases} \delta \mathbf{u} = \mathbf{N} \delta \mathbf{u}^{(e)} \\ \delta \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{B} \delta \mathbf{u}^{(e)} \\ \delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} \mathbf{B} \delta \mathbf{u}^{(e)} \end{cases} \quad (5-3.17)$$

Assim, a expressão do princípio dos deslocamentos virtuais toma as formas:

$$\begin{aligned} & \int_{V_e} (\mathbf{E} \mathbf{B} \mathbf{u}^{(e)})^T \mathbf{B} \delta \mathbf{u}^{(e)} dV_e + \int_{V_e} (\rho \mathbf{N} \ddot{\mathbf{u}}^{(e)})^T \mathbf{N} \delta \mathbf{u}^{(e)} dV_e + \int_{V_e} (c \mathbf{N} \dot{\mathbf{u}}^{(e)})^T \mathbf{N} \delta \mathbf{u}^{(e)} dV_e \\ & = \int_{V_e} \mathbf{p}^T \mathbf{N} \delta \mathbf{u}^{(e)} dV_e + \int_{S_e} \mathbf{q}^T \mathbf{N} \delta \mathbf{u}^{(e)} dS_e \\ \rightarrow & \delta \mathbf{u}^{(e)T} \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dV_e \mathbf{u}^{(e)} + \delta \mathbf{u}^{(e)T} \int_{V_e} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} dV_e \ddot{\mathbf{u}}^{(e)} + \delta \mathbf{u}^{(e)T} \int_{V_e} \mathbf{N}^T c \mathbf{N} dV_e \dot{\mathbf{u}}^{(e)} \\ & = \delta \mathbf{u}^{(e)T} \int_{V_e} \mathbf{N}^T \mathbf{p} dV_e + \delta \mathbf{u}^{(e)T} \int_{S_e} \mathbf{N}^T \mathbf{q} dS_e \end{aligned}$$

Como os deslocamentos virtuais são quaisquer, podem ser cancelados na expressão anterior, para obter o sistema das equações de movimento do elemento:

$$\begin{aligned} & \left(\int_{V_e} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} dV_e \right) \ddot{\mathbf{u}}^{(e)} + \left(\int_{V_e} \mathbf{N}^T c \mathbf{N} dV_e \right) \dot{\mathbf{u}}^{(e)} + \left(\int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dV_e \right) \mathbf{u}^{(e)} \\ & = \int_{V_e} \mathbf{N}^T \mathbf{p} dV_e + \int_{S_e} \mathbf{N}^T \mathbf{q} dS_e \end{aligned} \quad (5-3.18)$$

Logo, com as notações:

$$\mathbf{M}^{(e)} = \int_{V_e} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} dV_e \quad (5-3.19)$$

$$\mathbf{C}^{(e)} = \int_{V_e} \mathbf{N}^T \mathbf{c} \mathbf{N} dV_e. \quad (5-3.20)$$

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dV_e \quad (5-3.21)$$

$$\mathbf{f}^{(e)}(t) = \int_{V_e} \mathbf{N}^T \mathbf{p}(t) dV_e + \int_{S_e} \mathbf{N}^T \mathbf{q}(t) dS_e \quad (5-3.22)$$

o referido sistema apresenta-se como na Equação 5-1.1, que se repete por conveniência:²²

$$\mathbf{M}^{(e)} \ddot{\mathbf{u}}^{(e)}(t) + \mathbf{C}^{(e)} \dot{\mathbf{u}}^{(e)}(t) + \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)}(t) = \mathbf{f}^{(e)}(t) \quad (5-3.23)$$

Nesse sistema, $\mathbf{f}^{(e)}(t)$ é o vetor das *forças nodais equivalentes* às ações aplicadas ao elemento.

Em elemento finito plano, as notações V_e e S_e passam a denotar, respectivamente, a área e a linha de contorno do elemento, que, em elemento unidimensional, degeneram-se, respectivamente, no segmento de linha de idealização do elemento e em seus pontos nodais (extremos). Assim, no caso do elemento de viga em flexão, as Equações 5-3.19, 5-3.20, 5-3.21 e 5-3.22 têm seus coeficientes de posição (i, j) expressos por:

$$m_{ijL}^{(e)} = \int_0^\ell N_i m' N_j dx \quad (5-3.24)$$

$$c_{ijL}^{(e)} = \int_0^\ell N_i c N_j dx \quad (5-3.25)$$

$$k_{ijL}^{(e)} = \int_0^\ell N_i E I_{xx} N_j dx \quad (5-3.26)$$

$$f_{iL}^{(e)} = \int_0^\ell N_i p dx \quad (5-3.27)$$

em que m' é a massa por unidade de comprimento e p é a força uniformemente distribuída no sentido positivo do deslocamento transversal u .

Logo, podem ser obtidas as seguintes matrizes de massa consistente dos elementos de barra reta de seção transversal constante:

a) Treliça plana:

$$\mathbf{M}_L^{(e)} = \frac{m' \ell}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ \cdot & 2 & 0 & 1 \\ \cdot & \cdot & 2 & 0 \\ \text{sim.} & \cdot & \cdot & 2 \end{bmatrix} \quad (5-3.28)$$

²² As integrações dessas matrizes são usualmente levadas a efeito com o *método de integração de Gauss*. E devido à dificuldade de especificação do coeficiente de amortecimento viscoso, é prático construir diretamente a matriz de amortecimento global, como será apresentado na Seção 6-3.

b) Treliça espacial:

$$\mathbf{M}_L^{(e)} = \frac{m'l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & 2 & 0 & 0 & 1 \\ & & & 2 & 0 & 0 \\ & & & & 2 & 0 \\ \text{sim.} & & & & & 2 \end{bmatrix} \quad (5-3.29)$$

c) Viga:

$$\mathbf{M}_L^{(e)} = \frac{m'\ell}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22\ell & 54 & -13\ell \\ \cdot & 4\ell^2 & 13\ell & -3\ell^2 \\ \cdot & \cdot & 156 & -22\ell \\ \text{sim.} & \cdot & \cdot & 4\ell^2 \end{bmatrix} \quad (5-3.30)$$

d) Pórtico plano:

$$\mathbf{M}_l^{(c)} = \frac{m'\ell}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ . & 156 & 22\ell & 0 & 54 & -13\ell \\ . & . & 4\ell^2 & 0 & 13\ell & -3\ell^2 \\ . & . & . & 140 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & 156 & -22\ell \\ \text{sim.} & . & . & . & . & 4\ell^2 \end{bmatrix} \quad (5-3.31)$$

e) Grelha:

$$\mathbf{M}_L^{(e)} = \frac{m'\ell}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & -22\ell & 54 & 0 & 13\ell \\ \cdot & 140\text{J/A} & 0 & 0 & 70\text{J/A} & 0 \\ \cdot & \cdot & 4\ell^2 & -13\ell & 0 & -3\ell^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 156 & 0 & 22\ell \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 140\text{J/A} & 0 \\ \text{sim.} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 4\ell^2 \end{bmatrix} \quad (5-3.32)$$

f) Pórtico espacial:

[illegible]

Como o uso de matriz de massa diagonal tem vantagem em processamento automático, *Hinton et al.*²³ apresentaram o seguinte procedimento de obtenção desse tipo de matriz:

- Determinação da matriz de massa consistente do elemento.
- Cálculo da massa total do elemento.
- Soma dos coeficientes diagonais daquela matriz associados aos componentes de deslocamento de translação do elemento.
- Multiplicação dos coeficientes diagonais da matriz de massa consistente pela massa total dividida pelo resultado dessa soma.

Os coeficientes diagonais assim obtidos conservam a massa translacional do elemento e constituem a matriz de massa diagonal procurada. Esse procedimento é particularmente útil com elementos finitos bi e tridimensionais, quando então conduz a excelentes resultados. E no caso do elemento de viga fornece a seguinte matriz diagonal:

$$\mathbf{M}_L^{(e)} = \frac{m'\ell}{78} \begin{bmatrix} 39 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \ell^2 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & 39 & 0 \\ \text{sim.} & \cdot & \cdot & \ell^2 \end{bmatrix} \quad (5-3.34)$$

A partir desse resultado podem ser obtidas novas matrizes de massa discreta para os demais elementos de barra, com a consideração da massa $m'\ell/2$ na direção longitudinal e/ou a inércia de torção $m'\ell/24$, em cada extremidade de elemento.

Nos chamados *elementos isoparamétricos*, além da interpolação dos deslocamentos nodais, faz-se interpolação das coordenadas nodais com as mesmas funções, o que permite obter formas distorcidas, como ilustra a [Figura 5-3.3](#).²⁴ Essas funções de interpolação são escritas em coordenadas normalizadas $\xi\eta\zeta$, na forma regular (não distorcida) denominada *elemento mestre*, e a forma distorcida é obtida por mapeamento desse elemento no referencial global XYZ.

²³ Hinton, E., Rock, T. & Zienkiewicz, O.C., 1977, *A Note on Mass Lumping and Related Processes in the Finite Element Method*, Earthquake Engineering Structural Dynamics, vol. 4, n°3, pp. 245-249.

²⁴ Essa interpolação de coordenadas nodais foi sugerida no artigo: Irons, B. M., 1966, *Engineering Applications of Numerical Integration in Stiffness Methods*, AIAA Journal, vol. 4, n°11, pp. 2035-2037. E as correspondentes matrizes de rigidez e de massa são obtidas através de integração de Gauss, sendo aconselhável, por questão de representação de campo, utilizar elementos próximos de suas formas regulares (triângulos, quadriláteros, tetraedros e hexaedros, com arestas e ângulos internos não muito diferentes entre si).

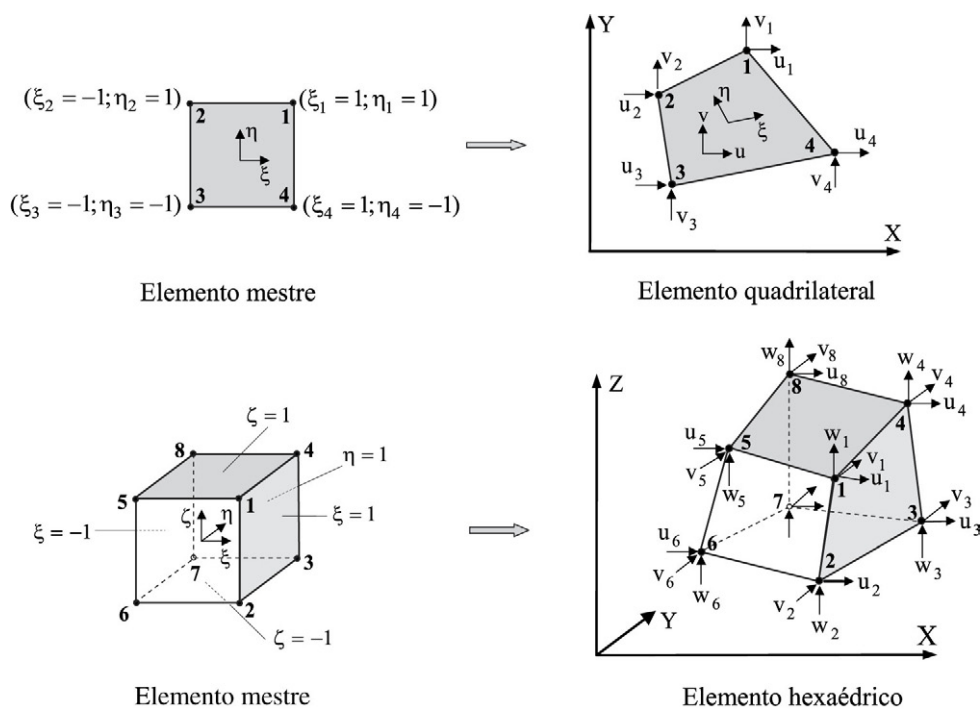


FIGURA 5-3.3 Exemplos de elementos finitos isoparamétricos.

5-4 SISTEMA GLOBAL DAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

Em capítulos anteriores e para diversos modelos de um e de dois graus de liberdade, as equações diferenciais de movimento foram obtidas com a suposição de forças de inércia e a identificação de diagramas de corpo livre. Com o *Método dos Elementos Finitos* podem ser feitas discretizações com um número qualquer de graus de liberdade, de maneira a obter o correspondente sistema de equações diferenciais de movimento. Contudo, esse sistema é usualmente construído a partir das matrizes de rigidez e de massa, assim como dos vetores de forças nodais, dos diversos elementos finitos da discretização, por acumulação adequada dos correspondentes coeficientes que dizem respeito a cada um dos deslocamentos nodais da malha de elementos, de maneira a obter as chamadas matrizes globais de rigidez e de massa, assim como obter o vetor global de forças nodais.²⁵

O objetivo desta seção é apresentar, para uso em procedimento automático, essa construção do sistema global das equações de movimento. Para isso, é importante inicialmente

²⁵ A compreensão dessa construção requer sólida formação em formulação matricial e é essencial para o desenvolvimento de programações automáticas, mas não fundamental para o uso dessas programações, quando então o importante é o conhecimento das características dos elementos utilizados, do conceito de compatibilidade de deslocamentos em interfaces de elementos, da adequação dos vínculos que tornem o modelo estável e do adequado refinamento para se obterem resultados acurados.

esclarecer que, em modelos de estruturas, há duas classes de condições de contorno, as *geométricas* e as *naturais*.²⁶ As condições geométricas, também chamadas de *cinemáticas* ou *essenciais*, dizem respeito aos deslocamentos prescritos, nulos ou não, em parte do contorno do modelo. São as “condições de apoio da estrutura”, consideradas de forma discreta posteriormente à construção do sistema global das equações de movimento.

As condições naturais, também chamadas de *mecânicas* ou *não essenciais*, dizem respeito às forças externas na parte do contorno em que não há prescrição de condições geométricas de contorno. Constituem o “carregamento da estrutura”.²⁷ Essas condições, quando aplicadas em lados ou faces de elemento, são levadas em conta através do vetor das forças nodais equivalentes do elemento e, portanto, ficam incorporadas quando da construção do sistema global das equações de movimento. Já forças nodais diretamente aplicadas em pontos nodais são consideradas posteriormente à formação desse sistema.

Como ilustração de obtenção de uma matriz de rigidez global, considera-se a viga contínua representada na [Figura 5-4.1](#), em que os sentidos dos referenciais locais e global são escolhidos coincidentes. Cada um dos vãos dessa viga é considerado como um elemento, e os elementos e pontos nodais são numerados da esquerda para a direita, como mostrado.

Anteriormente foi esclarecido que um coeficiente de rigidez k_{ij} é numericamente igual à força restritiva (ou ao momento restritivo) na direção do i -ésimo deslocamento nodal (de translação ou de rotação), quando se impõe, de forma estática, valor unitário ao j -ésimo deslocamento e se mantêm com valores nulos os demais deslocamentos nodais. Além disso, como no presente caso os sentidos de cada referencial local de elemento e do referencial global da viga são coincidentes, não há necessidade de transformações entre referenciais.

A figura anterior mostra também que um deslocamento de nó de interface entre dois elementos da viga afeta apenas os elementos circunvizinhos. Assim, na obtenção da matriz de rigidez global, basta somar os coeficientes de rigidez relativos aos deslocamentos da extremidade direita de cada um dos elementos com os coeficientes de rigidez relativos aos deslocamentos da extremidade esquerda do elemento consecutivo. Logo, chega-se à seguinte matriz, em que o asterisco como sobrescrito na notação é utilizado para indicar que os coeficientes correspondentes às condições geométricas de contorno estão incluídos na matriz:

$$\mathbf{K}^* = \begin{bmatrix} k_{11G}^{(1)} & k_{12G}^{(1)} & k_{13G}^{(1)} & k_{14G}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & k_{22G}^{(1)} & k_{23G}^{(1)} & k_{24G}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & k_{33G}^{(1)} + k_{11G}^{(2)} & k_{33G}^{(1)} + k_{12G}^{(2)} & k_{13G}^{(2)} & k_{14G}^{(2)} & 0 & 0 \\ . & . & . & k_{44G}^{(1)} + k_{22G}^{(2)} & k_{23G}^{(2)} & k_{24G}^{(2)} & 0 & 0 \\ . & . & . & . & k_{33G}^{(2)} + k_{11G}^{(3)} & k_{34G}^{(2)} + k_{12G}^{(3)} & k_{13G}^{(3)} & k_{14G}^{(3)} \\ . & . & . & . & . & k_{44G}^{(2)} + k_{22G}^{(3)} & k_{23G}^{(3)} & k_{24G}^{(3)} \\ . & . & . & . & . & . & k_{33G}^{(3)} + k_{11G}^{(4)} & k_{34G}^{(3)} + k_{12G}^{(4)} \\ . & . & . & . & . & . & . & k_{44G}^{(3)} + k_{22G}^{(4)} \\ \text{sim.} & . & . & . & . & . & . & \ddots \end{bmatrix}$$

(5-4.1)

²⁶ O procedimento de obtenção da matriz de massa global e do vetor global de forças nodais é semelhante ao de matriz de rigidez. Com matriz de matrizes de massa consistentes de elementos, a matriz de massa global tem a mesma esparsidade que a matriz de rigidez global. Com matrizes de massa discretas, a matriz de rigidez global é diagonal e costuma ter parte dos coeficientes diagonais nulos. E os deslocamentos nodais correspondentes a esses coeficientes são denominados *graus de liberdade dinâmicos*.

²⁷ Forças de volume não são condições de contorno.

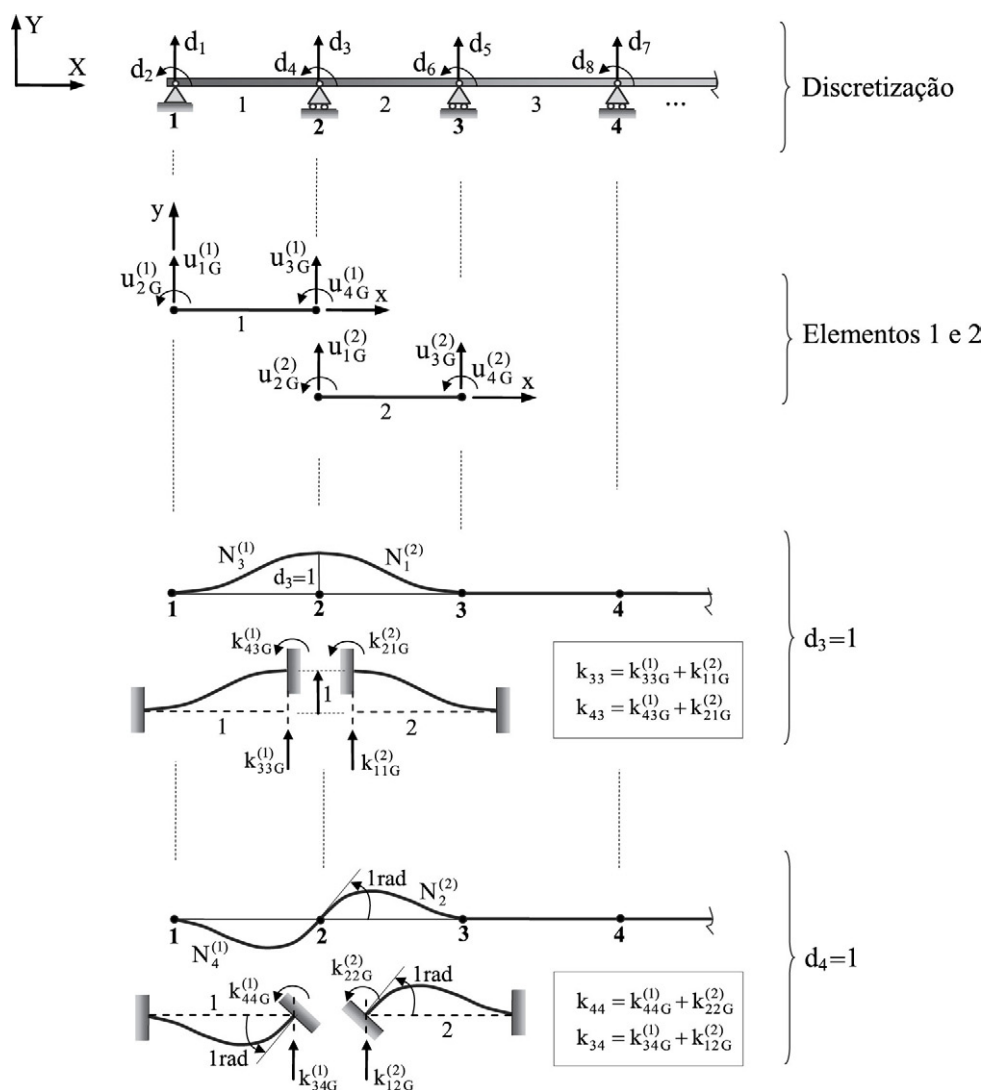


FIGURA 5-4.1 Obtenção dos coeficientes de rigidez do nó de interface dos elementos 1 e 2.

Identifica-se na matriz anterior um grande número de coeficientes nulos, o que caracteriza uma *matriz esparsa* e é vantajosamente utilizado em programas automáticos com o objetivo de reduzir armazenamento de coeficientes e operações numéricas. E nessa matriz, a j -ésima coluna representa numericamente as forças de equilíbrio quando se faz ($d_j = 1$) e se mantêm nulos todos os demais deslocamentos nodais. Consequentemente, a soma dos coeficientes de cada coluna dessa matriz é igual a zero e, por condições de simetria, o resultado da soma dos coeficientes de cada linha é também nulo.

Em modelo com diversos elementos em posições quaisquer, a construção das matrizes de rigidez e de massa, globais, assim como do vetor global de forças nodais, é muito elaborada para ser levada a efeito manualmente. Isso porque não é prático trabalhar com matrizes em

procedimento manual e não se tem uma regra simples de acumulação dos coeficientes das matrizes e vetores dos elementos. Contudo, é simples desenvolver um algoritmo para essa construção em procedimento automático. Para isso, a localização de cada elemento de um modelo discreto é definida através de uma correspondência entre a numeração local dos pontos nodais elemento e a numeração global dos pontos nodais do modelo. Essa correspondência é expressa por uma *matriz de incidência* ou *topológica*, presentemente denotada por \mathbf{I} e que contém, em cada linha, a numeração global dos pontos nodais do elemento de mesma ordem que a linha.

Como exemplificação, considera-se o pórtico mostrado na [Figura 5-4.2](#) em que a terceira linha da referida matriz, ($\mathbf{I}_{31} = 4$) e ($\mathbf{I}_{32} = 2$), especifica que o terceiro elemento do modelo tem, na numeração global, o de número 4 como primeiro ponto nodal e o de número 2 como segundo ponto nodal. Consequentemente, como os eixos locais z e o eixo global Z devem ter o mesmo sentido, o eixo x daquele elemento fica estabelecido de baixo para cima e o eixo y , da direita para a esquerda, como mostrado na mesma figura.

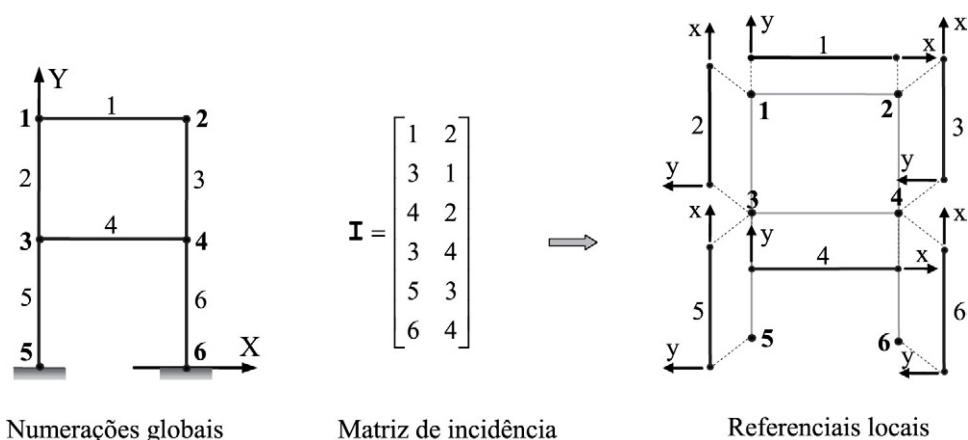


FIGURA 5-4.2 Conectividade e referenciais locais dos elementos de um pórtico plano.

Para o mesmo pórtico, após a transformação dos referenciais locais ao referencial global, os deslocamentos nodais dos dois primeiros elementos do pórtico anterior ficam como ilustra a [Figura 5-4.3](#) que também mostra a obtenção dos coeficientes de rigidez relativos a deslocamentos unitários impostos ao primeiro ponto nodal.

Assim, estabelecidos a localização e os deslocamentos nodais de cada elemento no referencial global, é simples identificar a correspondência desses deslocamentos com a numeração global dos deslocamentos nodais. Como os deslocamentos são numerados na sequência dos pontos nodais, na numeração global, a ordem do primeiro deslocamento em cada ponto nodal é igual ao número de deslocamentos nodais anteriores mais uma unidade, o próximo deslocamento no mesmo ponto é igual a esse número mais 2, e o consecutivo

deslocamento é igual a esse último número mais 3. Isso é ilustrado na [Figura 5-4.4](#) no caso do terceiro elemento do pórtico anterior, em que os pontos nodais 1 e 2 do elemento correspondem, respectivamente, aos pontos 4 e 2 na numeração global de pontos nodais.

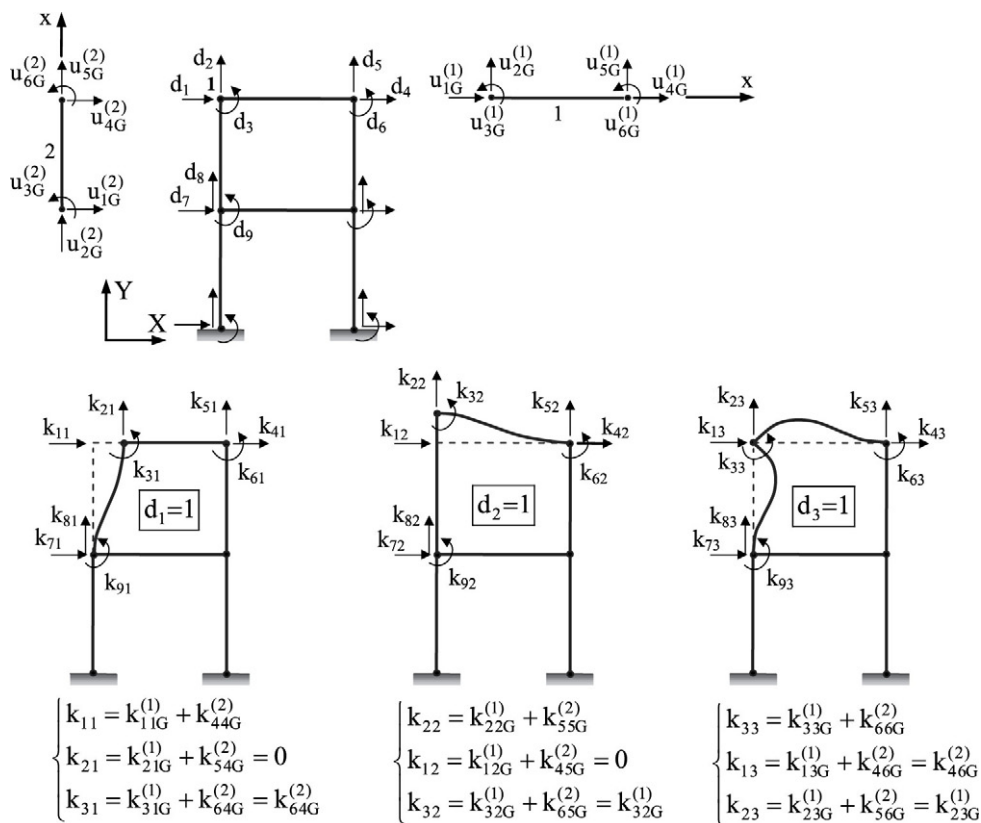


FIGURA 5-4.3 Obtenção de coeficientes de rigidez do pórtico da figura anterior.

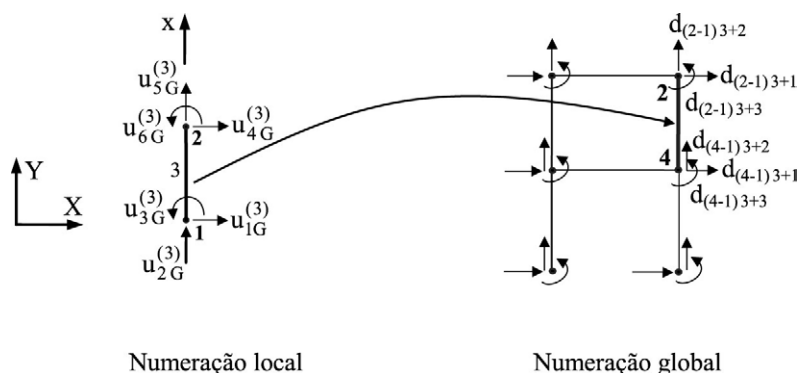


FIGURA 5-4.4 Correspondência dos deslocamentos nodais do terceiro elemento do pórtico anterior.

Ainda quanto à correspondência entre as numerações locais e globais de deslocamentos, a Figura 5-4.5 seguinte mostra o e-ésimo elemento finito (triangular) de uma malha de estado plano, em que os deslocamentos nodais são no referencial global. Os pontos nodais 1, 2 e 3 do elemento correspondem, respectivamente, aos pontos 6, 9 e 5 da numeração global dos pontos nodais, o que é especificado pela e-ésima linha da matriz de incidência, isto é, $(\mathbf{I}_{e1} = 6)$, $(\mathbf{I}_{e2} = 9)$ e $(\mathbf{I}_{e3} = 5)$.

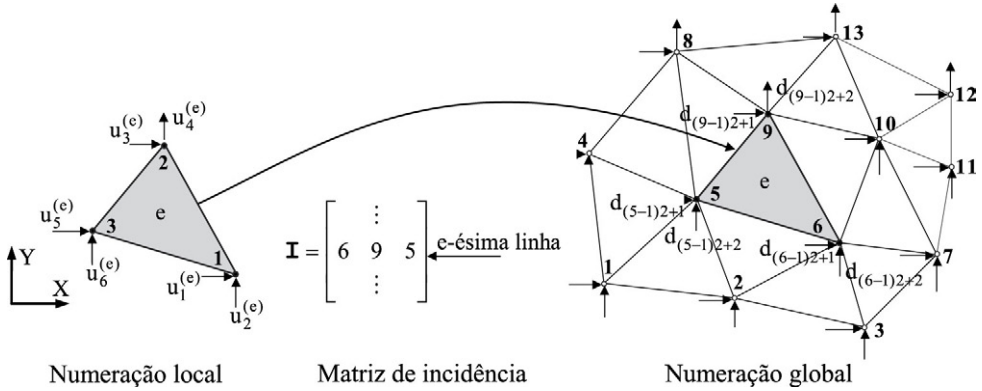


FIGURA 5-4.5 Correspondência dos deslocamentos nodais de um elemento finito triangular.

Tem-se, assim, que a ordem do primeiro deslocamento em cada ponto nodal da malha é igual ao total dos deslocamentos nodais que lhe antecede, mais uma unidade, e que o deslocamento consecutivo no mesmo ponto é simplesmente a ordem do deslocamento anterior mais 1. Tem-se, também, que os deslocamentos nodais de cada elemento são armazenados em um vetor, que no caso do elemento triangular anterior se escreve sob a forma expandida:

$$\mathbf{u}^{(e)} = \begin{bmatrix} u_1^{(e)} & u_2^{(e)} & u_3^{(e)} & u_4^{(e)} & u_5^{(e)} & u_6^{(e)} \end{bmatrix}^T \quad (5-4.2)$$

Logo, com a notação g designativa do número de deslocamentos por ponto nodal, tem-se a seguinte correspondência entre a numeração local dos deslocamentos nodais do referido e-ésimo elemento e a numeração global de deslocamentos, que é ilustrada na Figura 5-4.5 no caso do estado plano em que $(g = 2)$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_1^{(e)} \rightarrow d_{(6-1)g+1} \equiv d_{(\mathbf{I}_{e,1}-1)g+1} \\ u_2^{(e)} \rightarrow d_{(6-1)g+2} \equiv d_{(\mathbf{I}_{e,1}-1)g+2} \\ u_3^{(e)} \rightarrow d_{(9-1)g+1} \equiv d_{(\mathbf{I}_{e,2}-1)g+1} \\ u_4^{(e)} \rightarrow d_{(9-1)g+2} \equiv d_{(\mathbf{I}_{e,2}-1)g+2} \\ u_5^{(e)} \rightarrow d_{(5-1)g+1} \equiv d_{(\mathbf{I}_{e,3}-1)g+1} \\ u_6^{(e)} \rightarrow d_{(5-1)g+2} \equiv d_{(\mathbf{I}_{e,3}-1)g+2} \end{array} \right. \quad (5-4.3)$$

Finalmente, para a construção do citado algoritmo, as informações anteriores são armazenadas no *vetor de correspondência de deslocamentos*:

$$\mathbf{q} = \left[(\mathbf{I}_{e,1} - 1)g + 1 \quad (\mathbf{I}_{e,1} - 1)g + 2 \quad (\mathbf{I}_{e,2} - 1)g + 1 \quad (\mathbf{I}_{e,2} - 1)g + 2 \quad (\mathbf{I}_{e,3} - 1)g + 1 \quad (\mathbf{I}_{e,3} - 1)g + 2 \right]^T \quad (5-4.4)$$

em que o i -ésimo coeficiente especifica a numeração global do i -ésimo deslocamento na numeração local do e -ésimo elemento do modelo discreto.

Vetores do tipo anterior contêm todas as informações para se proceder à acumulação das contribuições dos sistemas de equações de movimento dos elementos do modelo discreto, no sistema global das equações de movimento. Isto é, esses vetores têm a informação de que o coeficiente de posição (i, j) da matriz de rigidez (e de massa) de cada elemento deve ser acumulado na posição (q_i, q_j) da matriz global de rigidez (e de massa), como ilustra a [Figura 5-4.6](#).

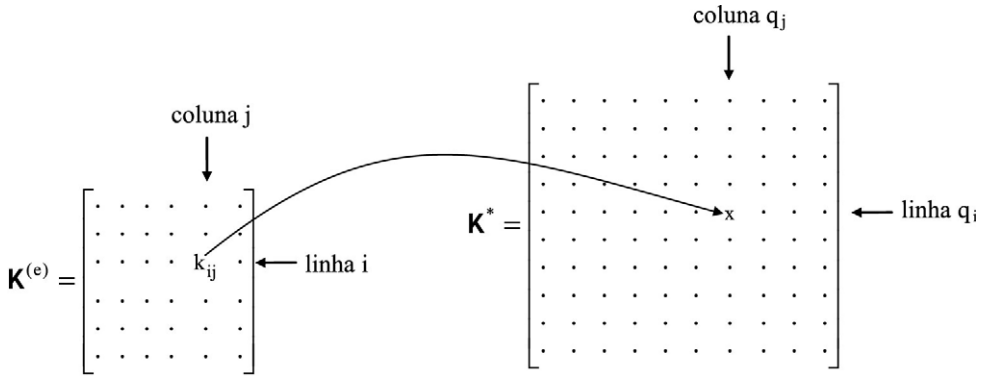


FIGURA 5-4.6 Correspondência entre posições de coeficiente das matrizes de rigidez local e global.

Assim, a construção das matrizes globais \mathbf{K}^* , \mathbf{M}^* e \mathbf{f}^* pode ser feita de acordo com o Algoritmo 5-4.1, que se aplica a discretizações em um número qualquer de elementos de um número qualquer de pontos nodais, com um número qualquer de deslocamentos nodais por ponto. Forças externas aplicadas em lados e faces de elementos foram consideradas como forças nodais equivalentes. Já as forças concentradas segundo grau de liberdade são adicionadas diretamente nas correspondentes posições dos termos independentes do sistema global das equações de movimento, assim como massas concentradas que devem ser adicionadas diretamente em posições diagonais de \mathbf{M}^* .

Chega-se, assim, ao sistema global das equações de movimento:

$$\mathbf{M}^* \ddot{\mathbf{d}}^*(t) + \mathbf{C}^* \dot{\mathbf{d}}^*(t) + \mathbf{K}^* \mathbf{d}^*(t) = \mathbf{f}^*(t) \quad (5-4.5)$$

em que $\ddot{\mathbf{d}}^*$, $\dot{\mathbf{d}}^*$, \mathbf{d}^* e \mathbf{f}^* são os vetores, respectivamente, de acelerações, velocidades, deslocamentos e forças externas, em que todos os coeficientes são nodais e na numeração global.

No sistema anterior estão incluídas as equações associadas às condições geométricas de contorno. Portanto, o vetor \mathbf{d}^* inclui os deslocamentos nodais livres (que são os graus

de liberdade) e os deslocamentos restringidos pelos apoios, o que faz com que a matriz de rigidez \mathbf{K}^* seja singular e o sistema seja chamado de *não restringido*.

– Definição das características dos elementos e da discretização.

- $e = 1, 2, \dots$ até o número total de elementos da discretização
 - Cálculo das matrizes $\mathbf{K}_G^{(e)}$, $\mathbf{M}_G^{(e)}$ e $\mathbf{f}_G^{(e)}$ em rotinas separadas deste algoritmo.
 - $\mathbf{z} = 0$, $\mathbf{K}^* = \mathbf{0}$, $\mathbf{M}^* = \mathbf{0}$, $\mathbf{f}^* = \mathbf{0}$
 - $i = 1, 2, \dots$ até o número de pontos nodais do e-ésimo elemento
 - $j = 1, 2, \dots g$
 - $\mathbf{z} = \mathbf{z} + 1$
 - $q_z = (\mathbf{I}_{ei} - 1)g + j$
 - $i = 1, 2, \dots$ até o número de deslocamentos nodais do e-ésimo elemento
 - $j = 1, 2, \dots$ até o número de deslocamentos nodais do e-ésimo elemento
 - $\mathbf{K}_{q_i q_j}^* = \mathbf{K}_{q_i q_j}^* + \mathbf{K}_{ijG}^{(e)}$
 - $\mathbf{M}_{q_i q_j}^* = \mathbf{M}_{q_i q_j}^* + \mathbf{m}_{ijG}^{(e)}$
 - Acumulação de constantes de apoios elásticos em posições diagonais de \mathbf{K}^* e de massas concentradas em posições diagonais de \mathbf{M}^* .
 - $i = 1, 2, \dots$ até o número de deslocamentos nodais do e-ésimo elemento
 - $\mathbf{f}_{q_i}^* = \mathbf{f}_{q_i}^* + \mathbf{f}_{iG}^{(e)}$
 - Acumulação em \mathbf{f}^* das forças externas diretamente aplicadas nos pontos nodais.

ALGORITMO 5-4.1 Construção das matrizes \mathbf{K}^* , \mathbf{M}^* e \mathbf{f}^* .

Há várias formas de levar em conta as condições geométricas de contorno. A mais simples, didaticamente, é ordenar os deslocamentos nodais livres em primeiro lugar e agrupá-los em um vetor \mathbf{d} , seguidos dos deslocamentos restringidos que são considerados em um vetor \mathbf{d}_b , de maneira a se ter o sistema das equações de movimento sob a forma repartida:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{M}_b \\ \mathbf{M}_b^T & \mathbf{M}_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{d}}(t) \\ \ddot{\mathbf{d}}_b(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{C}_b \\ \mathbf{C}_b^T & \mathbf{C}_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{d}}(t) \\ \dot{\mathbf{d}}_b(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{K}_b \\ \mathbf{K}_b^T & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}(t) \\ \mathbf{d}_b(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}(t) \\ \mathbf{f}_b(t) \end{Bmatrix} \quad (5-4.6)$$

Assim, $\ddot{\mathbf{d}}_b$, $\dot{\mathbf{d}}_b$ e \mathbf{f}_b são os vetores, respectivamente, das acelerações, velocidades e forças nodais segundo os deslocamentos restringidos, isto é, da base do modelo.

No caso particular de apoios indeslocáveis, têm-se ($\ddot{\mathbf{d}}_b = \mathbf{0}$), ($\dot{\mathbf{d}}_b = \mathbf{0}$) e ($\mathbf{d}_b = \mathbf{0}$), de maneira a obter, a partir da expressão anterior, o denominado *sistema global restringido* em que a matriz de rigidez \mathbf{K} é não singular, positiva definida, e dita *restringida*:²⁸

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{d}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{d}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (5-4.7)$$

A etapa central de determinação de reposta dinâmica é a resolução desse sistema, que fornece as soluções $\mathbf{d}(t_i)$, $\dot{\mathbf{d}}(t_i)$ e $\ddot{\mathbf{d}}(t_i)$, em uma sequência de instantes. Além disso, com base nos deslocamentos $\mathbf{d}(t_i)$, podem ser identificados os deslocamentos nodais $\mathbf{u}_G^{(e)}(t_i)$ de cada elemento do modelo, a partir dos quais podem ser determinados os esforços seccionais e/ou os componentes de tensão, como se tratasse de análise estática. Assim, os esforços seccionais nas extremidades dos elementos de barra são obtidos por:

$$\mathbf{f}_{LF}^{(e)}(t_i) = \mathbf{K}_L^{(e)} \mathbf{R}^{(e)} \mathbf{u}_G^{(e)}(t_i) - \mathbf{f}_L^{(e)}(t_i) \quad (5-4.8)$$

Já em elemento finito bi ou tridimensional, os componentes de tensão em cada ponto do elemento são obtidos como expresso na Equação 5-3.11, que se repete por conveniência:²⁹

$$\boldsymbol{\sigma}(t_i) = \mathbf{E} \mathbf{B} \mathbf{u}^{(e)}(t_i) \quad (5-4.9)$$

É oportuno observar que, no caso estático, o sistema expresso na Equação 5-4.7 particulariza-se na forma ($\mathbf{K}\mathbf{d} = \mathbf{f}$) que permite escrever a energia potencial de deformação elástica linear:³⁰

$$E_{pe} = \frac{1}{2} \mathbf{f}^T \mathbf{d} = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{K} \mathbf{d} \rightarrow E_{pe} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij} d_i d_j \quad (5-4.10)$$

5-5 FREQUÊNCIAS E MODOS NATURAIS DE VIBRAÇÃO

Frequências e modos naturais de vibração têm grande importância em análise dinâmica de modelo de estrutura de comportamento linear, são *características dinâmicas* do modelo e, em caso de dois graus de liberdade, foram apresentadas no capítulo anterior. Na presente seção, faz-se uma apresentação rigorosa da questão, cuja resolução computacional será desenvolvida no Capítulo 9.

²⁸ A simulação das condições geométricas de contorno pode ser feita também através de apoios elásticos de grande rigidez, o que não requer que os graus de liberdade sejam numerados em primeiro lugar. Formulação com movimentos de apoios será desenvolvida na Seção 8-5.

²⁹ Nessa expressão, não se indicou referencial para os deslocamentos nodais porque, dependendo do modelo, se utiliza na formulação do elemento o referencial local ou o global. Com a particularização da matriz \mathbf{B} em cada ponto nodal, obtêm-se os componentes nodais de tensão no correspondente. E como o campo de deslocamentos foi arbitrado em cada elemento independentemente dos demais, ocorre descontinuidade de tensão nas interfaces dos elementos, o que requer um procedimento de eliminação dessas descontinuidades em etapa de pós-processamento, como através de médias aritméticas de valores nodais, por exemplo.

³⁰ Como essa energia é sempre positiva, em caso de deslocamentos nodais quaisquer em uma estrutura adequadamente vinculada, tem-se que $\mathbf{d}^T \mathbf{K} \mathbf{d} > 0$ e, consequentemente, a matriz de rigidez é *positiva-definida*.

Em caso de *vibração livre não amortecida*, o sistema expresso na Equação 5-4.7 particulariza-se em:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{d}(t) = \mathbf{0} \quad (5-5.1)$$

Com o pressuposto de que seja dada uma perturbação inicial ao modelo, tem-se, de forma semelhante ao caso de dois graus de liberdade, a solução harmônica de deslocamentos nodais:

$$\mathbf{d}(t) = \hat{\boldsymbol{\phi}}_j \cos(\omega_j t - \phi_j) \quad (5-5.2)$$

Nesta solução, $\hat{\boldsymbol{\phi}}_j$ é o i -ésimo *modo natural de vibração*, ω_j é a correspondente *frequência natural* de vibração livre e ϕ_j é o correspondente *ângulo de fase*.

A substituição da solução anterior na Equação 5-5.1 conduz ao sistema de n equações algébricas homogêneas:

$$(-\mathbf{M}\omega_j^2 + \mathbf{K})\hat{\boldsymbol{\phi}}_j \cos(\omega_j t - \phi_j) = \mathbf{0}$$

que só tem solução não singular no caso de:

$$(\mathbf{K} - \omega_j^2 \mathbf{M})\hat{\boldsymbol{\phi}}_j = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \mathbf{K}\hat{\boldsymbol{\phi}}_j = \omega_j^2 \mathbf{M}\hat{\boldsymbol{\phi}}_j \quad (5-5.3)$$

Essa equação expressa um problema de autovalor generalizado de n soluções não triviais $(\omega_j^2, \hat{\boldsymbol{\phi}}_j)$, em que ω_j^2 é autovalor e $\hat{\boldsymbol{\phi}}_j$ é autovetor. A solução trivial não corresponde a deslocamento.

Com n graus de liberdade, têm-se igual número de autopares $(\omega_j, \hat{\boldsymbol{\phi}}_j)$ que são numerados na ordem crescente da grandeza das frequências, que são positivas em caso de haver suficientes restrições para impedir os deslocamentos de corpo rígido e a formação de mecanismos internos à estrutura.³¹ A primeira frequência é referida como *fundamental* e o primeiro modo natural de vibração, como *modo fundamental*.

A Equação 5-5.2 expressa que todos os graus de liberdade executam movimento harmônico característico de um modo de vibração na correspondente frequência natural. Isto é, uma vez que um modelo de estrutura seja deformado segundo o seu j -ésimo modo natural de vibração e se retirem as restrições externas que imponham esse modo, o modelo passa a vibrar em movimento harmônico simples na j -ésima frequência natural e mantém esse modo ao longo do tempo. Assim, as frequências naturais e os modos naturais de vibração independem das forças externas, como funções apenas das distribuições de massa e de rigidez do modelo.³²

É útil agrupar as frequências naturais na *matriz espectral*:

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega_n^2 \end{bmatrix} \quad (5-5.4)$$

³¹ Como \mathbf{K} e \mathbf{M} são matrizes simétricas, os autovalores são reais. Em caso da matriz \mathbf{K} ser não restringida, há autovalores nulos em número igual ao de deslocamentos de corpo rígido do modelo.

³² Os modos naturais de vibração foram identificados pelo matemático francês Joseph Souveur (1653-1716).

e reunir os modos de vibração na matriz modal:

$$\hat{\Phi} = \begin{bmatrix} \hat{\Phi}_1 & \hat{\Phi}_2 & \cdots & \hat{\Phi}_n \end{bmatrix} \quad (5-5.5)$$

Com essas matrizes, o problema de autovalor anterior toma a nova forma

$$\mathbf{K} \hat{\Phi} = \mathbf{M} \hat{\Phi} \Omega \quad (5-5.6)$$

cujas resolução é denominada *análise modal*.³³

Os modos naturais de vibração têm a propriedade de ortogonalidade em relação às matrizes de rigidez e de massa, o que pode ser identificado multiplicando-se a equação anterior por $\hat{\Phi}^T$, com a obtenção de $((\hat{\Phi}^T \mathbf{K} \hat{\Phi}) = (\hat{\Phi}^T \mathbf{M} \hat{\Phi}) \Omega)$. E como as matrizes de rigidez e de massa são simétricas, os resultados dos produtos matriciais entre os parênteses internos dessa expressão também o são, o que só é possível em caso de os produtos $\hat{\Phi}^T \mathbf{K} \hat{\Phi}$ e $\hat{\Phi}^T \mathbf{M} \hat{\Phi}$ serem diagonais, o que comprova a referida ortogonalidade.

As amplitudes dos modos naturais de vibração são arbitrárias, pelo fato de serem soluções de sistemas de equações algébricas singulares. Somente a razão entre as amplitudes de um mesmo modo é constante, o que implica que cada modo de vibração defina apenas uma forma. E há vários procedimentos de *normalização*, entre os quais o que foi apresentado no capítulo anterior, em que o primeiro coeficiente de cada modo foi estabelecido igual à unidade. Outro procedimento é a imposição de *comprimento euclidiano unitário*.

Em análise dinâmica, a normalização mais vantajosa é em relação à matriz de massa. Para isso, tem-se que a condição de ortogonalidade dos modos de vibração:

$$\hat{\Phi}_i^T \mathbf{M} \hat{\Phi}_j = \begin{cases} m_i & \text{com } i = j \\ 0 & \text{com } i \neq j \end{cases} \quad (5-5.7)$$

em que m_i é a massa generalizada segundo o i -ésimo grau de liberdade, denominada *massa modal*.

Em sequência, para transformar os autovetores não normalizados $\hat{\Phi}_i$ em normalizados de notação Φ_i , escreve-se inicialmente:

$$\hat{\Phi}_i = \alpha_i \Phi_i \quad (5-5.8)$$

com $(i = 1, 2, \dots, n)$ e em que α_i são escalares a serem determinados. Substitui-se, agora, essa equação na que lhe precede, para se ter:

$$\alpha_i \hat{\Phi}_i^T \mathbf{M} \hat{\Phi}_j \alpha_j = \begin{cases} m_i & \text{com } i = j \\ 0 & \text{com } i \neq j \end{cases} \quad (5-5.9)$$

Para obter modos de vibração com a condição de normalização que facilitará a determinação de resposta dinâmica, escreve-se:

$$\Phi_i^T \mathbf{M} \Phi_j = \delta_{ij} \quad (5-5.10)$$

³³ O exame das frequências e dos modos de vibração permite uma interpretação do comportamento do modelo e, consequentemente, do sistema físico ao qual é associado. No caso de modelos simétricos com condições geométricas de contorno simétricas, os modos de vibração dividem-se em *modos simétricos* e *modos antissimétricos*.

δ_{ij} é o *delta de Kronecker* de propriedade: ($\delta_{ij} = 1$) no caso de ($i = j$), e ($\delta_{ij} = 0$) com ($i \neq j$).

Logo, arbitra-se na Equação 5-5.9:

$$\alpha_i = \sqrt{m_i} \quad (5-5.11)$$

de maneira a obter o i -ésimo autovetor normalizado em relação à matriz de massa:

$$\varphi_i = \frac{\hat{\varphi}_i}{\sqrt{m_i}} \rightarrow \varphi_i = \frac{1}{(\hat{\varphi}_i^T \mathbf{M} \hat{\varphi}_i)^{1/2}} \hat{\varphi}_i \quad (5-5.12)$$

Assim, com a matriz modal ($\Phi = [\varphi_1 \ \varphi_2 \ \cdots \ \varphi_n]$), tem-se, a partir da Equação 5-5.10, a diagonalização da matriz de massa:

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi = \mathbf{I} \quad (5-5.13)$$

Diz-se, então, que a matriz modal Φ está ortonormalizada em relação à matriz de massa.

Com essa condição, o problema de autovalor expresso na Equação 5-5.6 passa a ter a notação:

$$\mathbf{K} \Phi = \mathbf{M} \Phi \Omega \quad (5-5.14)$$

Além disso, com a pré-multiplicação dessa última equação por Φ^T , obtém-se:

$$\Phi^T \mathbf{K} \Phi = \Phi^T \mathbf{M} \Phi \Omega \rightarrow \Phi^T \mathbf{K} \Phi = \Omega \quad (5-5.15)$$

$$\rightarrow \begin{cases} \varphi_i^T \mathbf{K} \varphi_i = \omega_i^2 \\ \varphi_i^T \mathbf{K} \varphi_j = 0 \text{ com } i \neq j \end{cases} \quad (5-5.16)$$

EXEMPLO 5-5.1

Para ilustrar o procedimento de normalização dos modos naturais de vibração em relação à matriz de massa, considera-se a discretização de viga da Figura E5-5.1.

A partir das Equações 5-2.4 e 5-2.26 têm-se, respectivamente, as matrizes de rigidez e de massa consistente de cada um dos elementos de viga:

$$\mathbf{K}^{(e)} = 10^7 \begin{bmatrix} 0,75 & 1,5 & -0,75 & 1,5 \\ \cdot & 4 & -1,5 & 2 \\ \cdot & \cdot & 0,75 & -1,5 \\ \text{sim.} & \cdot & \cdot & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}^{(e)} = \begin{bmatrix} 297,14 & 167,62 & 102,86 & -99,048 \\ \cdot & 121,90 & 99,048 & -91,429 \\ \cdot & \cdot & 297,14 & -167,62 \\ \text{sim.} & \cdot & \cdot & 121,90 \end{bmatrix}$$

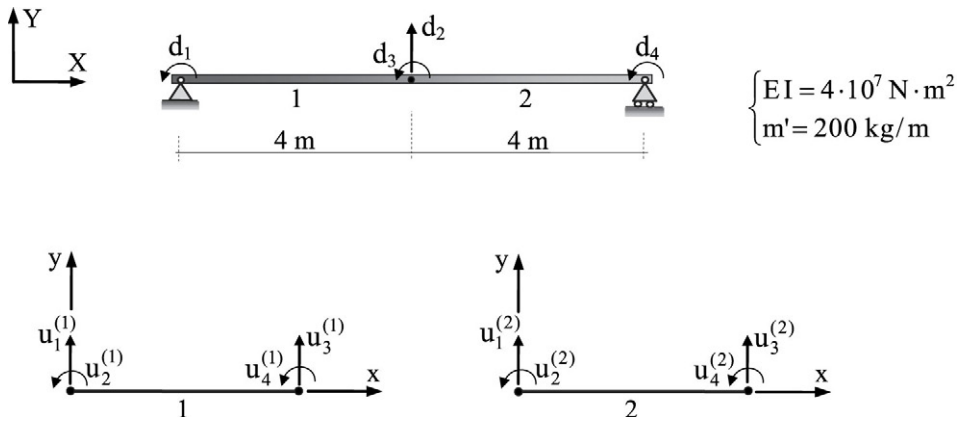


FIGURA E5-5.1 Discretização de viga biapoada em dois elementos.

Com a soma dos coeficientes que dizem respeito aos deslocamentos da extremidade direita do primeiro elemento com os correspondentes coeficientes da extremidade esquerda do segundo elemento, e posterior eliminação dos coeficientes associados aos deslocamentos restringidos pelos apoios, obtêm-se as matrizes globais:

$$\mathbf{K} = 10^7 \begin{bmatrix} 4 & -1,5 & 2 & 0 \\ \cdot & 1,5 & 0 & 1,5 \\ \cdot & \cdot & 8 & 2 \\ \text{sim.} & \cdot & \cdot & 4 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 121,90 & 99,048 & -91,429 & 0 \\ \cdot & 594,29 & 0 & -99,048 \\ \cdot & \cdot & 243,81 & -91,429 \\ \text{sim.} & \cdot & \cdot & 121,90 \end{bmatrix}$$

Logo, a resolução do problema de autovalor ($\mathbf{K}\hat{\Phi} = \mathbf{M}\hat{\Phi}\Omega$), com a condição de que o primeiro coeficiente de cada autovetor seja unitário, fornece:

$$\Omega = \begin{bmatrix} 4,7939 \cdot 10^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9,3751 \cdot 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5,9235 \cdot 10^5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,9689 \cdot 10^6 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\Phi} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2,5471 & 0 & -0,43718 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \hat{\Phi}^T \mathbf{M} \hat{\Phi} = \begin{bmatrix} 601,88 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 284,44 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 84,055 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 40,631 \end{bmatrix}$$

$$e \quad \Phi = \hat{\Phi} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{601,88} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{284,44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{84,055} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{40,631} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \Phi = \begin{bmatrix} 0,013\,991 & 0,034\,233 & 0,073\,683 & 0,090\,573 \\ 0,035\,637 & 0 & -0,032\,213 & 0 \\ 0 & -0,034\,233 & 0 & 0,090\,573 \\ -0,013\,991 & 0,034\,233 & -0,073\,683 & 0,090\,573 \end{bmatrix}$$

Essa matriz verifica as propriedades de M-ortonormalização dos modos de vibração:

$$\Phi^T M \Phi = \begin{bmatrix} \cong 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cong 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cong 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cong 1 \end{bmatrix} \cong I$$

$$\Phi^T K \Phi = \begin{bmatrix} 4,7939 \cdot 10^3 & 0 & \cong 0 & 0 \\ 0 & 9,3751 \cdot 10^4 & 0 & 0 \\ \cong 0 & 0 & 5,9235 \cdot 10^5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,9689 \cdot 10^6 \end{bmatrix} \cong \Omega$$

As aproximações nos resultados anteriores são devidos à aritmética em ponto-flutuante do computador.

As matrizes de rigidez dos elementos de barra foram obtidas a partir das teorias clássicas de tração/compressão, de flexão e de torção, sem aproximações adicionais a essas teorias. Assim, tais matrizes conduzem a forças elásticas exatas (no que diz respeito a essas teorias), independentemente da discretização adotada na análise numérica. Já as matrizes de massa, diagonais (por serem obtidas em procedimento *ad hoc*) ou consistentes (por serem desenvolvidas com as funções de interpolação do campo de deslocamentos), conduzem a forças de inércia aproximadas em relação às referidas teorias, cuja acurácia aumenta à medida que se refina a discretização.³⁴

EXEMPLO 5-5.2

Considere-se a viga biapoada mostrada na [Figura E5-5.2a](#), juntamente com as expressões dos três primeiros modos naturais de vibração e das correspondentes frequências naturais, ambos da *teoria clássica de viga*.³⁵ Soluções com essas expressões são comparadas com resultados numéricos obtidos com discretizações da viga em 3, 5, 9 e 33 pontos nodais igualmente espaçados, nos casos de matrizes de massa discreta sem inércia rotacional e de massa consistente.

³⁴ Os elementos finitos bi e tridimensionais que têm continuidade de deslocamentos através de seus lados e faces são ditos *compatíveis* ou *conformes*. Quando esses elementos são utilizados em formas regulares e suas matrizes de rigidez são calculadas com a *integração de Gauss de forma completa*, o modelo discreto é mais rígido do que o contínuo original. Assim, com esses elementos e matriz de massa consistente, tem-se convergência, por valores superiores, aos resultados exatos de frequências naturais.

³⁵ Vide Volterra & Zachmanoglou, 1965.

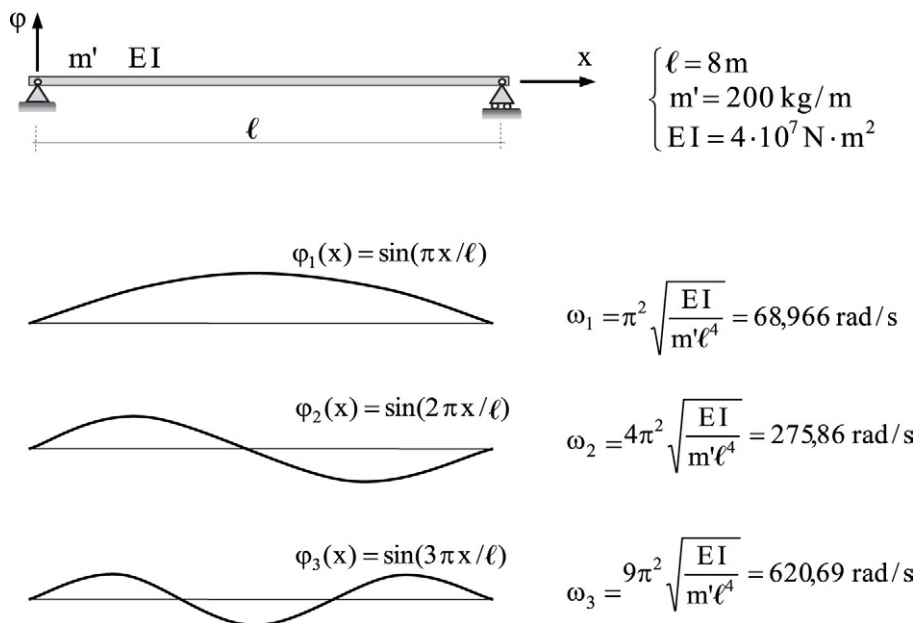


FIGURA E5-5.2a Propriedades dinâmicas de viga biapoiaada.

A Tabela 5-5.2 apresenta os resultados das primeiras três frequências naturais obtidas com as discretizações em 3, 5, 9 e 33 pontos nodais, juntamente os percentuais das diferenças em relação aos correspondentes resultados da teoria clássica.

Tabela T5-5.2 Frequências naturais da viga da Figura E5-5.2a.

Pontos nodais	Matriz de massa	ω_1	ω_2	ω_3
3	Discreta	68,465 (−0,73%)	—	—
	Consistente	69,238 (0,39%)	306,19 (10,99%)	769,62 (23,99%)
5	Discreta	68,994 (−0,032%)	273,86 (−0,73%)	581,47 (−6,32%)
	Consistente	68,984 (0,026%)	276,95 (0,40%)	632,04 (1,82%)
9	Discreta	68,964 (−0,003%)	275,78 (−0,029%)	619,56 (−0,18%)
	Consistente	68,967 (0,002%)	275,94 (0,029%)	621,50 (0,13%)
33	Discreta	68,966 (0,0%)	275,86 (0,0%)	620,69 (0,0%)
	Consistente	68,966 (0,0%)	275,86 (0,0%)	620,69 (0,0%)

Os resultados numéricos anteriores mostram que:

- A acurácia das frequências diminui à medida que cresce a ordem das mesmas.
- Com o refinamento da discretização, ocorre convergência de frequências à teoria clássica.
- Com matriz de massa discreta, a convergência é por valores inferiores.
- Com matriz de massa consistente a convergência é por valores superiores e ligeiramente melhor do que com matriz de massa discreta.
- Com a discretização em 3 pontos nodais e matriz de massa discreta, tem-se apenas um coeficiente diagonal não nulo na matriz de massa, o que permite a determinação de apenas uma frequência natural.
- Com essa mesma discretização e matriz de massa consistente, obteve-se a segunda frequência com diferença próxima a 11%. Contudo, o segundo modo de vibração do modelo tem representação gráfica quase coincidente com a solução teórica, como mostra a [Figura E5-5.2b](#).

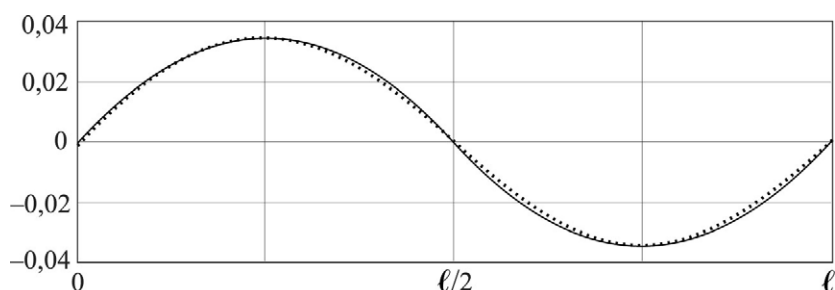


Figura E5-5.2b Segundo modo de vibração da viga da [Figura E5-5.2a](#).

EXEMPLO 5-5.3

Na [Subseção 5-2.1](#) fez-se referência ao efeito da deformação de esforço cortante e que essa deformação tem relevância em barras de grande altura, principalmente em determinação de frequências naturais de ordens elevadas. A seguir, resultados de frequências calculadas com matrizes de rigidez sem e com esse efeito, em caso de matriz de massa consistente, são comparados com valores obtidos com a *teoria de viga de Timoshenko* que considera esse efeito. Para o caso de viga biapoiada e com essa teoria, tem-se a expressão da j -ésima frequência natural³⁶

$$\omega_j = j^2 \pi^2 \sqrt{\frac{EI}{m'l^4}} \left(1 - \frac{j^2 \pi^2 I}{2A\ell^2} \left(1 + \frac{Ef}{G} \right) \right)$$

São consideradas vigas biapoiadas de ($\ell = 8$ m), seções transversais de $0,30 \times 0,30$ m² e seções transversais de $0,30 \times 0,70$ m², com as propriedades: $E = 21$ GPa, $G = 8,678$ GPa e $\gamma = 2500$ kg/m³. Adotou-se o fator de cisalhamento ($f = 6/5$).

Para a viga de seção de $0,30 \times 0,30$ m², em que a razão comprimento/altura é igual a 26,67, a *teoria de Timoshenko* forneceu as frequências naturais: $\omega_1 = 1,2213$ rad/s, $\omega_2 = 4,8519$ rad/s e $\omega_3 = 10,792$ rad/s. Para essa mesma viga, a [Tabela 5-5.3a](#) apresenta os resultados obtidos com discretizações em elementos de viga de tamanhos iguais, sem e com o efeito de deformação de esforço cortante, juntamente com os percentuais de diferenças em relação aos resultados da referida teoria.

³⁶ Vide Timoshenko, S.P. & Young, D.H., 1974, pg. 434, Eq. 5.118.

Tabela T5-5.3a Frequências naturais de viga biapoiada de seção quadrada.

Pontos nodais	Deformação de cortante	ω_1	ω_2	ω_3
3	Sem	1,2289 (0,63%)	5,4343 (12,0%)	13,660 (26,57%)
	Com	1,2270 (0,47%)	5,4343 (12,0%)	13,570 (25,74%)
5	Sem	1,2243 (0,25%)	4,9154 (1,31%)	11,216 (3,94%)
	Com	1,2224 (0,09%)	4,8862 (0,71%)	11,083 (2,69%)
9	Sem	1,2240 (0,22%)	4,8974 (0,94%)	11,030 (2,20%)
	Com	1,2220 (0,06%)	4,8658 (0,29%)	10,878 (0,79%)
33	Sem	1,2240 (0,22%)	4,8961 (0,91%)	11,016 (2,07%)
	Com	1,2220 (0,06%)	4,8636 (0,24%)	10,854 (0,57%)

Para a viga de seção transversal retangular de $0,30 \times 0,70 \text{ m}^2$, em que a razão comprimento/altura é igual a 11,4, a *teoria de Timoshenko* forneceu as frequências naturais: $\omega_1 = 2,8209 \text{ rad/s}$, $\omega_2 = 10,823 \text{ rad/s}$ e $\omega_3 = 22,861 \text{ rad/s}$. A [Tabela 5-5.3b](#) apresenta os resultados dessas mesmas frequências obtidos com discretizações em elementos de viga, sem e com o efeito de deformação de esforço cortante, juntamente com os percentuais de diferenças em relação aos resultados da referida teoria.

Tabela T5-5.3b Frequências naturais de viga biapoiada de seção retangular.

Pontos nodais	Deformação de cortante	ω_1	ω_2	ω_3
3	Sem	2,8673 (1,64%)	12,670 (16,7%)	31,872 (39,4%)
	Com	2,8442 (0,82%)	12,670 (16,7%)	30,79 (34,69%)
5	Sem	2,8568 (1,27%)	11,469 (5,59%)	26,174 (14,49%)
	Com	2,8318 (0,38%)	11,112 (2,30%)	24,566 (7,46%)
9	Sem	2,8561 (1,25%)	11,427 (5,20%)	25,738 (12,59%)
	Com	2,8305 (0,34%)	11,042 (1,65%)	23,957 (4,79%)
33	Sem	2,8561 (1,25%)	11,424 (5,17%)	25,705 (12,44%)
	Com	2,8303 (0,33%)	11,029 (1,53%)	23,826 (4,22%)

Os valores anteriores constataam que:

- A acurácia diminui à medida que cresce a ordem da frequência e aumenta com o refinamento da discretização, o que foi constatado também no exemplo anterior.
- O efeito da deformação de esforço cortante cresce à medida que se aumenta a altura da seção transversal e a ordem da frequência natural. O critério usual de incluir o efeito de deformação de esforço cortante em caso de barra de *razão comprimento/altura* menor do que 10 é muito conservativo.
- Os resultados do elemento de viga com o efeito de deformação de esforço cortante aproximam-se, mas não convergem aos correspondentes resultados da *teoria de Timoshenko*. Os resultados com as discretizações da viga são todos superiores aos da referida teoria.
- O elemento de viga e a referida teoria conduzem a resultados não convergentes, mas próximos entre si porque são baseados em idealizações distintas da deformação de esforço cortante. Isso

reforça o esclarecimento apresentado no primeiro parágrafo da Seção 1-1 de que os modelos matemáticos são aproximativos aos correspondentes sistemas físicos, dada a complexidade da natureza. Em particular, a deformação de esforço cortante provoca encurvamento das seções transversais de viga, o que não é possível de ser levado em conta de forma perfeita em nenhuma teoria baseada em idealização unidimensional. Contudo, a consideração desse efeito em flexão de viga através das expressões da Equação 5-2.1 mostrou-se muito satisfatória.

Com os chamados elementos finitos compatíveis, *integração numérica de Gauss completa* (em que não se introduz aproximação em caso de elemento na forma regular) e matriz de massa consistente, a convergência é por valores superiores às frequências naturais exatas. O efeito de forças axiais em flexão pode ser levado em consideração através da chamada matriz de rigidez geométrica. Com isso, forças de compressão reduzem a rigidez do modelo e, portanto, conduzem a frequências naturais menores. Forças de tração aumentam a rigidez e levam a frequências naturais maiores.³⁷

EXEMPLO 5-5.4

Para mostrar uma aplicação real de determinação de características dinâmicas, faz-se referência à torre de telecomunicações visualizada na Figura E5-5.4a, que foi projetada pela *Prosystem Engenharia* (www.prosystem.com.br). Trata-se de torre autossuportada de base quadrangular, composta por cantoneiras com ligações aparafusadas, que foi idealizada como pórtico tridimensional de 1156 barras e 436 pontos nodais, o que corresponde a 2.616 equações.

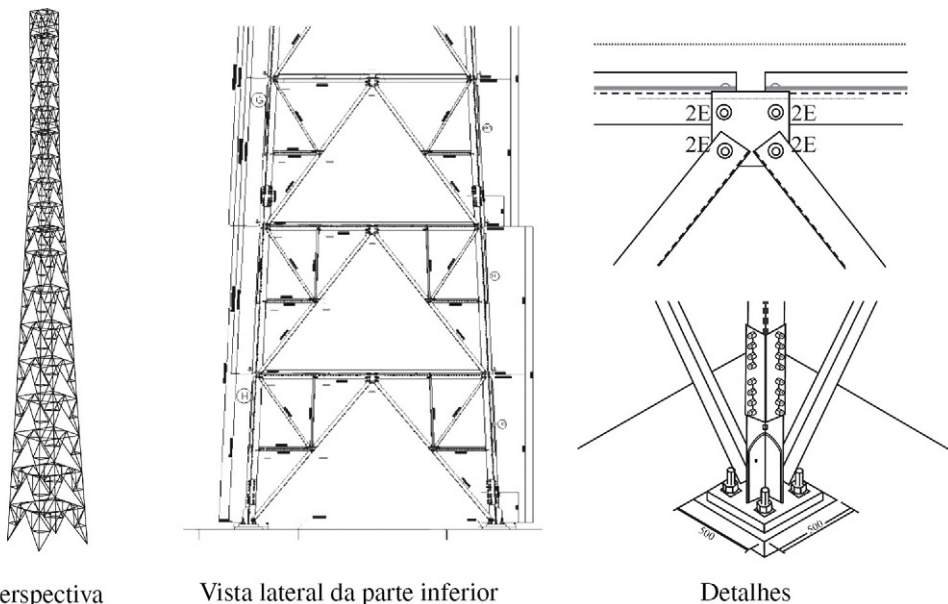


FIGURA E5-5.4a Torre de telecomunicações.

³⁷ Vide Przemieniecki, 1968.

A [Figura E5-5.4b](#) mostra uma vista frontal da torre e alguns de seus modos naturais de vibração de flexão no plano dessa vista e no que lhe é perpendicular.

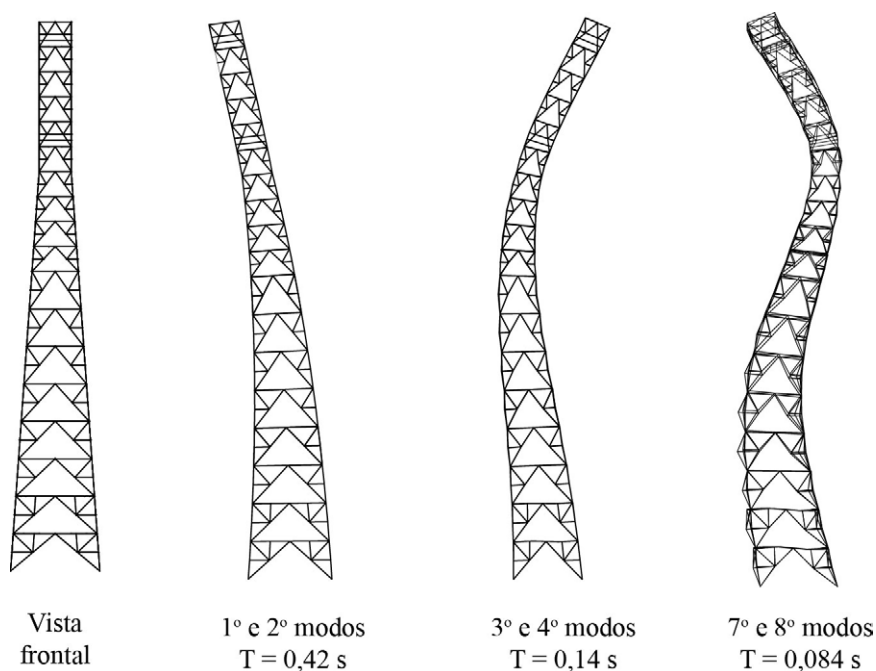


FIGURA E5-5.4b Modos de vibração.

As primeiras frequências naturais são úteis em previsão do comportamento do modelo estrutural sob determinada ação externa. Isso porque as amplitudes de deslocamento aumentam à medida que aquelas frequências se aproximam da frequência preponderante da excitação. Com isso, a correspondente oscilação pode danificar a estrutura e/ou provocar desconforto aos usuários da mesma.

Bachmann *et al.* (1995) apresentam limites práticos de vibrações em edifícios, pisos, ginásios, salas de concertos, pontes, torres, mastros estaiados, passarelas e chaminés, limites esses baseados em frequências fundamentais das estruturas.

A norma NBR 6118 – *Projeto de Estruturas de Concreto*, na Subseção 23.3, e para o estado limite de vibrações excessivas nas estruturas de concreto usuais, prescreve que a frequência fundamental deve exceder em pelo menos 20% a uma *frequência crítica*. Quando a ação dinâmica é originada de um equipamento, essa frequência é a de operação do mesmo. Em estruturas submetidas a vibrações provocadas por pessoas, os valores dessa frequência são os apresentados na [Tabela 5-5.1](#).

A norma NBR 8800 – *Projeto de Estruturas de Aço e de Estruturas Mistas de Aço e Concreto de Edifícios* trata da questão das vibrações nos anexos.

Tabela 5-5.1 Frequências críticas estabelecidas pela NBR 6118.

Finalidade	Frequência crítica
Ginásio de esportes	8,0 Hz
Salas de dança ou de concerto sem cadeiras	7,0 Hz
Escritórios	3,0 a 4,0 Hz
Salas de concerto com cadeiras fixas	3,4 Hz
Passarelas de pedestres ou de ciclistas	1,6 a 4,5 Hz

Como os modos naturais de vibração são linearmente independentes entre si e em número igual aos graus de liberdade do modelo discreto, esses modos formam uma base completa no espaço n -dimensional.³⁸ Logo, qualquer configuração desse modelo pode ser escrita com a seguinte superposição de modos de vibração:

$$\mathbf{d}(t) = \sum_{j=1}^n \boldsymbol{\varphi}_j \alpha_j(t) \rightarrow \boxed{\mathbf{d}(t) = \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\alpha}(t)} \quad (5-5.17)$$

onde $\alpha_j(t)$ são coordenadas generalizadas, funções do tempo, denominadas *coordenadas modais*.

Com a pré-multiplicação da expressão anterior por $\boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{M}$, escreve-se:

$$\boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{M} \mathbf{d}(t) = \boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{M} \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\alpha}(t) = \boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{M} (\boldsymbol{\varphi}_1 \alpha_1(t) + \cdots + \boldsymbol{\varphi}_i \alpha_i(t) + \cdots + \boldsymbol{\varphi}_n \alpha_n(t))$$

Logo, com a condição de ortonormalização ($\boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_j = \delta_{ij}$), obtém-se a coordenada modal

$$\boxed{\alpha_i(t) = \boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{M} \mathbf{d}(t)} \quad (5-5.18)$$

A transformação de coordenadas expressa na Equação 5-5.17 será utilizada na Seção 6-2 em determinação de resposta de modelo discreto com múltiplos graus de liberdade, quando então será esclarecido que apenas os primeiros modos naturais de vibração são relevantes.

EXEMPLO 5-5.5

Para mostrar numericamente a expansão representada na Equação 5-5.17, considera-se o vetor:

$$\mathbf{d} = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$$

e os modos naturais de vibração do *shear building* representado na Figura E5-5.a.

³⁸ Estruturas de comportamento não linear não têm modos naturais de vibração porque as amplitudes das oscilações interferem na matriz de rigidez, e não há restrição quanto à grandeza das amplitudes dos autovetores, uma vez que a normalização desses vetores é apenas um artifício de determinação única. Contudo, mesmo não havendo modos naturais de vibração em estrutura de comportamento não linear, a determinação de modos de vibração com as tensões em prováveis configurações mais desfavoráveis da mesma costuma fornecer uma indicação do provável comportamento estrutural.

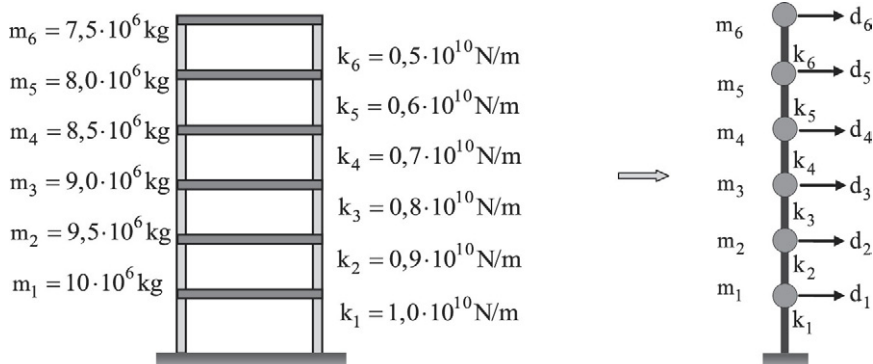


Figura E5-5.a *Shear building*

Este *shear building* tem as seguintes matrizes de rigidez e de massa, em formas analíticas:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 + k_5 & -k_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_5 & k_5 + k_6 & -k_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_6 & k_6 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_6 \end{bmatrix}$$

Com o cômputo das matrizes anteriores e a resolução do problema de autovalor ($\mathbf{K}\Phi = \mathbf{M}\Phi\Omega$), obtém-se a seguinte matriz modal normalizada em relação à matriz de massa:

$$\Phi = 10^{-4} \begin{bmatrix} 0,388\ 26 & -1,0095 & 1,4362 & -1,5783 & 1,4910 & 1,4399 \\ 0,794\ 13 & -1,6722 & 1,3952 & -0,232\ 93 & -0,969\ 78 & -2,0391 \\ 1,1949 & -1,6052 & -0,350\ 20 & 1,7694 & -0,875\ 88 & 1,7566 \\ 1,5622 & -0,684\ 28 & -1,883\ 2 & 0,037\ 556 & 2,0303 & -1,0890 \\ 1,8597 & 0,786\ 82 & -0,935\ 38 & -2,0770 & -1,7278 & 0,498\ 02 \\ 2,0408 & 2,0370 & 1,7370 & 1,2581 & 0,63335 & -0,132\ 06 \end{bmatrix}$$

Esses modos naturais de vibração estão representados na [Figura E5-5.b](#).

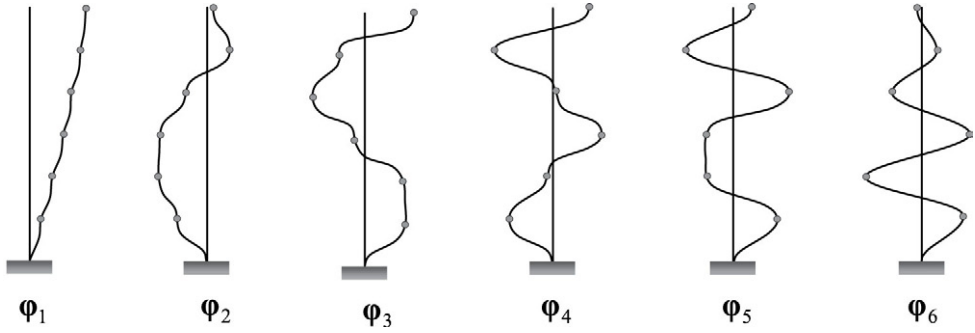


Figura E5-5.b Modos naturais de vibração do *shear building* da figura anterior.

Com a utilização da Equação 5-5.18, obtém-se o vetor das coordenadas modais que permite escrever

$$\mathbf{d} = 450,53 \varphi_1 + 599,89 \varphi_2 - 893,13 \varphi_3 + 1400,3 \varphi_4 + 6564,4 \varphi_5 - 2467,253 \varphi_6$$

Com a solução harmônica de deslocamento expressa na Equação 5-5.2, a energia potencial de deformação elástica linear estabelecida na Equação 5-4.10 toma a nova forma:

$$E_{pe} = \frac{1}{2} \hat{\boldsymbol{\phi}}_j^T \mathbf{K} \hat{\boldsymbol{\phi}}_j \cos^2(\omega_j t - \phi_j) \quad (5-5.19)$$

que tem como máximo:

$$E_{pe/m\acute{a}x.} = \frac{1}{2} \hat{\boldsymbol{\phi}}_j^T \mathbf{K} \hat{\boldsymbol{\phi}}_j \quad (5-5.20)$$

Além disso, daquela solução obtém-se a solução de velocidades nodais:

$$\dot{\mathbf{d}}(t) = -\omega_j \hat{\boldsymbol{\phi}}_j \sin(\omega_j t - \phi_j) \quad (5-5.21)$$

com a qual se escreve a energia cinética:

$$E_c = \frac{1}{2} \omega_j^2 \hat{\boldsymbol{\phi}}_j^T \mathbf{M} \hat{\boldsymbol{\phi}}_j \sin^2(\omega_j t - \phi_j) \quad (5-5.22)$$

O máximo dessa energia é:

$$E_{c/m\acute{a}x.} = \frac{1}{2} \omega_j^2 \hat{\boldsymbol{\phi}}_j^T \mathbf{M} \hat{\boldsymbol{\phi}}_j \quad (5-5.23)$$

Logo, como em vibração livre não amortecida há conservação de energia mecânica, tem-se ($E_{c/m\acute{a}x.} = E_{pe/m\acute{a}x.}$), que fornece:

$$\omega_j^2 = \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}_j^T \mathbf{K} \hat{\boldsymbol{\phi}}_j}{\hat{\boldsymbol{\phi}}_j^T \mathbf{M} \hat{\boldsymbol{\phi}}_j} \quad (5-5.24)$$

Essa expressão é uma particularização do *quociente de Rayleigh* que será apresentado na Seção 9-2. Esse quociente é utilizado no *Método de Rayleigh* de estimativa da frequência fundamental de modelo estrutural, a partir do arbítrio de uma aproximação ao modo fundamental de vibração do modelo.³⁹

5-6 REDUÇÃO DE GRAUS DE LIBERDADE

Com a atual eficiência de processamento em microcomputadores, praticamente não há impedimento para se efetuar análise dinâmica com elevado número de graus de liberdade.⁴⁰ Contudo, em casos específicos, pode haver interesse em reduzir esse número.

A redução mais simples é a eliminação dos graus de liberdade correspondentes a coeficientes de massa diagonais nulos (usualmente os associados às rotações em que se desconsidera inércia) e correspondentes a forças nodais externas nulas.⁴¹ Trata-se de modificação do sistema global das equações de movimento, denominada *condensação estática* de graus de liberdade.

Para essa redução, considera-se que os graus de liberdade com inércia sejam ordenados em primeiro lugar e contidos no vetor \mathbf{d}_t , seguidos dos graus de liberdade sem inércia que são incluídos no vetor \mathbf{d}_r .⁴² Com essas notações, o sistema global das equações de movimento não amortecido fica com a forma matricial repartida:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{tt} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{d}}_t(t) \\ \ddot{\mathbf{d}}_r(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{tt} & \mathbf{K}_{tr} \\ \mathbf{K}_{rt} & \mathbf{K}_{rr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_t(t) \\ \mathbf{d}_r(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_t(t) \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (5-6.1)$$

que também se escreve:

$$\begin{cases} \mathbf{M}_{tt}\ddot{\mathbf{d}}_t(t) + \mathbf{K}_{tt}\mathbf{d}_t(t) + \mathbf{K}_{tr}\mathbf{d}_r(t) = \mathbf{f}_t(t) \\ \mathbf{K}_{rt}\mathbf{d}_t(t) + \mathbf{K}_{rr}\mathbf{d}_r(t) = \mathbf{0} \end{cases} \quad (5-6.2)$$

A segunda das expressões do par anterior fornece:

$$\mathbf{d}_r(t) = -\mathbf{K}_{rr}^{-1}\mathbf{K}_{rt}\mathbf{d}_t(t) \quad (5-6.3)$$

Com a substituição dessa equação na primeira expressão do referido par, obtém-se o sistema de equações com menor número de incógnitas:

$$\mathbf{M}_{tt}\ddot{\mathbf{d}}_t(t) + \mathbf{K}_{tt}^c\mathbf{d}_t(t) = \mathbf{f}_t(t) \quad (5-6.4)$$

³⁹ Versão modificada desse método foi utilizada em determinação de massa equivalente na Seção 2-4.

⁴⁰ Vide a Seção 9-8, quanto à eficiência computacional.

⁴¹ Embora as forças nodais externas associadas aos graus de liberdade rotação não precisem ser nulas para proceder a essa eliminação, é prática aplicá-la apenas em caso de essas forças serem nulas.

⁴² Os índices *t* e *r* são alusivos a *t*ranslações e *r*otações, respectivamente. Os deslocamentos do veto \mathbf{d}_t são denominados *graus mestres* ou *principais*, e os deslocamentos do vetor \mathbf{d}_r , *graus dependentes* ou *secundários*.

em que se tem a matriz de rigidez condensada:

$$\mathbf{K}_{tt}^c = \mathbf{K}_{tt} - \mathbf{K}_{tr} \mathbf{K}_{rr}^{-1} \mathbf{K}_{rt} \quad (5-6.5)$$

Assim, obtém-se o vetor de deslocamentos \mathbf{d}_t através da resolução do sistema anterior, que fornece o vetor dos deslocamentos eliminados \mathbf{d}_r com a sua substituição na Equação 5-6.3.⁴³ Isso, sem aproximação adicional ao sistema inicial das equações de movimento.

Uma extensão dessa condensação é a eliminação de graus de liberdade de rotação, mesmo com inércia, com a argumentação de que a energia cinética correspondente a esses graus costuma ser muito menor do que a energia associada aos graus de translação. Trata-se da *redução de Guyan*.⁴⁴

Para desenvolver essa redução, considera-se o seguinte sistema de equações de movimento, em que a matriz de massa é cheia:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{tt} & \mathbf{M}_{tr} \\ \mathbf{M}_{rt} & \mathbf{M}_{rr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{d}}_t(t) \\ \ddot{\mathbf{d}}_r(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{tt} & \mathbf{K}_{tr} \\ \mathbf{K}_{rt} & \mathbf{K}_{rr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_t(t) \\ \mathbf{d}_r(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_t(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5-6.6)$$

É simples identificar que a transformação de coordenadas:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{d}_t(t) \\ \mathbf{d}_r(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{K}_{rr}^{-1} \mathbf{K}_{rt} \end{bmatrix} \mathbf{d}_t(t) = \mathbf{T} \mathbf{d}_t(t) \quad (5-6.7)$$

em que:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{K}_{rr}^{-1} \mathbf{K}_{rt} \end{bmatrix} \quad (5-6.8)$$

fornece a mesma matriz de rigidez condensada, agora com a expressão:

$$\mathbf{K}_{tt}^c = \mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T} \quad (5-6.9)$$

Com a substituição daquela transformação no sistema de equações que lhe precede e a pré-multiplicação por \mathbf{T}^T , obtém-se o novo sistema de equações:

$$\mathbf{M}_{tt}^c \ddot{\mathbf{d}}_t(t) + \mathbf{K}_{tt}^c \mathbf{d}_t(t) = \mathbf{f}_t(t) \quad (5-6.10)$$

em que se tem a matriz de rigidez anterior e a *matriz de massa condensada*:

$$\mathbf{M}_{tt}^c = \mathbf{T}^T \mathbf{M} \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{M}_{tt}^c = \mathbf{M}_{tt} - \mathbf{M}_{tr} \mathbf{K}_{rr}^{-1} \mathbf{K}_{rt} + \mathbf{K}_{tr} \mathbf{K}_{rr}^{-1} \mathbf{M}_{rr} \mathbf{K}_{rr}^{-1} \mathbf{K}_{rt} - \mathbf{K}_{tr} \mathbf{K}_{rr}^{-1} \mathbf{M}_{rt} \quad (5-6.11)$$

Naturalmente essa redução introduz aproximações ao sistema inicial das equações de movimento, em função das forças de inércia associadas aos graus de liberdade eliminados. Observa-se que a matriz anterior é cheia, mesmo que a matriz de massa original seja diagonal,

⁴³ Na Equação 5-6.5 ocorre a inversão de uma matriz, o que é desfavorável computacionalmente. Essa inversão pode ser evitada com a eliminação dos graus de liberdade de rotação através do *método de Gauss*.

⁴⁴ Guyan, R. J., 1965, *Reduction of Stiffness and Mass Matrices*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, vol. 3, n.º 2, pp. 380.

e identifica-se que, em caso de matriz diagonal que tenha ($\mathbf{M}_{rr} = \mathbf{0}$), a presente redução recai na condensação estática.

A *redução de Guyan* foi concebida com o objetivo de reduzir a ordem do problema de autovalor da Dinâmica das Estruturas, para permitir a correspondente resolução em memória central de computador, em época de poucos recursos computacionais. Com a evolução desses recursos e o desenvolvimento do método de iteração por subespaço descrito na Seção 9-6, essa redução perdeu relevância.

Para estruturas complexas em que partes ou componentes sejam projetados por equipes diferentes, como é o caso das estruturas aeronáuticas e espaciais, é necessária a análise de cada componente separadamente. Isso requer troca de informações entre essas equipes, quanto às propriedades dinâmicas de cada componente, de maneira que, em análises separadas, sejam capturadas respostas de baixa frequência de toda a estrutura. Aplicam-se, então, métodos de *síntese modal de componentes* (CMS – *Component Mode Synthesis*), que podem ser de *interfaces fixa*, de *interfaces livre* e *híbridos*. Esses métodos são utilizados juntamente com técnicas de subestruturas ou de superelementos.⁴⁵

Entre esses métodos, pela simplicidade e bons resultados, destaca-se o *método de Craig e Bampton* de interfaces fixas,⁴⁶ que é uma modificação de método desenvolvido por Hurty.⁴⁷ Descreve-se o primeiro desses métodos com auxílio da Figura 5-6.1, que mostra um modelo

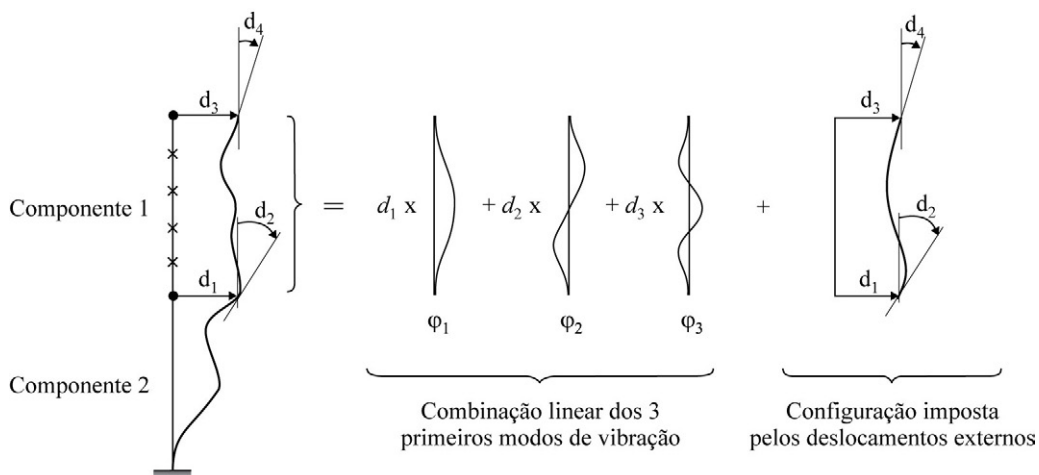


FIGURA 5-6.1 Esquemática do método de Craig e Bampton.

⁴⁵ Essas técnicas estão descritas na Seção 4.5 de Soriano (2005).

⁴⁶ Craig, R. R., Jr. & Bampton, M. C. C., 1968, *Coupling of Substructures for Dynamic Analysis*, AIAA Journal, vol. 6, n.º. 7, pp. 1313-1319.

⁴⁷ Hurty, W. C., 1965, *Dynamics Analysis of Structural Systems Using Component Modes*, Technical Report n.º. 32-530, Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology. No método de Hurty, diferentemente que no método de Craig e Bampton, é necessário dividir os deslocamentos nodais externos, de cada componente, entre *estaticamente determinados* e *de restrição*, se esses deslocamentos forem mais do que o suficiente para impedir os deslocamentos de corpo rígido do componente.

unidimensional constituído de dois componentes, em que, no componente superior, estão representados quatro pontos nodais internos e dois pontos nodais externos, juntamente com os quatro deslocamentos externos (duas translações horizontais e duas rotações). A configuração de deformação desse componente é aproximada pela combinação linear de seus três primeiros modos naturais de vibração (obtidos com os pontos nodais externos restringidos), mais a configuração imposta ao componente pelos deslocamentos externos. Com essa aproximação, o componente, inicialmente com oito deslocamentos internos e quatro deslocamentos externos, passa a ter três graus de liberdade generalizados mais os mesmos graus externos.

Para cada componente, considera-se o sistema de equações de movimento sob a forma matricial repartida:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ii} & \mathbf{M}_{ie} \\ \mathbf{M}_{ei} & \mathbf{M}_{ee} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{d}}_i(t) \\ \ddot{\mathbf{d}}_e(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ie} \\ \mathbf{K}_{ei} & \mathbf{K}_{ee} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_i(t) \\ \mathbf{d}_e(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_i(t) \\ \mathbf{f}_e(t) \end{Bmatrix} \quad (5-6.12)$$

em que os índices “i” e “e” são alusivos, respectivamente, aos graus de liberdade internos e externos ao componente.

Com a fixação dos pontos nodais externos, resolve-se o problema de autovalor:

$$\mathbf{K}_{ii} \Phi_p = \mathbf{M}_{ii} \Phi_p \Omega_p \quad (5-6.13)$$

onde Φ_p é a matriz modal formada pelos p primeiros modos naturais de vibração (com p menor do que o número de graus internos ao componente), normalizados com respeito à matriz de massa, e Ω_p é a correspondente matriz espectral.⁴⁸

Para considerar a deslocabilidade dos pontos nodais externos ao componente, utilizam-se respostas estáticas a um deslocamento unitário segundo cada um dos graus de liberdade externos, mantendo-se todos os demais graus externos restringidos. São os chamados *modos de restrição* (estática) ou *modos de contorno*, que contidos na matriz Ψ_i atendem a:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ie} \\ \mathbf{K}_{ei} & \mathbf{K}_{ee} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_i \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_e \end{bmatrix} \quad (5-6.14)$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade de ordem igual ao número dos graus externos ao componente. Logo, da primeira linha da expressão anterior e em caso da submatriz \mathbf{K}_{ii} ser não singular, obtém-se:

$$\Psi_i = -\mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{ie} \quad (5-6.15)$$

Como ocorre matriz inversa nessa expressão, esses modos são obtidos mais eficientemente através da resolução simultânea dos sistemas de equações algébricas:

$$\mathbf{K}_{ii} \Psi_i = -\mathbf{K}_{ie} \quad (5-6.16)$$

⁴⁸ A Seção 6-2 apresenta o *método de superposição modal* com a argumentação de que, em caso de múltiplos graus de liberdade, a contribuição dos modos naturais de vibração mais altos tem mínima contribuição em resposta de baixa frequência da estrutura e, portanto, esses modos podem ser desconsiderados em uma transformação modal de coordenadas, de maneira a se ter redução de graus de liberdade. E caso seja considerada matriz modal completa, não se introduz aproximação.

em que \mathbf{K}_{ie} denota um conjunto de vetores independentes em número igual aos graus externos. Em caso de a submatriz \mathbf{K}_{ii} ser singular, o que caracteriza componente estaticamente determinado, $\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}_i \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}$ são modos de corpo rígido.

A redução dos graus de liberdade internos é obtida com a transformação de coordenadas:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{d}_i(t) \\ \mathbf{d}_e(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_p & \boldsymbol{\Psi}_i \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathcal{d}_i(t) \\ \mathbf{d}_e(t) \end{Bmatrix} \quad (5-6.17)$$

onde \mathcal{d}_i é um vetor que contém graus de liberdade (modais) generalizados.

Com essa transformação, escreve-se a partir do sistema de equações de movimento expresso na Equação 5-6.12:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_p & \boldsymbol{\Psi}_i \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ii} & \mathbf{M}_{ie} \\ \mathbf{M}_{ei} & \mathbf{M}_{ee} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_p & \boldsymbol{\Psi}_i \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathcal{d}}_i(t) \\ \ddot{\mathbf{d}}_e(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_p & \boldsymbol{\Psi}_i \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ie} \\ \mathbf{K}_{ei} & \mathbf{K}_{ee} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_p & \boldsymbol{\Psi}_i \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathcal{d}_i(t) \\ \mathbf{d}_e(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_p & \boldsymbol{\Psi}_i \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_i(t) \\ \mathbf{f}_e(t) \end{Bmatrix} \rightarrow \mathbf{M}^c \begin{Bmatrix} \ddot{\mathcal{d}}_i(t) \\ \ddot{\mathbf{d}}_e(t) \end{Bmatrix} + \mathbf{K}^c \begin{Bmatrix} \mathcal{d}_i(t) \\ \mathbf{d}_e(t) \end{Bmatrix} = \mathbf{f}^c(t) \quad (5-6.18)$$

em que se têm as matrizes condensadas:⁴⁹

$$\mathbf{M}^c = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \boldsymbol{\Phi}_p^T (\mathbf{M}_{ii} \boldsymbol{\Psi}_i + \mathbf{M}_{ie}) \\ \text{sim.} & \boldsymbol{\Psi}_i^T (\mathbf{M}_{ii} \boldsymbol{\Psi}_i + \mathbf{M}_{ie}) + \mathbf{M}_{ei} \boldsymbol{\Psi}_i + \mathbf{M}_{ee} \end{bmatrix} \quad (5-6.19)$$

$$\mathbf{K}^c = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{ee} + \mathbf{K}_{ie}^T \boldsymbol{\Psi}_i \end{bmatrix} \quad (5-6.20)$$

$$\mathbf{f}^c(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_p^T \mathbf{f}_i(t) \\ \boldsymbol{\Psi}_i^T \mathbf{f}_e(t) \end{bmatrix} \quad (5-6.21)$$

A construção da matriz de amortecimento será tratada na Seção 6-3, à qual também pode ser aplicada a transformação de coordenadas anterior.

Uma vez que essas matrizes sejam calculadas para os diversos componentes, constroem-se as matrizes globais através de acumulação das contribuições que dizem respeito aos mesmos graus de liberdade externos. O correspondente sistema global de equações diferenciais pode ser resolvido através de um dos métodos de integração direta que serão apresentados na Seção 6-4, recaindo-se na resolução de sistemas de equações algébricas, o que permite efetuar, sem aproximação adicional, a condensação estática dos graus de liberdade modais.⁵⁰ E a partir da resposta do modelo reduzido em cada discretização do tempo adotada na integração

⁴⁹ Identifica-se que o acoplamento entre as coordenadas modais e os graus de liberdade externos ocorre através da matriz de massa.

⁵⁰ Essa metodologia de determinação de resposta estrutural é encontrada em Soriano, H. L., 1982, *Reduction of Degrees of Freedom at Substructural Level in Dynamics*, Report developed as Visiting Research Fellow at the Civil Engineering Department of the University of Southampton.

numérica, os deslocamentos internos dos componentes podem ser obtidos da primeira linha da transformação de coordenadas expressa pela Equação 5-6.15, com a expressão:

$$\mathbf{d}_i(t) = \Phi_p \mathbf{d}_i(t) + \Psi_i \mathbf{d}_e(t) \quad (5-6.20)$$

Este capítulo apresentou a construção do sistema global das equações de movimento dos modelos de multigráus de liberdade, nos casos de estruturas em barras e de estruturas contínuas, como também mostrou a obtenção das frequências naturais e dos modos naturais de vibração.

Foram utilizados resultados das teorias clássicas de barra e do *Método dos Elementos Finitos*, em apresentação dos importantes conceitos de matriz de rotação, funções de interpolação, forças nodais equivalentes e matrizes de massa discreta e de massa consistente. Foi também apresentada a propriedade de ortogonalidade dos modos naturais de vibração e detalhadas as reduções do sistema global das equações de movimento, a saber: a *condensação estática*, a *redução de Guyan* e o *método de Craig e Bampton*. Isso, para desenvolvimento e aplicação dos métodos de resolução do sistema global de equações de movimento que serão apresentados a partir do próximo capítulo.

5-7 EXERCÍCIOS PROPOSTOS

- 5-7.1** Identifique as unidades físicas dos coeficientes de rigidez $k_{23L}^{(e)}$, $k_{36L}^{(e)}$ e $k_{55L}^{(e)}$ do elemento de pórtico plano, como também identifique as unidades dos coeficientes de rigidez $k_{13L}^{(e)}$, $k_{33L}^{(e)}$ e $k_{36L}^{(e)}$ do elemento de grelha. Adote as numerações de deslocamentos nodais mostradas na Figura 5-1.3 e os símbolos das unidades das grandezas fundamentais do SI: m, N e rad.
- 5-7.2** Dado o pórtico plano com a conectividade de barras especificada pela matriz de incidência que consta da Figura 5-7.2, obtenha a matriz de rigidez restringida. Utilize a notação $k_{ijG}^{(e)}$ para designar o coeficiente de rigidez genérico do e-ésimo elemento de pórtico no referencial global.

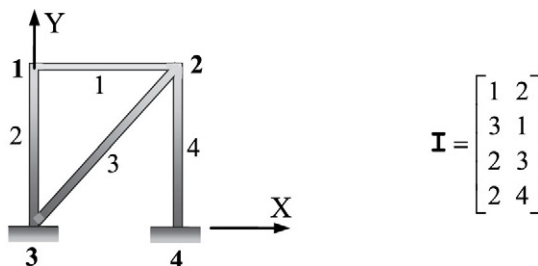


FIGURA 5-7.2 Pórtico plano.

5-7.3 Idem para a grelha mostrada na Figura 5-7.3.

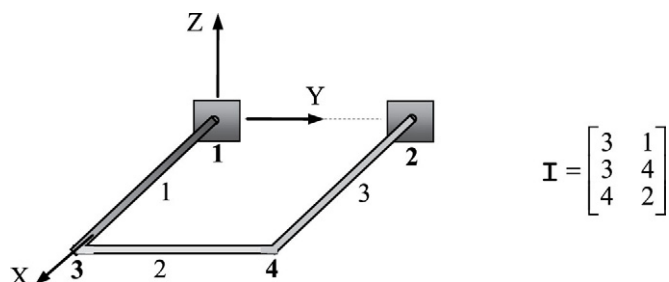


FIGURA 5-7.3 Grelha.

5-7.4 A viga representada na Figura 5-7.4 tem m' de massa por unidade de comprimento e EI de rigidez de flexão. Para a mostrada idealização e com matriz de massa consistente, obtenha o sistema das equações de movimento não amortecido.

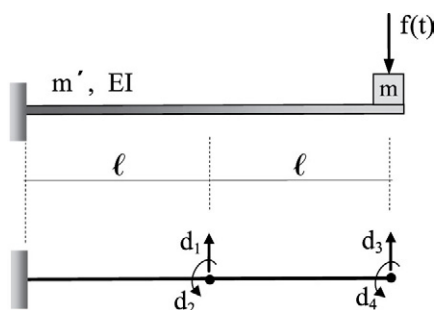


FIGURA 5-7.4 Viga em balanço com massa na extremidade.

5-7.5 Idem para a viga com apoio elástico esquematizada na Figura 5-7.5.

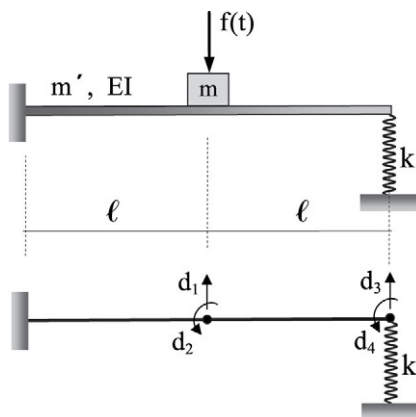


FIGURA 5-7.5 Viga com apoio elástico.

5-7.6 A Figura 5-7.6 mostra um *shear building* de três graus de liberdade. Obtenha o sistema das equações de movimento não amortecido e, através de um programa automático de resolução de problema de autovalor, determine os períodos naturais e os modos naturais de vibração normalizados em relação à matriz de massa.

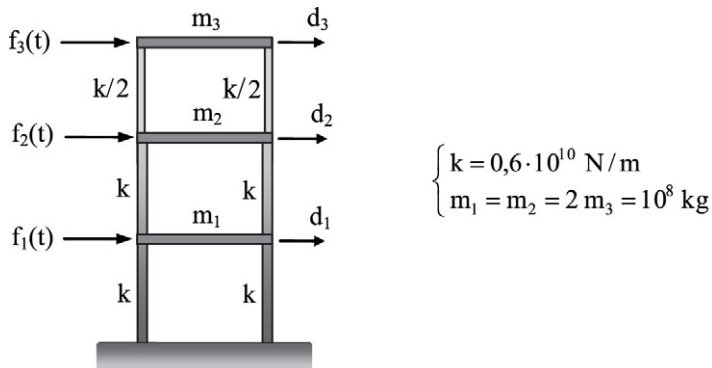


FIGURA 5-7.6 *Shear building* de três graus de liberdade.

5-7.7 A treliça plana da Figura 5-7.7 tem todas as barras de rigidez axial EA e massa m' por unidade de comprimento de barra. Obtenha as equações de vibração livre não amortecida, em caso de massa discreta. Além disso, através de um programa de linguagem simbólica, calcule as frequências naturais.

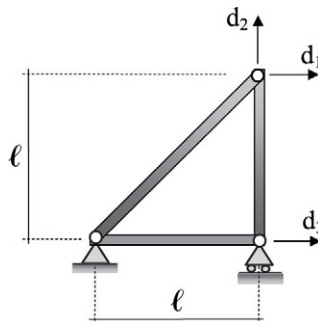


FIGURA 5-7.7 Treliça simples.

5-7.8 Para o sistema representado na Figura 5-7.8, determine o sistema das equações de vibração livre não amortecida, a matriz espectral e a matriz modal, com a condição do último dos coeficientes de cada um dos autovetores ser unitário.

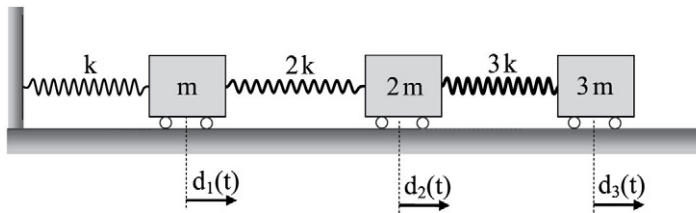


FIGURA 5-7.8 Sistema de três graus de liberdade.

5-7.9 O pórtico plano da [Figura 5-7.9](#) tem barras de ($A = 0,09 \text{ m}^2$), ($I = 6,75 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$), ($E = 20 \text{ GPa}$) e ($\rho = 2\,500 \text{ kg/m}^3$), além da massa ($m = 2\,000 \text{ kg}$) concentrada na união das duas barras. Com a numeração de deslocamentos indicada e matriz de massa consistente, determine o sistema das equações de vibração livre não amortecida, os períodos naturais de vibração e a matriz modal normalizada em relação à matriz de massa.

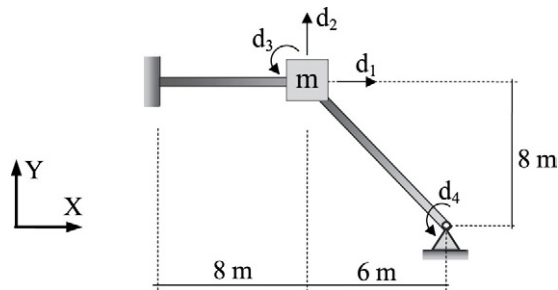


FIGURA 5-7.9 Pórtico plano.

5-7.10 A partir da matriz de rigidez da coluna mostrada na [Figura 5-7.10](#) e de rigidez de flexão EI , pede-se a matriz de rigidez restringida e a matriz de rigidez condensada relativamente aos graus de liberdade de rotação.

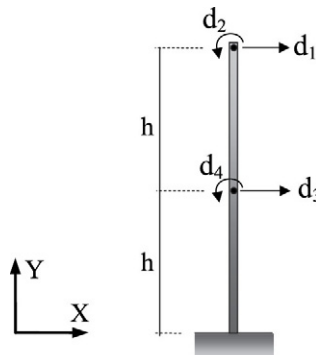


FIGURA 5-7.10 Coluna discretizada em dois elementos.

5-8 QUESTÕES PARA REFLEXÃO

- 5-8.1** O que é um *modelo estrutural de multigraus de liberdade*? Qual é a razão de se utilizar esse tipo de modelo?
- 5-8.2** Por que, mesmo com os atuais recursos computacionais, se procura fazer simplificações das propriedades de material, geometria, condições de apoio e solicitações externas, quando da criação de um modelo discreto?
- 5-8.3** O que é a *hipótese da seção plana*? Qual é a vantagem de se adotar essa hipótese? Qual é a aproximação introduzida por essa hipótese?
- 5-8.4** Quais são as propriedades geométricas de seção transversal que devem ser consideradas em análise de cada um dos tipos de estruturas em barras? E as propriedades de material, em caso de análise dinâmica de estrutura?
- 5-8.5** Qual é a diferença entre *coeficiente de rigidez* e *coeficiente de flexibilidade*?
- 5-8.6** Em que condições o efeito de deformação dos esforços cortantes é relevante de ser considerado em análise dinâmica de estrutura?
- 5-8.7** Por que, na formulação matricial de análise de estruturas reticuladas, desaparece a distinção clássica entre estrutura de nós indeslocáveis e estrutura de nós deslocáveis?
- 5-8.8** Por que se adota um referencial local em cada elemento de barra em análise matricial de estruturas? O que é *matriz de rotação* no contexto dessa análise? Por que se utiliza outro referencial para a construção do sistema global das equações de movimento? E nessa construção é estritamente necessário considerar um único referencial?
- 5-8.9** Para um dado modelo de estrutura reticulada, como identificar o *posto* ou *rank* da correspondente matriz de rigidez?
- 5-8.10** Qual é a aproximação básica do *Método dos Elementos Finitos* em análise de estruturas? E qual é a importância desse método?
- 5-8.11** Por que os elementos de barra não são elementos finitos verdadeiros? E por que se diz que as estruturas reticuladas são naturalmente discretizáveis?
- 5-8.12** Qual é a diferença entre as *condições geométricas de contorno*, as *condições naturais de contorno* e as condições iniciais (ao movimento)? Como essas condições são tratadas no *Método dos Elementos Finitos*?
- 5-8.13** O que são *elementos finitos isoparamétricos*? Qual é a vantagem desses elementos?
- 5-8.14** Qual é a diferença entre matriz de *rigidez restringida* e matriz de *rigidez não restringida*?
- 5-8.15** Por que os coeficientes diagonais de matriz de rigidez são positivos? E por que a soma dos coeficientes de uma coluna ou de uma linha de matriz de rigidez não restringida é igual a zero?

- 5-8.16** Por que a acurácia dos resultados de uma análise estática de estrutura reticulada de barras retas de seção transversal constante independe da discretização? E por que o mesmo não ocorre em análise dinâmica do mesmo tipo de estrutura?
- 5-8.17** Por que a análise dinâmica de uma estrutura é um *problema de condições iniciais*? Quais são essas condições iniciais?
- 5-8.18** Qual é a diferença entre matriz de *massa discreta* e matriz de *massa consistente*? Existem vantagens de uma concepção de matriz sobre a outra? Por que, à medida que se aumenta a discretização, se reduz a diferença entre os resultados com esses dois tipos de matrizes?
- 5-8.19** O que são *modos naturais de vibração*? Por que um modo natural de vibração define apenas uma forma de referência? E como se pode ter determinação única desse tipo de modo de vibração?
- 5-8.20** Por que apenas estruturas de comportamento linear têm modos naturais de vibração? Quais são as propriedades desses modos?
- 5-8.21** Dado um modelo de estrutura em barras, como identificar o número de frequências naturais? E por que com matriz de rigidez não restringida são obtidas algumas “frequências” nulas?
- 5-8.22** Em determinação das características dinâmicas (frequências e modos naturais de vibração), condições de simetria de um modelo de estrutura podem sempre ser utilizadas na construção de um modelo menor? Por quê?
- 5-8.23** O que são vetores (na concepção de matrizes colunas) linearmente independentes? E como expandir um vetor em vetores linearmente independentes?
- 5-8.24** Qual é a vantagem e a desvantagem de condensar graus de liberdade em análise dinâmica de estrutura? O que é a *condensação estática de graus de liberdade*? E a *redução de Guyan*? E o *método de síntese modal* de Craig e Bampton?



CAPÍTULO 6

Análise de Modelo de Multigraus de Liberdade

EM QUE CONSISTE A ANÁLISE DE UM MODELO DE MULTIGRAUS DE LIBERDADE?

Na apresentação do Capítulo 3 foi esclarecido que a análise dinâmica de um modelo pode ser no domínio do tempo ou no domínio da frequência. Em resolução numérica no primeiro domínio, consideram-se as condições de equilíbrio em uma sucessão de instantes, em obtenção gradativa de um histórico de resposta. Em resolução no segundo domínio, a ação é considerada como uma superposição de componentes harmônicos discretos, através da *transformada de Fourier discreta*, para obter as soluções a esses componentes em termos de frequências e posterior transformação dessas soluções ao domínio do tempo, com a aplicação da *transformada de Fourier inversa discreta*. Assim, em análise no domínio do tempo, determina-se a resposta do modelo instante a instante. Já em análise no domínio da frequência, apenas ao final da resolução, obtém-se a resposta no conjunto dos instantes adotados, em termos das coordenadas originais. Ambas as análises podem ser aplicadas a modelos de multigraus de liberdade, cuja construção foi apresentada no capítulo anterior.

Neste capítulo estão desenvolvidos e detalhados os métodos da análise no domínio do tempo, com diversas aplicações numéricas comparativas. Esses métodos são simples e os geralmente utilizados em determinação de resposta nos escritórios de projeto. No próximo capítulo será apresentada a análise no domínio da frequência, que tem formulação matemática mais elaborada e é indicada em casos específicos.

Nesse contexto, o presente capítulo é o mais importante para suporte ao projeto de estruturas de comportamento dinâmico, e está dividido em seções com os seguintes tópicos:

- 6-1** Apresentação de procedimento simplificado de análise de modelo de multigraus de liberdade sob força harmônica, que recai em resolução de um simples sistema de equações algébricas lineares.
- 6-2** Desenvolvimento do *método de superposição modal*, que é o mais utilizado na prática, embora requeira a determinação de modos naturais de vibração e o uso do

denominado *amortecimento proporcional*. A acurácia desse método costuma ser melhorada com a *correção estática dos modos superiores*, que está apresentada juntamente com esse método.

- 6-3 Construção da matriz de amortecimento global com a conceituação de ser *proporcional* ou *não proporcional*.
- 6-4 Detalhamento dos principais *métodos de integração direta* do sistema das equações de movimento de modelo de comportamento linear.
- 6-5 Detalhamento dessa integração para o caso de modelo de comportamento não linear.
- 6-6 Considerações quanto à escolha e aplicação de cada um dos métodos de análise dinâmica apresentados neste capítulo.
- 6-7 Sugestão de exercícios.
- 6-8 Proposição de questões para reflexão.

6-1 PROCEDIMENTO APROXIMADO DE ANÁLISE DE MODELO SOB FORÇA HARMÔNICA

O sistema global das equações de movimento de um modelo de multigrados de liberdade adequadamente vinculado foi apresentado na Seção 5-4 e se escreve:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{d}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{d}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (6-1.1)$$

Trata-se de um sistema de equações diferenciais de segunda ordem na variável tempo, cuja resolução não é uma tarefa simples, pelo fato de essas equações estarem acopladas e poderem ser em número muito elevado. Justifica-se, assim, o desenvolvimento de um procedimento simplista no importante caso de força excitadora harmônica.

Para isso, considera-se que o vetor das forças nodais tenha separação entre uma distribuição espacial de forças, \mathbf{f}_o , e uma função harmônica, o que pode ser escrito sob a forma:

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}_o \cos(\omega t) \quad (6-1.2)$$

em que ω é a frequência forçante.

No caso não amortecido, o sistema anterior particulariza-se em:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{d}(t) = \mathbf{f}_o \cos(\omega t) \quad (6-1.3)$$

Desenvolve-se, a seguir, um procedimento de resolução desse sistema que fornece bons resultados comparativamente às respostas em regime permanente obtidas com métodos consistentes de análise. Para isso, importa relembrar que, no estudo do oscilador simples não amortecido sob a força $f_o \cos(\omega t)$, foi obtida a solução de deslocamento expressa na Equação 2-3.9, que se repete por conveniência:

$$u(t) = \left(u_o - \frac{u_{\text{est.}}}{1-r^2} \right) \cos(\omega_n t) + \frac{v_o}{\omega_n} \sin(\omega_n t) + \frac{u_{\text{est.}}}{1-r^2} \cos(\omega t)$$

Devido às condições iniciais ao movimento, u_o e v_o , a solução anterior não é harmônica simples. Contudo, como em todo fenômeno vibratório sempre há amortecimento que faz

desaparecer a parcela dependente dessas condições e, na prática, a frequência forçante varia rapidamente de zero até um valor de regime permanente, o relevante é a resposta nesse regime, que é a última parcela da equação anterior e que é harmônica. O mesmo ocorre em modelo de multigráus de comportamento linear, para o qual se escreve a solução de deslocamento aproximada em caso de reduzido amortecimento:

$$\mathbf{d}(t) = \mathbf{d}' \cos(\omega t) \quad (6-1.4)$$

onde \mathbf{d}' é um vetor de amplitudes a ser determinado.

Com a substituição dessa solução na Equação 6-1.3, obtém-se:

$$(-\mathbf{M}\omega^2 + \mathbf{K})\mathbf{d}' \cos(\omega t) = \mathbf{f}_0 \cos(\omega t) \rightarrow (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{d}' = \mathbf{f}_0 \quad (6-1.5)$$

Logo, com a notação:

$$\mathbf{K}' = \mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} \quad (6-1.6)$$

o sistema de equações algébricas anterior toma a forma:

$$\mathbf{K}'\mathbf{d}' = \mathbf{f}_0 \quad (6-1.7)$$

A resolução desse sistema fornece o vetor \mathbf{d}' , que completa o conhecimento da solução da Equação 6-1.4 que expressa os históricos de deslocamento dos diversos graus de liberdade do modelo. Isso é obtido sem a integração das equações diferenciais de movimento. Além disso, com base naquele vetor podem ser determinados os históricos dos esforços seccionais e de qualquer outra grandeza dependente da variável tempo.

Vale identificar o efeito da condição de ressonância no presente procedimento. Para isso, de forma análoga à transformação de coordenadas expressa na Equação 5-5.17, considera-se:

$$\mathbf{d}' = \Phi \mathbf{d} \quad (6-1.8)$$

em que Φ é a matriz modal e \mathbf{d} é um vetor de amplitudes modais.

Logo, a partir da Equação 6-1.5 escreve-se o sistema de equações algébricas:

$$\Phi^T (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \Phi \mathbf{d} = \Phi^T \mathbf{f}_0$$

Tendo-se em conta as condições de ortonormalização da matriz modal como expresso nas Equações 5-5.13 e 5-5.15, esse sistema se simplifica e fornece o vetor de amplitudes modais:

$$(\mathbf{\Omega} - \omega^2 \mathbf{I}) \mathbf{d} = \Phi^T \mathbf{f}_0 \rightarrow \mathbf{d} = (\mathbf{\Omega} - \omega^2 \mathbf{I})^{-1} \Phi^T \mathbf{f}_0 \quad (6-1.9)$$

Nessa expressão do vetor de coordenadas modais, tem-se a matriz diagonal:

$$(\mathbf{\Omega} - \omega^2 \mathbf{I})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_1^2 - \omega^2} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\omega_n^2 - \omega^2} \end{bmatrix} \quad (6-1.10)$$

Essa matriz evidencia que, à medida que a frequência forçante se aproxima de uma das frequências naturais, cresce o valor da amplitude modal de mesma ordem que essa frequência

e que, na coincidência de frequências, ocorre indeterminação da solução, em caracterização do fenômeno de ressonância.¹

EXEMPLO 6-1.1

A viga do Exemplo 5-5.1 é agora considerada com a razão de amortecimento de 0,02 e como suporte a um equipamento rotativo de 100 kg, que opera em regime permanente de 70 rad/s, com 1 kN de força de inércia centrífuga, como esquematizado na Figura E6-1.1a a seguir. Para o deslocamento transversal da seção média, compara-se a solução do presente procedimento com a solução do método de superposição modal, que será desenvolvido na próxima seção e que considera condições iniciais nulas. Para isso, utiliza-se a discretização em cinco pontos nodais igualmente espaçados, que corresponde a quatro elementos, como mostrado na parte inferior da mesma figura.

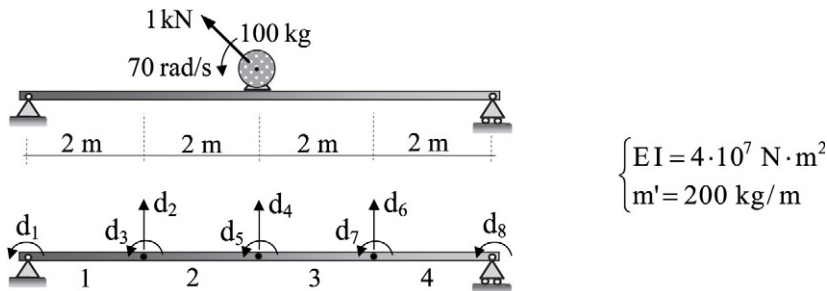


FIGURA E6-1.1a Viga biapoiaada de suporte a um motor desbalanceado.

- Matriz de rigidez e matriz de massa consistente de cada elemento:

$$\mathbf{K}^{(e)} = 10^7 \begin{bmatrix} 6 & 6 & -6 & 6 \\ \cdot & 8 & -6 & 4 \\ \cdot & \cdot & 6 & -6 \\ \text{sim.} & \cdot & \cdot & 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}^{(e)} = \begin{bmatrix} 148,57 & 41,905 & 51,429 & -24,762 \\ \cdot & 15,238 & 24,762 & -11,429 \\ \cdot & \cdot & 148,57 & -41,905 \\ \text{sim.} & \cdot & \cdot & 15,238 \end{bmatrix}$$

- Matriz de rigidez e matriz de massa, globais e restringidas:

$$\mathbf{K} = 10^7 \begin{bmatrix} 8 & -6 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & 12 & 0 & -6 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & 16 & -6 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 12 & 0 & -6 & 6 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 16 & -6 & 4 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 12 & 0 & 6 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 16 & 4 \\ \text{sim.} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 8 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 15,238 & 24,762 & -11,429 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & 297,14 & 0 & 51,429 & -24,762 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & 30,476 & 24,762 & -11,429 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 397,14 & 0 & 51,429 & -24,762 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 30,476 & 24,762 & -11,429 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 297,14 & 0 & -24,762 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 30,476 & -11,429 \\ \text{sim.} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 15,238 \end{bmatrix}$$

¹ O efeito de ressonância é mais intenso quando a frequência forçante é próxima da frequência fundamental.

- Vetor das forças nodais:

$$\mathbf{f}_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 10^3 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

- Em resolução do sistema de equações algébricas expresso na Equação 6-1.7, tem-se:

$$\mathbf{K}' = \mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} = 10^7 \begin{bmatrix} 7,9925 & -6,0121 & 4,0056 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & 11,854 & 0 & -6,0252 & 6,0121 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & 15,981 & -6,0121 & 4,0056 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & 11,805 & 0 & -6,0252 & 6,0121 & 0 \\ . & . & . & . & 15,985 & -6,0121 & 4,0056 & 0 \\ . & . & . & . & . & 11,855 & 0 & 6,0121 \\ . & . & . & . & . & . & 15,985 & 4,0056 \\ \text{sim.} & . & . & . & . & . & . & 7,9925 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \mathbf{d}' = \mathbf{K}'^{-1} \mathbf{f}_0 = 10^{-3} [0,652 \ 1,174 \ 0,460 \ 1,659 \ 0 \ 1,174 \ -0,460 \ -0,652]^T$$

O quarto coeficiente desse vetor é a amplitude da oscilação em regime permanente do deslocamento transversal da seção média. A Figura E6-1.1b apresenta os históricos desse deslocamento, obtidos com o espaçamento ($\Delta t = 0,005$ s), que é pouco menor do que $T/15$, sendo ($T = 0,08975$ s) o período da força excitadora. A representação em linha pontilhada é a do procedimento desenvolvido anteriormente, e a representação em linha contínua é a do *método de superposição modal* o amortecimento ($\xi = 0,02$). Observa-se que, na proximidade de dois segundos, os históricos passam a ser praticamente coincidentes. Isso evidencia o cessar da influência das condições iniciais e a eficácia do referido desenvolvido.

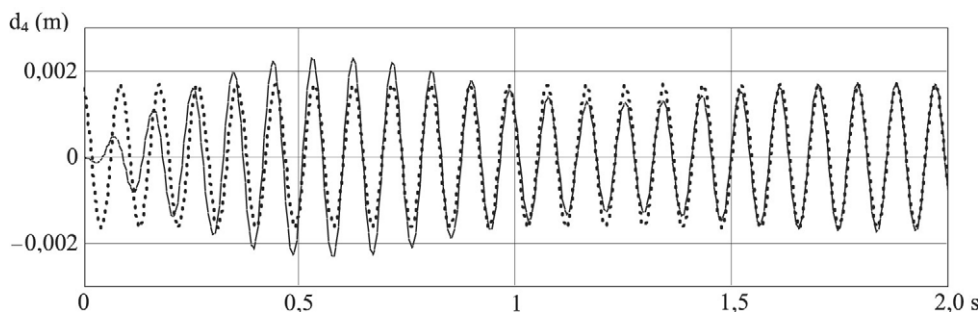


FIGURA E6-1.1b Históricos do deslocamento da seção média.

Como a resposta em regime transiente tem pouca relevância e os modelos estruturais são usualmente fracamente amortecidos, conclui-se que o presente procedimento fornece excelentes resultados comparativamente a método consistente de determinação de resposta, com a vantagem de requerer reduzido processamento.

6-2 MÉTODO DE SUPERPOSIÇÃO MODAL

No início da seção anterior foi afirmado que não é tarefa simples resolver o sistema das equações de movimento de modelo de multigráus de liberdade, principalmente porque essas equações são acopladas. Para facilitar essa resolução, esse acoplamento é removido no método de superposição modal.

Os modos naturais de vibração são características de cada modelo de estrutura, úteis ao presente método, que se baseia na transformação das coordenadas geométricas em coordenadas generalizadas modais. Isso porque aqueles modos formam uma base completa no espaço dessas coordenadas e diagonalizam, através de transformações similares, as matrizes de rigidez e de massa globais. A principal vantagem é que, com a transformação e o denominado *amortecimento proporcional*, são obtidas equações de movimento desacopladas análogas às de osciladores simples amortecidos, além de apenas as primeiras dessas equações terem participação preponderante na resposta do modelo. Assim, transforma-se a resolução de um sistema de equações diferenciais em resolução de um reduzido número de equações de movimento de osciladores simples, para posterior obtenção da resposta do modelo através da soma das soluções dessas equações, transformadas ao espaço físico, o que justifica o nome de *superposição modal*.

6-2.1 Transformação modal

Considera-se a transformação de coordenadas expressa na Equação 5-5.17, que se reescreve por conveniência:

$$\mathbf{d}(t) = \sum_{j=1}^n \varphi_j \mathbf{d}_j(t) \rightarrow \boxed{\mathbf{d}(t) = \Phi \mathbf{d}(t)} \quad (6-2.1)$$

onde $\mathbf{d}(t)$ é o vetor das *coordenadas modais*.² Com a substituição dessa transformação no sistema de equações de movimento expresso na Equação 6-1.1 e a pré-multiplicação do resultado por Φ^T , obtém-se:

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi \ddot{\mathbf{d}}(t) + \Phi^T \mathbf{C} \Phi \dot{\mathbf{d}}(t) + \Phi^T \mathbf{K} \Phi \mathbf{d}(t) = \Phi^T \mathbf{f}(t) \quad (6-2.2)$$

Logo, com a propriedade de ortonormalização da matriz modal com respeito às matrizes de massa e de rigidez globais (vide Equações 5-5.13 e 5-5.15), a expressão anterior toma a forma:

$$\boxed{\ddot{\mathbf{d}}(t) + \Phi^T \mathbf{C} \Phi \dot{\mathbf{d}}(t) + \Omega \mathbf{d}(t) = \mathbf{f}(t)} \quad (6-2.3)$$

onde

$$\boxed{\mathbf{f}(t) = \Phi^T \mathbf{f}(t)} \quad (6-2.4)$$

é o vetor das *forças modais*. A referida forma expressa um sistema de equações de movimento em termos das coordenadas modais.

A solução completa do sistema anterior inclui o efeito das condições iniciais, o que requer a transformação dessas condições ao espaço das coordenadas modais. Para isso, multiplica-se a transformação de coordenadas expressa na Equação 6-2.1 por $\Phi^T \mathbf{M}$, de maneira a obter:

$$\Phi^T \mathbf{M} \mathbf{d}(t) = \Phi^T \mathbf{M} \Phi \mathbf{d}(t) = \mathbf{d}(t) \rightarrow \begin{cases} \mathbf{d}(t) = \Phi^T \mathbf{M} \mathbf{d}(t) \\ \dot{\mathbf{d}}(t) = \Phi^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{d}}(t) \end{cases} \rightarrow \boxed{\begin{cases} \mathbf{d}(t_0) = \Phi^T \mathbf{M} \mathbf{d}(t_0) \\ \dot{\mathbf{d}}(t_0) = \Phi^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{d}}(t_0) \end{cases}} \quad (6-2.5)$$

² Na Seção 9-7 será apresentada a geração de *vetores de Ritz* e de *vetores de Lanczos*, que também podem ser utilizados em transformação de coordenadas que favorece a resolução do sistema global das equações de movimento.

As equações modais expressas na Equação 6-2.3 estão acopladas através da matriz de amortecimento global, que devido a dificuldades físicas de caracterização do coeficiente de amortecimento viscoso não é construída a partir das matrizes de amortecimento das barras ou elementos finitos do modelo discreto. É prático especificar o amortecimento em termos de razões de amortecimento de modos naturais de vibração e, para facilitar a resolução do sistema global das equações de movimento, arbitra-se que esses modos sejam também ortogonais com respeito à matriz de amortecimento global, de maneira a se ter:

$$\Phi^T \mathbf{C} \Phi = \mathbf{C}_d = 2 \begin{bmatrix} \omega_1 \xi_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \omega_j \xi_j & \\ & & & \ddots \\ & & & & \omega_n \xi_n \end{bmatrix} \quad (6-2.6)$$

em que ξ_j é a razão de amortecimento associada ao j -ésimo modo natural de vibração.³

Assim, \mathbf{C}_d é uma matriz diagonal de coeficiente genérico:

$$\Phi_i^T \mathbf{C} \Phi_j = 2\omega_j \xi_j \delta_{ij} \quad (6-2.7)$$

Logo, a partir da Equação 6-2.3 escreve-se a j -ésima equação modal:

$$\ddot{a}_j(t) + 2\omega_j \xi_j \dot{a}_j(t) + \omega_j^2 a_j(t) = f_j(t) \quad (6-2.8)$$

em que se tem a força modal:

$$f_j(t) = \Phi_j^T \mathbf{f}(t) \quad (6-2.9)$$

Consequentemente, com a Equação 6-2.8 e ($j = 1, 2, \dots, n$), tem-se um sistema de equações modais desacopladas.

A resolução das equações modais fornece, para cada instante t_i , o vetor de soluções modais:

$$\mathbf{a}(t_i) = \begin{Bmatrix} a_1(t_i) \\ \vdots \\ a_j(t_i) \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (6-2.10)$$

A seguir, faz-se a transformação desse vetor às coordenadas geométricas iniciais:

$$\mathbf{d}(t_i) = \Phi \mathbf{a}(t_i) \quad (6-2.11)$$

Assim, com ($t_i = t_1, t_2, \dots$) obtêm-se os históricos de todos os graus de liberdade do modelo, com base nos quais podem ser obtidos os históricos das forças resistentes elásticas $\mathbf{Kd}(t_i)$.

Em procedimento semelhante, as velocidades modais $\dot{a}_j(t_i)$ e as acelerações modais $\ddot{a}_j(t_i)$ podem ser transformadas ao espaço das coordenadas geométricas através de:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{d}}(t_i) = \Phi \dot{\mathbf{a}}(t_i) \\ \ddot{\mathbf{d}}(t_i) = \Phi \ddot{\mathbf{a}}(t_i) \end{cases} \quad (6-2.12)$$

³ Na Seção 6-3.1 serão apresentados procedimentos de construção da matriz de amortecimento a partir de razões de amortecimento de modos naturais de vibração.

para obter os históricos das forças de amortecimento $\mathbf{C}\dot{\mathbf{d}}(t_i)$ e de inércia $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}(t_i)$. Também podem ser determinados os históricos dos esforços seccionais e de qualquer outra grandeza associada à resposta do modelo.

Com a inclusão de todos os modos naturais de vibração na matriz de transformação Φ , não são introduzidas novas aproximações na resolução do sistema global das equações de movimento, pelo fato de esses modos formarem uma base completa no espaço n-dimensional do modelo discreto.⁴ Uma grande vantagem do presente método é não ser necessário utilizar matriz de transformação com todos esses modos. Isso porque, os de frequência mais elevadas praticamente não têm participação na resposta do modelo, além do que, os primeiros modos naturais de vibração são os de maior acurácia no modelo discreto, comparativamente aos correspondentes modos do modelo contínuo original.

Assim, é necessário escolher um número de modos de vibração que conduza a resposta com acurácia considerada adequada. Esse número pode ser determinado experimentalmente através de análises com crescentes números de modos e com a avaliação da diferença entre os correspondentes resultados. Quando se alcança diferença insignificante entre resultados de análises consecutivas há indicação da utilização de um número de modos suficientes. Entretanto, importa racionalizar essa escolha.

Sem considerar o efeito de condições iniciais, o número de modos a serem incluídos na matriz de transformação de coordenadas depende da distribuição espacial da ação externa e da correlação entre o conteúdo de frequências dessa ação e as frequências naturais do modelo. O contexto daquela distribuição será tratado na próxima subseção e a referida correlação é detalhada a seguir.

- a) Com forças nodais externas harmônicas de uma única frequência ω , a força modal $\zeta_j(t)$ é também harmônica nessa frequência. Caso essa frequência seja bem menor do que a frequência fundamental do modelo, a razão ω/ω_1 tem valor muito pequeno. Logo, o fator de amplificação dinâmica correspondente a essa razão é próximo da unidade e, como evidencia a Figura 3-4.4, a amplitude de cada resposta modal em regime permanente é praticamente igual ao pseudodeslocamento estático da correspondente força modal. Em outras palavras, em caso de o período ($T = 2\pi/\omega$) ser bem maior do que o período fundamental do modelo, T_1 , a ação externa é “lenta relativamente a esse período”, o que caracteriza comportamento quase-estático e que uma análise dinâmica não tem relevância. Assim, com as usuais razões de amortecimento e $(\omega/\omega_1 \leq 0,2 \rightarrow T > 5T_1)$, é suficiente efetuar apenas análise estática.
- b) Ainda com forças nodais externas harmônicas de uma única frequência ω , mas com $(\omega/\omega_1 > 0,2)$, à medida que uma frequência natural ω_j se afasta por valor superior da frequência forçante, a razão ω/ω_j decresce de valor. Logo, tem-se redução do efeito dinâmico da j-ésima força modal, e o correspondente efeito estático pode ser considerado como será apresentado na próxima subseção. Assim, com as usuais razões de amortecimento e $(\omega/\omega_j < 0,25)$, o correspondente fator de amplificação dinâmica é próximo da unidade, sugere-se excluir, da transformação modal, os modos naturais de vibração de frequências maiores do que quatro vezes ω .⁵

⁴ Não são consideradas as aproximações inerentes à aritmética de *ponto-flutuante* dos computadores.

⁵ Optou-se por considerar $\omega/\omega_j < 0,25$ e não $\omega/\omega_j \leq 0,20$, a exemplo da sugestão anterior, porque no presente caso há a influência dos modos de vibração anteriores a ω_j .

- c) Em caso de forças nodais periódicas não harmônicas, os componentes harmônicos mais significativos dessas forças podem ser identificados através de *série de Fourier*. Logo, o critério de truncamento modal sugerido anteriormente pode ser adotado para esses componentes.
- d) Já com forças nodais de leis aperiódicas, pode ser determinado o conteúdo de frequência através de *transformada de Fourier*, como será apresentado na Seção 7-2. Nesse conteúdo podem ser identificados os componentes harmônicos mais significativos, para então ser adotado o sugerido critério de truncamento modal.⁶

A utilização de p modos de vibração requer a resolução do problema de autovalor:⁷

$$\mathbf{K}_p \Phi_p = \mathbf{M} \Phi_p \Omega_p \quad (6-2.13)$$

em que são utilizadas as notações:

$$\Phi_p = [\varphi_1 \cdots \varphi_j \cdots \varphi_p] \quad (6-2.14)$$

e

$$\Omega_p = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \omega_p^2 \end{bmatrix} \quad (6-2.15)$$

Com essa matriz modal, efetua-se a transformação:

$$\mathbf{d}(t) = [\varphi_1 \cdots \varphi_j \cdots \varphi_p] \begin{Bmatrix} \mathcal{d}_1(t) \\ \vdots \\ \mathcal{d}_p(t) \end{Bmatrix} \rightarrow \mathbf{d}(t) = \Phi_p \mathcal{d}_p(t) \quad (6-2.16)$$

Logo, o sistema de equações modais fica com a notação:

$$\ddot{\mathcal{d}}_p(t) + \mathbf{C}_d \dot{\mathcal{d}}_p(t) + \Omega \mathcal{d}_p(t) = \mathcal{f}_p(t) \quad (6-2.17)$$

em que se tem o vetor das forças modais:

$$\mathcal{f}_p(t) = \Phi_p^T \mathbf{f}(t) \quad (6-2.18)$$

Quanto às condições iniciais ao movimento, escreve-se a partir da Equação 6-2.5:

$$\begin{cases} \mathcal{d}(t_0) = \Phi_p^T \mathbf{M} \mathbf{d}(t_0) \\ \dot{\mathcal{d}}(t_0) = \Phi_p^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{d}}(t_0) \end{cases} \quad (6-2.19)$$

Após a resolução das equações modais, têm-se as forças elásticas:

$$\mathbf{f}_{el}(t) = \mathbf{K} \Phi_p \mathcal{d}_p(t) \quad (6-2.20)$$

⁶ Terremotos costumam excitar os modos naturais de vibração de períodos entre 0,1 a 10 s. Vento é propenso a excitar modos de vibração de períodos a partir de 1s.

⁷ Resolução eficiente desse problema será tratada no Capítulo 9.

que, com a consideração do problema de autovalor expresso na Equação 6-2.13, se escrevem:

$$\mathbf{f}_{el}(t) = \mathbf{M} \Phi_p \Omega_p \mathcal{A}_p(t) \rightarrow \mathbf{f}_{el}(t) = \mathbf{M} \Phi_p \begin{Bmatrix} \vdots \\ \omega_i^2 \mathcal{A}_i(t) \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (6-2.21)$$

Como nessa expressão as frequências naturais ocorrem ao quadrado, evidencia-se a necessidade de um maior número de modos naturais de vibração em determinação de forças internas do que em determinação de deslocamentos nodais, com a mesma acurácia.

O método de superposição modal não requer a construção da matriz de amortecimento global, e a resolução das equações modais pode ser levada a efeito com um dos métodos desenvolvidos no Capítulo 3.

Com truncamento modal, esse método pode ser programado de acordo como o seguinte Algoritmo 6-2.1:

- Especificação do número p de modos naturais de vibração, das razões de amortecimento desses modos e de $\mathbf{d}(t_0)$, $\dot{\mathbf{d}}(t_0)$ e $\mathbf{f}(t_i)$ em cada discretização do tempo.
 - Construção das matrizes \mathbf{K} e \mathbf{M} .
 - A resolução do problema de autovalor $\mathbf{K} \Phi_p = \mathbf{M} \Phi_p \Omega_p$ fornece Φ_p e Ω_p .
- $\mathcal{A}(t_0) = \Phi_p^T \mathbf{M} \mathbf{d}(t_0)$, $\dot{\mathcal{A}}(t_0) = \Phi_p^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{d}}(t_0)$
- $i = 1, 2, 3, \dots$ até o número total de instantes de discretização
- $\mathbf{d}(t_i) = \mathbf{0}$
- $\mathbf{f}_p(t_i) = \Phi_p^T \mathbf{f}(t_i)$ (Vetor das p forças modais no instante t_i)
- $j = 1, 2, \dots, p$
- A resolução de $\ddot{\mathcal{A}}_j(t_i) + 2\omega_j \xi_j \dot{\mathcal{A}}_j(t_i) + \omega_j^2 \mathcal{A}_j(t_i) = \mathbf{f}_j(t_i)$ fornece $\mathcal{A}_j(t_i)$
- $\mathbf{d}(t_i) = \mathbf{d}(t_i) + \Phi_p \mathcal{A}_j(t_i)$

ALGORITMO 6-2.1 Método de superposição modal com truncamento.

O método de superposição modal se mostra indicado para análise de modelos de elevado número de graus de liberdade, em determinação de resposta de longa duração, principalmente em caso de uma transformação de coordenadas com um reduzido número de modos de vibração fornecer resultados com acurácia adequada.⁸ Uma de suas vantagens é o amortecimento ser especificado em nível das equações modais. Contudo, esse método requer o chamado *amortecimento proporcional*, que será descrito na Seção 6-3. Além do que, por ser método baseado em superposição, requer também comportamento linear.⁹

⁸ Como foi apresentado na Seção 5.6, base modal é também utilizada em condensação dinâmica de graus de liberdade em nível de superelemento, com o nome de *síntese modal de componentes*.

⁹ Diversas estratégias de adaptação desse método a modelos de comportamento não linear são encontradas na literatura. Contudo, como se trata de método de superposição de respostas individuais, essas estratégias não têm caráter de generalização e são bem menos indicadas do que os métodos de integração numérica direta que serão tratados na Seção 6-5.

EXEMPLO 6-2.1

Para ilustrar o método de superposição modal, reconsidera-se a viga do Exemplo 6-1.1, inicialmente sob a força de $1000 \cos(70t)$ em newtons, na seção média. Utiliza-se a discretização em cinco pontos nodais mostrada na Figura E6-1.1a, matriz de massa consistente e a razão de amortecimento de 0,02 para todos os modos de vibração.

No caso, a frequência forçante é próxima à primeira frequência natural, $\omega_1 = 65,03$ rad/s, e bem afastada da segunda frequência natural, $\omega_2 = 276,85$ rad/s. Logo, apenas o primeiro modo natural de vibração tem participação efetiva na resposta do deslocamento da seção média. Isso é evidenciado na Figura E6-2.1a, que mostra representações coincidentes das soluções do *método de superposição modal* com oito modos naturais de vibração e com apenas o primeiro modo de vibração.

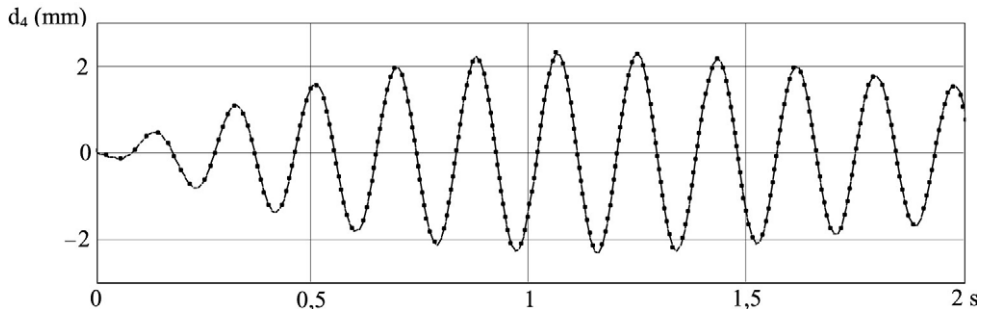


FIGURA E6-2.1a Históricos do deslocamento da seção média.

Considera-se, agora, a viga representada na Figura E6-2.1b em que há duas forças harmônicas externas defasadas de $3\pi/4$.¹⁰

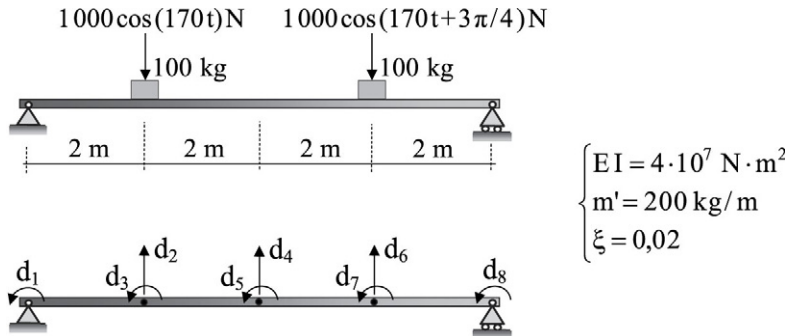
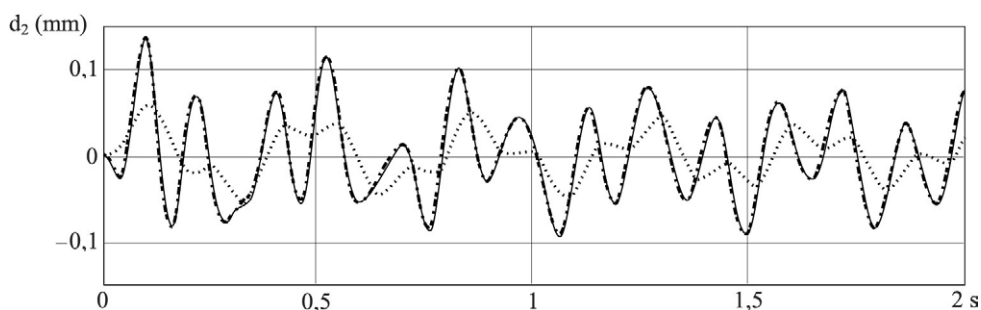


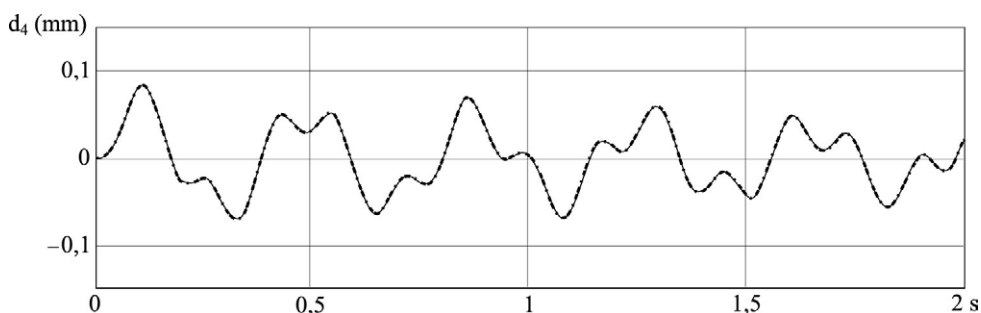
FIGURA E6-2.1b Viga biapoada sob duas forças harmônicas externas.

A Figura E6-2.1c apresenta os históricos do deslocamento da seção sob a primeira das referidas forças. A representação em linha contínua é a do *método de superposição modal* completa (que coincidiu graficamente com a desse método com três primeiros modos de vibração), a em linha pontilhada é a desse método com o primeiro modo natural de vibração e a em traço-ponto, com os dois primeiros modos naturais de vibração. Essas representações evidenciam a necessidade de apenas dois modos de vibração para a obtenção de resposta adequada quanto ao referido deslocamento.

¹⁰ Foram arbitradas frequências forçantes mais elevadas do que as encontradas na prática, com o objetivo de verificação do *método de superposição modal* em caso de reduzido número de graus de liberdade.

**FIGURA E6-2.1c** Históricos do deslocamento da seção de aplicação de uma das forças.

Finalmente, a [Figura E6-2.1d](#) apresenta, com os mesmos códigos de traçado anteriores, os históricos do deslocamento da seção média da viga. Diferentemente do que o caso anterior, as representações com um, dois e oito modos de vibração estão graficamente coincidentes, o que evidencia que, para o referido deslocamento, basta transformação com o primeiro modo.

**FIGURA E6-2.1d** Históricos do deslocamento da seção média.

6-2.2 Correção estática dos modos superiores

No *método de superposição* há duas fontes de erro, o truncamento modal e a resolução das equações modais. Quanto a esse truncamento, o número de modos de vibração a incluir na transformação de coordenadas depende da distribuição espacial da ação externa e da correlação entre o conteúdo de frequências dessa ação e as frequências naturais do modelo. Na subseção anterior foi esclarecida essa correlação, que será detalhada quando do desenvolvimento da transformada de Fourier, no próximo capítulo. Considera-se, agora, a questão da distribuição espacial dessas ações.

Um conjunto dos p primeiros modos define um subespaço do espaço n -dimensional inicial, em que pode não estar bem representada a referida distribuição. Para esclarecimento, na parte esquerda da [Figura 6-2.1](#) está mostrado um modelo unidimensional com seis graus de liberdade, na parte central da mesma figura estão esquematizados os correspondentes três primeiros modos naturais de vibração, e na parte direita da figura estão ilustradas duas distribuições espaciais de forças de efeitos estáticos diferentes. A deformada da primeira dessas distribuições tem configuração semelhante à do primeiro modo de vibração, e a

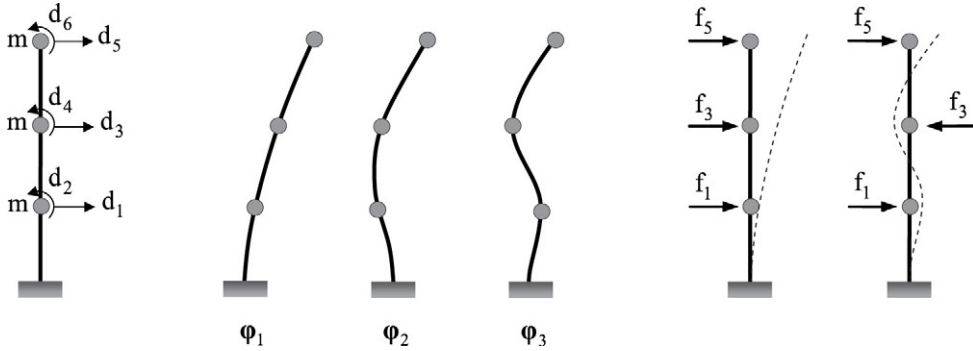


FIGURA 6-2.1 Modelo com seis graus de liberdade e duas distribuições espaciais de forças externas.

deformada da segunda, à do terceiro modo. Consequentemente, em caso de se adotar a transformação de coordenadas com apenas os dois primeiros modos, essa última configuração praticamente não está contida no subespaço definido por esses dois modos. Pode-se reduzir o correspondente erro com a aplicação da correção estática dos modos superiores desenvolvida nesta seção.

Para desenvolver o procedimento de *correção estática dos modos superiores*,¹¹ que equivale ao *método de aceleração modal*,¹² considera-se a seguinte divisão da matriz modal:

$$\Phi = [\Phi_p \ \Phi_{n-p}] \quad (6-2.22)$$

onde Φ_{n-p} representa o conjunto dos $(n-p)$ modos superiores, escreve-se a transformação de coordenadas sob a forma partida:

$$\mathbf{d}(t) = \Phi_p \mathbf{a}_p(t) + \Phi_{n-p} \mathbf{a}_{n-p}(t) \quad (6-2.23)$$

Para obter a decomposição das forças nodais externas nos subespaços definidos pelos vetores contidos nas matrizes Φ_p e Φ_{n-p} , tem-se, com base em $(\Phi^T \mathbf{M} \Phi = \mathbf{I})$, que $(\Phi^{-T} = \mathbf{M} \Phi)$. Assim, a partir da Equação 6-2.4 escreve-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(t) = \mathbf{M} \Phi \mathbf{a}(t) &\rightarrow \mathbf{f}(t) = \mathbf{M} [\Phi_p \ \Phi_{n-p}] \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_p(t) \\ \mathbf{a}_{n-p}(t) \end{Bmatrix} \\ &\rightarrow \mathbf{f}(t) = \mathbf{M} \Phi_p \mathbf{a}_p(t) + \mathbf{M} \Phi_{n-p} \mathbf{a}_{n-p}(t) = \mathbf{f}_p(t) + \mathbf{f}_{n-p}(t) \end{aligned} \quad (6-2.24)$$

Logo, com a transformação modal truncada expressa na Equação 6-2.16, obtém-se dessa decomposição a parcela desconsiderada das forças nodais externas:

$$\mathbf{f}_{n-p}(t) = \mathbf{M} \Phi_{n-p} \mathbf{a}_{n-p}(t) = \mathbf{f}(t) - \mathbf{M} \Phi_p \mathbf{a}_p(t) \quad (6-2.25)$$

¹¹ Hansteen, O.E. & Bell, K., 1979, *On the Accuracy of Mode Superposition in Structural Dynamics*, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, vol. 7, nº 5, pp. 405-411.

¹² Soriano, H.L. & Venancio-Filho, F., 1988, *On the Modal Acceleration Method in Structural Dynamics, Mode Truncation and Static Correction*, Computers & Structures, vol. 29, nº 5, pp. 777-782.

Para incluir, na resposta de deslocamentos, o efeito estático dessa parcela, sem a necessidade do uso dos modos superiores, modifica-se a transformação da Equação 6-2.23 para a forma:

$$\mathbf{d}(t) = \Phi_p \mathbf{d}_p(t) + \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{f}(t) - \mathbf{M} \Phi_p \mathbf{d}_p(t)) \quad (6-2.26)$$

Essa solução pode ser escrita de uma forma mais adequada ao processamento automático. Para isso, a partir do problema de autovalor $(\mathbf{K} \Phi_p = \mathbf{M} \Phi_p \Omega_p)$, tem-se:

$$\Phi_p = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \Phi_p \Omega_p \rightarrow \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \Phi_p = \Phi_p \Omega_p^{-1} \quad (6-2.27)$$

Logo, com a substituição dessa expressão na equação que lhe precede, chega-se à solução de deslocamento com a correção estática dos modos superiores sob a nova forma:

$$\mathbf{d}(t) = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f}(t) + \Phi_p (\mathbf{d}_p(t) - \Omega_p^{-1} \mathbf{d}_p(t)) \quad (6-2.28)$$

Nessa última expressão, a inversão da matriz espectral Ω_p não oferece dificuldades, porque a inversa é uma matriz diagonal formada pelos recíprocos dos p primeiros autovalores. Já quanto à determinação do produto $\mathbf{K}^{-1} \mathbf{f}(t)$, não é indicado utilizar a matriz \mathbf{K}^{-1} pelo fato de essa inversa ser uma matriz cheia, além de requerer, em sua determinação, elevado número de operações numéricas. Em caso de modelo com muitos graus de liberdade, é indicado obter o resultado daquele produto, em cada instante t_i , através da resolução do sistema de n equações algébricas:

$$\mathbf{K} \mathbf{d}_{t_i} = \mathbf{f}(t_i) \quad (6-2.29)$$

Logo, para o instante t_i , escreve-se a Equação 6-2.28 sob a forma:

$$\mathbf{d}(t_i) = \mathbf{d}_{t_i} + \Phi_p (\mathbf{d}_p(t_i) - \Omega_p^{-1} \mathbf{d}_p(t_i)) \quad (6-2.30)$$

Assim, em caso geral, o presente procedimento de aprimoramento da acurácia da solução do método de superposição modal requer a resolução do sistema de n equações algébricas expresso na Equação 6-2.29, em cada instante de discretização, o que demanda extenso processamento em resposta de longa duração. Esse procedimento se torna mais vantajoso em caso de o vetor das forças nodais externas admitir a separação entre uma distribuição espacial constante de forças, \mathbf{f}_0 , e uma função do tempo, $f(t)$, sob a forma:¹³

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}_0 f(t) \quad (6-2.31)$$

Com a substituição desse vetor na Equação 6-2.28, obtém-se a solução de deslocamento com a nova expressão:

$$\mathbf{d}(t) = (\mathbf{K}^{-1} \mathbf{f}_0) f(t) + \Phi_p (\mathbf{d}_p(t) - \Omega_p^{-1} \Phi_p^T \mathbf{f}_0 f(t)) \quad (6-2.32)$$

Essa expressão requer a resolução do sistema de equações algébricas:

$$\mathbf{K} \mathbf{d}_0 = \mathbf{f}_0 \quad (6-2.33)$$

para se ter o vetor \mathbf{d}_0 .

¹³ Essa separação é de uso prático, como em caso de excitação sísmica e de multidão em estádio, por exemplo.

Logo, escreve-se a solução de deslocamento com a correção estática dos modos superiores que diz respeito ao instante t_i :

$$\mathbf{d}(t_i) = \mathbf{d}_0 f(t_i) + \Phi_p (\mathcal{d}_p(t_i) - \Omega_p^{-1} \Phi_p^T \mathbf{f}_0 f(t_i)) \quad (6-2.34)$$

Com a referida separação de variáveis, o presente procedimento de correção requer uma única resolução de sistema de n equações algébricas lineares, de acordo com o seguinte **Algoritmo 6-2.2**:

- Especificação do número p de modos naturais de vibração, das razões de amortecimento desses modos e de $\mathbf{d}(t_0)$, $\dot{\mathbf{d}}(t_0)$, \mathbf{f}_0 e $\mathbf{f}(t_i)$ em cada discretização do tempo.
- Construção das matrizes \mathbf{K} e \mathbf{M} .
- A resolução do sistema de equações $\mathbf{K} \mathbf{d}_0 = \mathbf{f}_0$ fornece \mathbf{d}_0 .
- A resolução do problema de autovalor $\mathbf{K} \Phi_p = \mathbf{M} \Phi_p \Omega_p$ fornece Φ_p e Ω_p .
- $\mathcal{d}(t_0) = \Phi_p^T \mathbf{M} \mathbf{d}(t_0)$, $\dot{\mathcal{d}}(t_0) = \Phi_p^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{d}}(t_0)$, $\mathcal{f}_{op} = \Phi_p^T \mathbf{f}_0$
- $i = 1, 2, 3, \dots$ até o número total de instantes de discretização
- $\mathcal{f}_p(t_i) = \mathcal{f}_{op} f(t_i)$ (Vetor das p forças modais no instante t_i)
- $j = 1, 2, \dots, p$
- A resolução de $\ddot{\mathcal{d}}_j(t_i) + 2\omega_j \xi_j \dot{\mathcal{d}}_j(t_i) + \omega_j^2 \mathcal{d}_j(t_i) = \mathcal{f}_j(t_i)$, com o atendimento das condições iniciais, fornece $\mathcal{d}_j(t_i)$.
- (As p soluções $\mathcal{d}_j(t_i)$ compõem o vetor das coordenadas modais $\mathcal{d}_p(t_i)$)
- $\mathbf{d}(t_i) = \mathbf{d}_0 f(t_i) + \Phi_p (\mathcal{d}_p(t_i) - \Omega_p^{-1} \mathcal{f}_p(t_i))$

ALGORITMO 6-2.2 *Método de superposição modal com correção estática.*

Com base na Equação 6-2.25 e na separação de variáveis expressa na Equação 6-2.31, define-se a norma do erro de truncamento modal quanto à distribuição espacial das forças nodais externas:

$$\|e\| = \frac{\mathbf{f}_0^T (\mathbf{f}_0 - \mathbf{M} \Phi_p \Phi_p^T \mathbf{f}_0)}{\mathbf{f}_0^T \mathbf{f}_0} \quad (6-2.35)$$

Um valor muito pequeno dessa norma indica adequada representação da referida distribuição, quando então a presente correção não se faz necessária.

EXEMPLO 6-2.2

Para comprovar o procedimento de correção desenvolvido anteriormente, utiliza-se a viga biapoiada esquematizada na **Figura E6-2.2a**, em que estão apresentadas as correspondentes características fundamentais e a discretização em cinco pontos nodais.

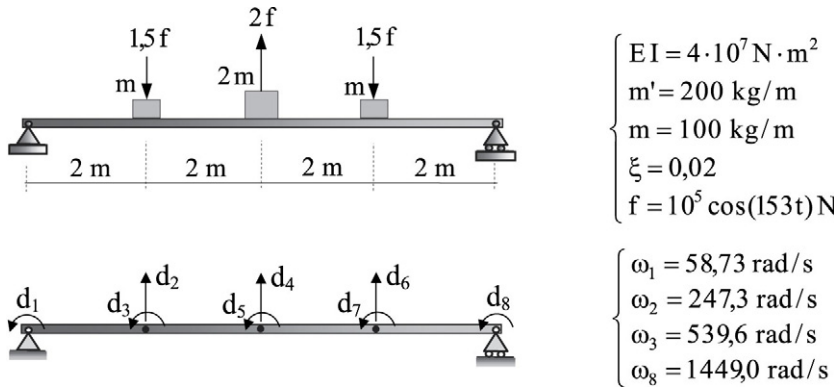


FIGURA E6-2.2a Viga biapoada sob três forças externas.

A deformada da viga sob a ação estática das amplitudes das forças externas e o terceiro modo natural de vibração (de comprimento euclidiano unitário) estão representados na [Figura E6-2.2b](#). A frequência das forças externas é a média aritmética entre a primeira e a segunda frequências naturais, e o terceiro modo de vibração tem forma assemelhada à deformada estática. Assim, é de se esperar que esse modo tenha participação relevante em resposta de deslocamentos.

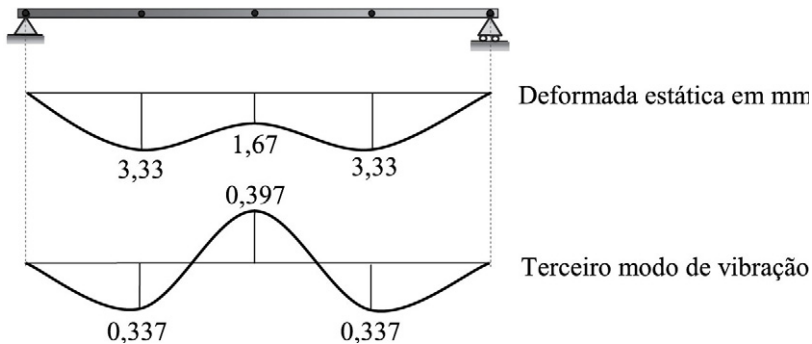


FIGURA E6-2.2b Deformada estática e modo de vibração.

Os históricos do deslocamento da seção média da viga estão mostrados na [Figura E6-2.2c](#). A representação em linha contínua é a da superposição modal completa, a representação em linha

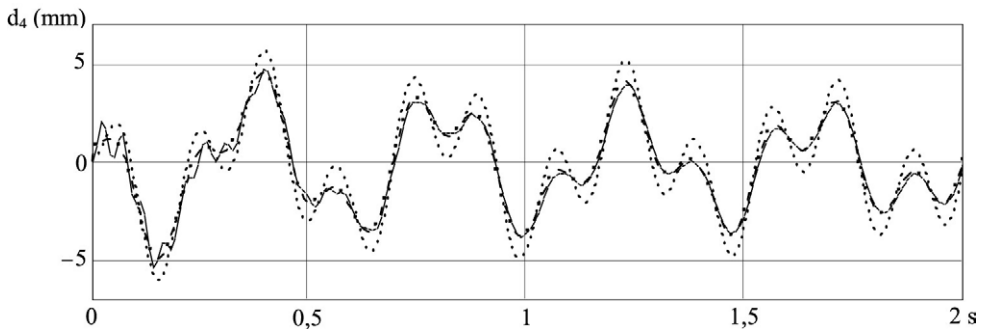


FIGURA E6-2.2c Históricos do deslocamento da seção média.

pontilhada é a obtida com os dois primeiros modos de vibração, e a representação em traço-ponto é a obtida com esses dois modos, mais a correção estática dos modos superiores. Verifica-se que, passado 0,5s de influência das condições iniciais, o histórico com essa correção coincide graficamente com o da superposição modal completa, o que evidencia a eficácia dessa correção.

6-2.3 Vibração amortecida sob força harmônica

Na [Seção 6-1](#) foi obtida a resposta de deslocamentos em regime permanente de modelo não amortecido com força harmônica, resposta esta que é próxima da que ocorre em modelo fracamente amortecido. A seguir, sem erros de integração, obtém-se a resposta completa para esse tipo de força.

Para isso, substitui-se ($\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}_0 \cos(\omega t)$) na Equação [6-2.9](#), o que fornece a j -ésima força modal:

$$\dot{b}_j(t) = \Phi_j^T \mathbf{f}_0 \cos(\omega t) \rightarrow \dot{b}_j(t) = b_{oj} \cos(\omega t) \quad (6-2.36)$$

em que:

$$b_{oj} = \Phi_j^T \mathbf{f}_0 \quad (6-2.37)$$

é o *fator de participação modal*. Logo, os p -primeiros fatores modais são denotados pelo vetor:

$$\mathbf{b}_{op} = \Phi_p^T \mathbf{f}_0 = \begin{Bmatrix} \vdots \\ b_{oj} \\ \vdots \\ b_{op} \end{Bmatrix} \quad (6-2.38)$$

Além disso, a j -ésima equação modal expressa na Equação [6-2.8](#) particulariza-se em:

$$\ddot{a}_j(t) + 2\omega_j \xi_j \dot{a}_j(t) + \omega_j^2 a_j(t) = b_{oj} \cos(\omega t) \quad (6-2.39)$$

Essa é a equação de movimento de um oscilador simples sob força harmônica. Logo, de forma análoga ao expresso na Equação [3-4.10](#) para o oscilador subamortecido, mas com as novas notações:

$$\left\{ \begin{array}{l} r_j = \frac{\omega}{\omega_j} \\ a_{estj} = \frac{b_{oj}}{\omega_j^2} \\ \omega_{aj} = \omega_j \sqrt{1 - \xi_j^2} \\ \phi_j = \arctg \frac{2r_j \xi_j}{1 - r_j^2} \\ a_{1j} = a_{oj} - \frac{a_{estj} \cos \phi_j}{\sqrt{(1 - r_j^2)^2 + (2r_j \xi_j)^2}} \\ a_{2j} = \frac{1}{\omega_{aj}} \left(\dot{a}_{oj} + a_{1j} \xi_j \omega_j \right) - \frac{a_{estj} \omega}{\sqrt{(1 - r_j^2)^2 + (2r_j \xi_j)^2}} \sin \phi_j \end{array} \right. \quad (6-2.40)$$

escreve-se a j -ésima solução modal:

$$\mathcal{d}_j(t) = e^{-\xi_j \omega_j t} (a_{1j} \cos(\omega_{aj} t) + a_{2j} \sin(\omega_{aj} t)) + \frac{\mathcal{d}_{estj}}{\sqrt{(1-r_j^2)^2 + (2r_j \xi_j)^2}} \cos(\omega t - \phi_j) \quad (6-2.41)$$

Essa expressão, com $(j = 1, 2, \dots, p)$, compõe o vetor solução modal referente ao instante t_i , $\mathcal{d}_p(t_i)$, que levado na Equação 6-2.34 fornece a solução de deslocamento

$$\mathbf{d}(t_i) = \mathbf{d}_o \cos(\omega t_i) + \mathbf{\Phi}_p (\mathcal{d}_p(t_i) - \mathbf{\Omega}_p^{-1} \mathbf{f}_{op} \cos(\omega t_i)) \quad (6-2.42)$$

O método de superposição modal com o desenvolvimento anterior tem o seguinte Algoritmo 6-2.3:

– Especificação do número p de modos naturais de vibração, das razões de amortecimento desses modos e de \mathbf{f}_o , ω , $\mathbf{d}(t_o)$, $\dot{\mathbf{d}}(t_o)$ e Δt .

– Construção das matrizes \mathbf{K} e \mathbf{M} .

– A resolução do sistema de equações $\mathbf{K} \mathbf{d}_o = \mathbf{f}_o$ fornece \mathbf{d}_o .

– A resolução do problema de autovalor $\mathbf{K} \mathbf{\Phi}_p = \mathbf{M} \mathbf{\Phi}_p \mathbf{\Omega}_p$ fornece $\mathbf{\Phi}_p$ e $\mathbf{\Omega}_p$.

$\mathcal{d}_p(t_o) = \mathbf{\Phi}_p^T \mathbf{M} \mathbf{d}(t_o)$, $\dot{\mathcal{d}}_p(t_o) = \mathbf{\Phi}_p^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{d}}(t_o)$, $\mathbf{f}_{op} = \mathbf{\Phi}_p^T \mathbf{f}_o$

→ $i = 1, 2, \dots$ até o número total de instantes de discretização

→ $j = 1, 2, \dots, p$

– Aplicação da Equação 6-2.40.

$$\mathcal{d}_j(t_i) = e^{-\xi_j \omega_j t_i} (a_{1j} \cos(\omega_{aj} t_i) + a_{2j} \sin(\omega_{aj} t_i)) + \frac{\mathcal{d}_{estj}}{\sqrt{(1-r_j^2)^2 + (2r_j \xi_j)^2}} \cos(\omega t_i - \phi_j)$$

(As p soluções $\mathcal{d}_j(t_i)$ compõem o vetor das coordenadas modais $\mathcal{d}_p(t_i)$)

$$\mathbf{d}(t_i) = \mathbf{d}_o \cos(\omega t_i) + \mathbf{\Phi}_p (\mathcal{d}_p(t_i) - \mathbf{\Omega}_p^{-1} \mathbf{f}_{op} \cos(\omega t_i))$$

ALGORITMO 6-2.3 Método de superposição modal em caso de força harmônica.

6-2.4 Vibração amortecida sob força aperiódica

Considera-se, inicialmente, o vetor das forças nodais externas com a separação de variáveis expressa na Equação 6-2.31, que se repete por conveniência:

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}_o \mathbf{f}(t) \quad (6-2.43)$$

em que $\mathbf{f}(t)$ é agora uma função aperiódica.

Logo, com a transformação modal de p modos naturais de vibração, o vetor das forças modais toma a forma:

$$\mathbf{f}_p(t) = \mathbf{\Phi}_p^T \mathbf{f}_0 f(t) = \mathbf{f}_{op} f(t) \quad (6-2.44)$$

onde se adota a notação do vetor dos fatores de participação modal expresso na Equação 6-2.38.

Chega-se, assim, à j -ésima equação modal:

$$\ddot{d}_j(t) + 2\omega_j \xi_j \dot{d}_j(t) + \omega_j^2 d_j(t) = f_{oj} f(t) \quad (6-2.45)$$

Logo, com base na resolução com a *integral de Duhamel* expressa na Equação 3-7.3, escreve-se:

$$d_j(t) = \frac{1}{\omega_{aj}} \int_0^t f_{oj} f(\tau) e^{-\xi_j \omega_j (t-\tau)} \sin(\omega_{aj} (t-\tau)) d\tau \quad (6-2.46)$$

A essa solução deve ser adicionada a parcela correspondente às condições iniciais:

$$d_j(t) = e^{-\xi_j \omega_j t} \left(d_{oj} \cos(\omega_{aj} t) + \frac{d_{oj} \xi_j \omega_j + \dot{d}_{oj}}{\omega_{aj}} \sin(\omega_{aj} t) \right) \quad (6-2.47)$$

Com a discretização da função $f(t)$ em uma sucessão de instantes t_i igualmente espaçados de Δt , pode-se obter a solução da equação modal expressa na Equação 6-2.45 através da resolução incremental com a *integral de Duhamel* que foi esquematizado no Algoritmo 3-7.1. Contudo, é mais eficaz utilizar um dos métodos de integração numérica que foram desenvolvidos na Subseção 3-7.3 ou aplicar a resolução direta por segmentos lineares que foi detalhada na Subseção 3-7.2 e que não introduz aproximações adicionais. Para essa resolução, com base na Equação 3-7.23, escreve-se:

$$\begin{cases} d_j(t_i) = a_{11j} d_j(t_{i-1}) + a_{12j} \dot{d}_j(t_{i-1}) - b_{11j} f_{oj} f(t_{i-1}) - b_{12j} f_{oj} f(t_i) \\ \dot{d}_j(t_i) = a_{21j} d_j(t_{i-1}) + a_{22j} \dot{d}_j(t_{i-1}) - b_{21j} f_{oj} f(t_{i-1}) - b_{22j} f_{oj} f(t_i) \end{cases} \quad (6-2.48)$$

em que, com base nas Equações 3-7.24 e 3-7.25, se têm os escalares:

$$\begin{cases} a_{11j} = e^{-\xi_j \omega_j \Delta t} \left(\cos(\omega_{aj} \Delta t) + \frac{\xi_j \omega_j}{\omega_{aj}} \sin(\omega_{aj} \Delta t) \right) \\ a_{12j} = \frac{e^{-\xi_j \omega_j \Delta t}}{\omega_{aj}} \sin(\omega_{aj} \Delta t) \\ a_{21j} = -\frac{\omega_j^2 e^{-\xi_j \omega_j \Delta t}}{\omega_{aj}} \sin(\omega_{aj} \Delta t) \\ a_{22j} = e^{-\xi_j \omega_j \Delta t} \left(\cos(\omega_{aj} \Delta t) - \frac{\xi_j \omega_j}{\omega_{aj}} \sin(\omega_{aj} \Delta t) \right) \end{cases} \quad (6-2.49)$$

e

$$\begin{cases}
 b_{11j} = e^{-\xi_j \omega_j \Delta t} \left(\left(\frac{1}{\omega_j^2} + \frac{2\xi_j}{\omega_j^3 \Delta t} \right) \cos(\omega_{aj} \Delta t) + \left(\frac{\xi_j}{\omega_j} + \frac{2\xi_j^2 - 1}{\omega_j^2 \Delta t} \right) \frac{\sin(\omega_{aj} \Delta t)}{\omega_{aj}} \right) - \frac{2\xi_j}{\omega_j^3 \Delta t} \\
 b_{12j} = -e^{-\xi_j \omega_j \Delta t} \left(\frac{2\xi_j}{\omega_j^3 \Delta t} \cos(\omega_{aj} \Delta t) + \frac{2\xi_j^2 - 1}{\omega_j^2 \Delta t} \frac{\sin(\omega_{aj} \Delta t)}{\omega_{aj}} \right) - \frac{1}{\omega_j^2} + \frac{2\xi_j}{\omega_j^3 \Delta t} \\
 b_{21j} = e^{-\xi_j \omega_j \Delta t} \left(\frac{\xi_j}{\omega_j} + \frac{2\xi_j^2 - 1}{\omega_j^2 \Delta t} \right) \left(\cos(\omega_{aj} \Delta t) - \frac{\xi_j \omega_j \sin(\omega_{aj} \Delta t)}{\omega_{aj}} \right) \\
 \quad - e^{-\xi_j \omega_j \Delta t} \left(\frac{1}{\omega_j^2} + \frac{2\xi_j}{\omega_j^3 \Delta t} \right) \left(\xi_j \omega_j \cos(\omega_{aj} \Delta t) + \omega_{aj} \sin(\omega_{aj} \Delta t) \right) + \frac{1}{\omega_j^2 \Delta t} \\
 b_{22j} = -e^{-\xi_j \omega_j \Delta t} \left(\frac{2\xi_j^2 - 1}{\omega_j^2 \Delta t} \right) \left(\cos(\omega_{aj} \Delta t) - \frac{\xi_j \omega_j \sin(\omega_{aj} \Delta t)}{\omega_{aj}} \right) \\
 \quad + e^{-\xi_j \omega_j \Delta t} \frac{2\xi_j}{\omega_j^3 \Delta t} \left(\xi_j \omega_j \cos(\omega_{aj} \Delta t) + \omega_{aj} \sin(\omega_{aj} \Delta t) \right) - \frac{1}{\omega_j^2 \Delta t}
 \end{cases} \quad (6-2.50)$$

A solução $\mathcal{d}_j(t_i)$, com $(j = 1, 2, \dots, p)$, compõe a solução modal referente ao instante t_i , $\mathcal{d}_p(t_i)$, cuja transformação ao espaço físico, juntamente com a correção estática dos modos superiores, fornece a solução no espaço físico inicial:

$$\mathbf{d}(t_i) = \mathbf{d}_0 f(t_i) + \Phi_p (\mathcal{d}_p(t_i) - \Omega_p^{-1} \mathcal{f}_{op} f(t_i)) \quad (6-2.51)$$

Com esse desenvolvimento, o algoritmo da subseção anterior modifica-se para a forma:

- Especificação do número p de modos de vibração, das razões de amortecimento desses modos e de \mathbf{f}_0 , $\mathbf{d}(t_0)$, $\dot{\mathbf{d}}(t_0)$, Δt e $f(t_i)$ em cada discretização do tempo.
- Construção das matrizes \mathbf{K} e \mathbf{M} .
- A resolução do sistema de equações $\mathbf{K} \mathbf{d}_0 = \mathbf{f}_0$ fornece \mathbf{d}_0 .
- A resolução do problema de autovalor $\mathbf{K} \Phi_p = \mathbf{M} \Phi_p \Omega_p$ fornece Φ_p e Ω_p .
- $\mathcal{d}_p(t_0) = \Phi_p^T \mathbf{M} \mathbf{d}(t_0)$, $\dot{\mathcal{d}}_p(t_0) = \Phi_p^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{d}}(t_0)$, $\mathcal{f}_{op} = \Phi_p^T \mathbf{f}_0$
- $j = 1, 2, \dots, p$
 - $\omega_{aj} = \omega_j \sqrt{1 - \xi_j^2}$
 - Cálculo dos coeficientes a_{11j}, \dots, a_{22j} e b_{11j}, \dots, b_{22j} (Equações 6-2.49 e 6-2.50).
- $i = 1, 2, \dots$ até o número total de instantes de discretização
 - $j = 1, 2, \dots, p$
 - $\mathcal{d}_j(t_i) = a_{11j} \mathcal{d}_j(t_{i-1}) + a_{12j} \dot{\mathcal{d}}_j(t_{i-1}) - b_{11j} \mathcal{f}_{oj} f(t_{i-1}) - b_{12j} \mathcal{f}_{oj} f(t_i)$
 - $\dot{\mathcal{d}}_j(t_i) = a_{21j} \mathcal{d}_j(t_{i-1}) + a_{22j} \dot{\mathcal{d}}_j(t_{i-1}) - b_{21j} \mathcal{f}_{oj} f(t_{i-1}) - b_{22j} \mathcal{f}_{oj} f(t_i)$
 - (As p soluções $\mathcal{d}_j(t_i)$ compõem o vetor das coordenadas modais $\mathcal{d}_p(t_i)$)
 - $\mathbf{d}(t_i) = \mathbf{d}_0 f(t_i) + \Phi_p (\mathcal{d}_p(t_i) - \Omega_p^{-1} \mathcal{f}_{op} f(t_i))$

ALGORITMO 6-2.4 *Método de superposição modal em caso de força aperiódica e separação de variáveis.*

Sem a separação de variáveis expressa na Equação 6-2.43, esse algoritmo altera-se para a forma:

- Especificação do número p de modos de vibração, das razões de amortecimento desses modos e de $\mathbf{d}(t_0)$, $\dot{\mathbf{d}}(t_0)$, Δt e $\mathbf{f}(t_i)$ em cada discretização do tempo.
 - Construção das matrizes \mathbf{K} e \mathbf{M} .
 - A resolução do problema de autovalor $\mathbf{K}\Phi_p = \mathbf{M}\Phi_p\Omega_p$ fornece Φ_p e Ω_p .
- $$\mathcal{A}_p(t_0) = \Phi_p^T \mathbf{M} \mathbf{d}(t_0), \quad \dot{\mathcal{A}}_p(t_0) = \Phi_p^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{d}}(t_0)$$
- $j = 1, 2, \dots, p$
 - $\omega_{aj} = \omega_j \sqrt{1 - \xi_j^2}$
 - Cálculo dos coeficientes a_{11j}, \dots, a_{22j} e b_{11j}, \dots, b_{22j} (Equações 6-2.49 e Eq.6-2.50).
- $i = 1, 2, \dots$ até o número total de instantes de discretização
 - $\mathcal{F}_p(t_i) = \Phi_p^T \mathbf{f}(t_i)$
 - A resolução do sistema de equações $\mathbf{K} \mathbf{d}_i = \mathbf{f}(t_i)$ fornece \mathbf{d}_i .
 - $j = 1, 2, \dots, p$
 - $\mathcal{A}_j(t_i) = a_{11j} \mathcal{A}_j(t_{i-1}) + a_{12j} \dot{\mathcal{A}}_j(t_{i-1}) - b_{11j} \mathcal{F}_j(t_{i-1}) - b_{12j} \dot{\mathcal{F}}_j(t_i)$
 - $\dot{\mathcal{A}}_j(t_i) = a_{21j} \mathcal{A}_j(t_{i-1}) + a_{22j} \dot{\mathcal{A}}_j(t_{i-1}) - b_{21j} \mathcal{F}_j(t_{i-1}) - b_{22j} \dot{\mathcal{F}}_j(t_i)$
 - (As p soluções $\mathcal{A}_j(t_i)$ compõem o vetor das coordenadas modais $\mathcal{A}_p(t_i)$)
 - $\mathbf{d}(t_i) = \mathbf{d}_i + \Phi_p (\mathcal{A}_p(t_i) - \Omega_p^{-1} \dot{\mathcal{F}}_p(t_i))$

ALGORITMO 6-2.5 *Método de superposição modal em caso de força aperiódica.*

6-3 MATRIZ DE AMORTECIMENTO GLOBAL

Para a aplicação da transformação modal de coordenadas detalhada na Subseção 6-2.1, assumiu-se que a matriz de amortecimento global fosse diagonalizável em transformação similar com o uso da matriz modal, o que equivale a considerar que o modelo discreto amortecido tenha os mesmos modos naturais de vibração que o não amortecido. É o chamado *amortecimento proporcional* ou *clássico*. Assim, uma vez que as razões de amortecimento dos diversos modos de vibração da referida transformação sejam estabelecidas, não há necessidade de construir a matriz de amortecimento global para o método de superposição modal. Contudo, essa construção é necessária em resolução das equações de movimento por integração direta que será tratada na próxima seção.

O amortecimento proporcional é aplicável em estrutura de um mesmo material, em que se a dissipação de energia seja uniforme. Em caso contrário, diz-se que o amortecimento é *não proporcional*. Ambos os tipos de amortecimento são tratados nesta seção.

6-3.1 Amortecimento proporcional

Os dois principais procedimentos de construção de matriz global de amortecimento proporcional são descritos a seguir.

6-3.1.1 Amortecimento de Rayleigh

A concepção básica desse procedimento de construção de matriz de amortecimento é atribuída a Lord Rayleigh e tem como base a combinação linear:

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K} \quad (6-3.1)$$

Seguidamente, a partir do estabelecimento das razões de amortecimento de dois modos naturais de vibração, as constantes de proporcionalidade α e β são determinadas com a condição de que a matriz modal seja ortogonal em relação à matriz \mathbf{C} .

Com as propriedades de ortonormalização expressas nas Equações 5-5.13 e 5-5.15, tem-se:

$$\Phi^T \mathbf{C} \Phi = \Phi^T (\alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}) \Phi \rightarrow \alpha (\Phi^T \mathbf{M} \Phi) + \beta (\Phi^T \mathbf{K} \Phi) = \alpha + \beta \Omega$$

que no caso de um modo de vibração, fornece:

$$\Phi_j^T (\alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}) \Phi_j = \alpha + \beta \omega_j^2 \quad (6-3.2)$$

Assim, em atendimento ao que foi arbitrado na Equação 6-2.6, escreve-se:

$$\alpha + \beta \omega_j^2 = 2\omega_j \xi_j \rightarrow \xi_j = \frac{\alpha + \beta \omega_j^2}{2\omega_j} \quad (6-3.3)$$

Logo, com a especificação das razões de amortecimento ξ_i e ξ_j , respectivamente para o i -ésimo e para o j -ésimo modos de vibração, obtém-se da expressão anterior:

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1/\omega_i & \omega_i \\ 1/\omega_j & \omega_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \xi_i \\ \xi_j \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \frac{\omega_i^2 \omega_j \xi_j - \omega_i \omega_j^2 \xi_i}{\omega_i^2 - \omega_j^2} \\ \beta = 2 \frac{\omega_i \xi_i - \omega_j \xi_j}{\omega_i^2 - \omega_j^2} \end{cases} \quad (6-3.4)$$

Com esses resultados, determina-se o amortecimento do k -ésimo modo de vibração:

$$\xi_k = \frac{\alpha + \beta \omega_k^2}{2\omega_k} \rightarrow \xi_k = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\omega_k} + \beta \omega_k \right) \quad (6-3.5)$$

Além disso, com o estabelecimento da mesma razão ξ para os modos de referência Φ_i e Φ_j , o que é usual, as expressões das referidas constantes tomam as formas:

$$\begin{cases} \alpha = 2\xi \frac{\omega_i \omega_j}{\omega_i + \omega_j} \\ \beta = 2\xi \frac{1}{\omega_i + \omega_j} \end{cases} \quad (6-3.6)$$

e a razão de amortecimento do k -ésimo modo se escreve:

$$\xi_k = \frac{\xi(\omega_i \omega_j + \omega_k^2)}{\omega_k (\omega_i + \omega_j)} \quad (6-3.7)$$

Observando a Equação 6-3.5, nota-se que, na matriz de *amortecimento de Rayleigh*, a parcela $\alpha \mathbf{M}$ implica que a razão ξ_k seja inversamente proporcional à frequência ω_k e que a parcela $\beta \mathbf{K}$ tem como consequência que essa razão seja proporcional a essa frequência.

EXEMPLO 6-3.1

Para ilustrar o *amortecimento de Rayleigh* com a especificação da mesma razão de amortecimento para dois modos de vibração, reconsidera-se a viga do Exemplo 6-2.1.

Com a adoção de matriz de massa consistente, foram obtidas as razões de amortecimento que conduziram aos gráficos das próximas três figuras. As representações em linha contínua, em linha pontilhada e em traço-ponto dizem respeito, respectivamente, às discretizações em 5, 9 e 17 pontos nodais igualmente espaçados. A [Figura E6-3.1a](#) é o caso do estabelecimento de ($\xi = 0,02$) para os dois primeiros modos. Observa-se aumento das razões de amortecimento a partir do terceiro modo, com valor superior ao crítico a partir do 16º modo da discretização com 17 pontos nodais.

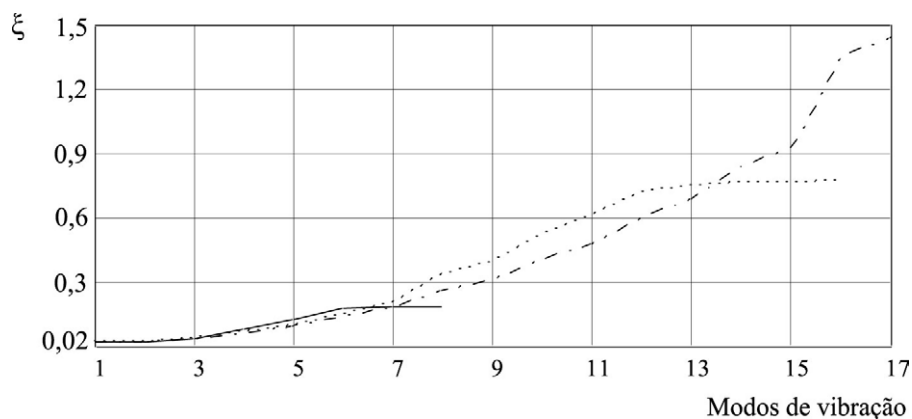


FIGURA E6-3.1a Estabelecimento de ($\xi = 0,02$) para os dois primeiros modos.

A [Figura E6-3.1b](#) diz respeito ao estabelecimento de ($\xi = 0,02$) para o primeiro e o quarto modos de vibração. No caso, observa-se pequena redução da razão de amortecimento para o segundo e para o terceiro modos, e aumento do amortecimento a partir do quinto modo.

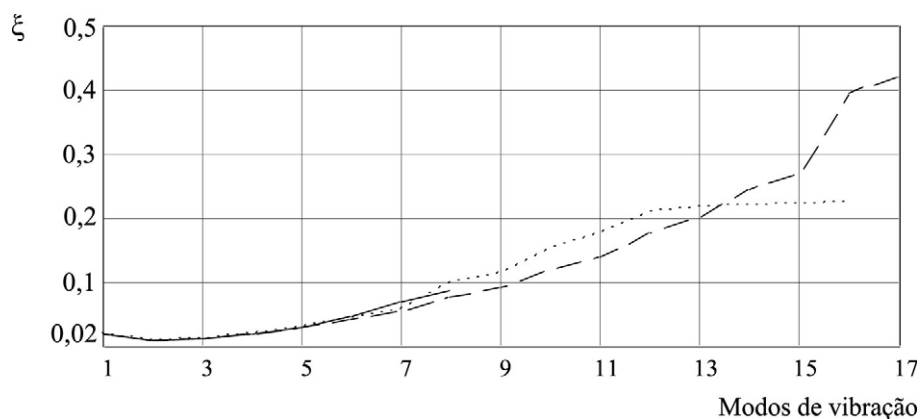


FIGURA E6-3.1b Estabelecimento de ($\xi = 0,02$) para o primeiro e o quarto modos.

A Figura E6-3.1c mostra resultados do estabelecimento de ($\xi = 0,02$) para o primeiro e o oitavo modos naturais de vibração. Nota-se decréscimo da razão de amortecimento entre esses modos e crescimento dessa razão a partir do nono modo de vibração.

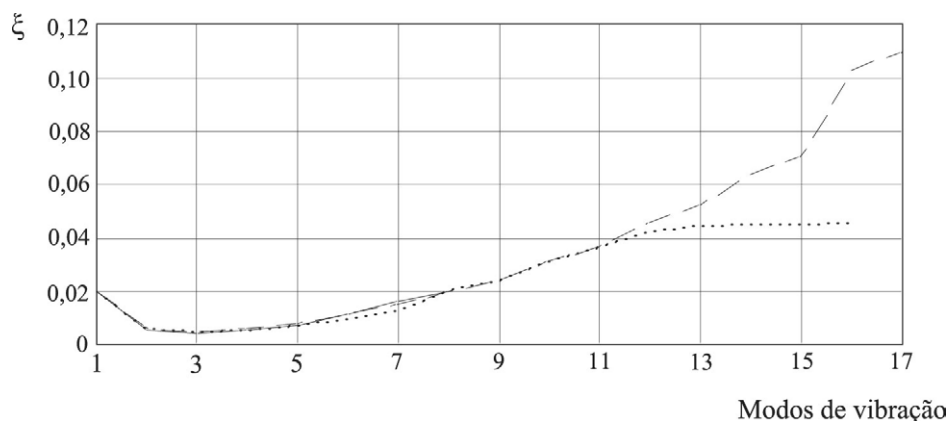


FIGURA E6-3.1c Estabelecimento de ($\xi = 0,02$) para o primeiro e o oitavo modos.

Além de simplicidade, a grande vantagem do *amortecimento de Rayleigh* é fornecer matriz de amortecimento global com as mesmas características de esparsidade que a matriz de rigidez.¹⁴ Contudo, o exemplo anterior evidenciou que, com esse amortecimento, não se tem controle quanto às razões de amortecimento dos diversos modos naturais de vibração. Isso porque esse procedimento parte da especificação das razões de amortecimento de dois modos naturais de vibração, obtendo-se amortecimentos mais reduzidos para os modos intermediários a esses dois, e amortecimentos com valores crescentes para os modos de ordem superior. Por essa razão, e como os primeiros modos naturais de vibração são os de participação preponderante em resposta dinâmica, é indicado estabelecer amortecimento para o primeiro modo e para um dos modos de frequência mais alta que ainda tenha participação relevante na resposta.¹⁵

¹⁴ Esse é um caso particular do *amortecimento de Caughey* expresso pela matriz ($\mathbf{C} = \mathbf{M} \sum_{i=1}^I a_i (\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K})^i$), em que as I constantes a_i são as soluções do sistema de equações algébricas ($\xi_j = (a_0/\omega_j + a_1\omega_j + a_2\omega_j^3 + \dots + a_{I-1}\omega_j^{2I-3})/2$), como apresentado por Caughey, T. K., 1960, *Classical Normal Modes in Damped Linear Dynamic Systems*, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, vol. 27, pp. 269-271. Com essa matriz transformação podem ser estabelecidos os amortecimentos de um número qualquer de modos de vibração. Contudo, essa matriz tem a desvantagem de ser cheia. E no caso de ($I = 2$), recai-se no *amortecimento de Rayleigh*, que é o mais utilizado.

¹⁵ Em edifícios de andares múltiplos, o amortecimento cresce com a ordem dos modos de vibração, como apresentado por Kareem, A. & Gurley, K., 1996, *Damping in Structures: its evaluation and treatment of uncertainty*, Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, n° 59, pp. 131-157.

6-3.1.2 Superposição dos amortecimentos modais

O procedimento de *superposição dos amortecimentos modais* é desenvolvido com base nas razões de amortecimento dos diversos modos naturais de vibração, como descrito a seguir.

Com base na condição de ortonormalidade da matriz modal com respeito à matriz de amortecimento, como foi expresso na Equação 6-2.6, escreve-se:

$$\mathbf{C} = \Phi^T \mathbf{C}_d \Phi^{-1} \quad (6-3.8)$$

Com a propriedade de M-ortonormalização da matriz modal, $(\Phi^T \mathbf{M} \Phi = \mathbf{I})$, obtém-se:

$$\begin{cases} \Phi^{-1} = \Phi^T \mathbf{M} \\ \Phi^T = \mathbf{M} \Phi \end{cases} \quad (6-3.9)$$

Logo, com a substituição desse par de expressões na equação que lhe precede, obtém-se $(\mathbf{C} = \mathbf{M} \Phi \mathbf{C}_d \Phi^T \mathbf{M})$. E com a substituição da Equação 6-2.6 nessa última expressão, chega-se a:

$$\mathbf{C} = \mathbf{M} \Phi \begin{bmatrix} \omega_1 \xi_1 & & \\ & \omega_j \xi_j & \\ & & \omega_n \xi_n \end{bmatrix} \Phi^T \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{C} = \mathbf{M} \left(\sum_{j=1}^n 2\omega_j \xi_j \Phi_j \Phi_j^T \right) \mathbf{M} \quad (6-3.10)$$

Nessa composição de matriz, cada modo natural de vibração contribui proporcionalmente à correspondente razão de amortecimento e pode-se atribuir amortecimento nulo aos modos que não tenham participação na resposta dinâmica, o que equivale a excluí-los. Assim, com apenas os p primeiros modos de vibração, a expressão anterior particulariza-se em:

$$\mathbf{C} = \mathbf{M} \left(\sum_{j=1}^p 2\omega_j \xi_j \Phi_j \Phi_j^T \right) \mathbf{M} \quad (6-3.11)$$

Através de modificação dessa expressão e sem a determinação dos modos de vibração que não sejam relevantes na resposta dinâmica, pode-se fazer com que esses modos tenham amortecimento elevado. Para isso, com o *amortecimento de Rayleigh* e $(\alpha = 0)$, em que se tem:

$$\mathbf{C} = \beta \mathbf{K} \quad (6-3.12)$$

identificou-se na subseção anterior que a razão de amortecimento de cada modo é proporcional à correspondente frequência. E essa razão se escreve a partir da Equação 6-3.5 sob a forma:

$$\xi_k = \frac{\beta \omega_k}{2} \quad (6-3.13)$$

A partir dessa expressão e para o p -ésimo modo (considerado o mais elevado modo que ainda tenha participação significativa na resposta), escreve-se a constante:

$$\beta = \frac{2\xi_p}{\omega_p} \quad (6-3.14)$$

Logo, para se ter aumento de amortecimento a partir do p -ésimo modo, adota-se a notação:

$$\xi_j^* = \xi_j - \frac{\xi_p \omega_j}{\omega_p} \quad (6-3.15)$$

e modifica-se a Equação 6-3.11 para a forma:

$$\mathbf{C} = \beta \mathbf{K} + \mathbf{M} \left(\sum_{j=1}^{p-1} 2\omega_j \xi_j^* \boldsymbol{\phi}_j \boldsymbol{\phi}_j^T \right) \mathbf{M} \quad (6-3.16)$$

É imediato identificar que, com essa matriz, são impostas as seguintes razões de amortecimento:

$$\xi_j = \begin{cases} \text{valor especificado para os modos de ordem } j = 1, 2, \dots, p \\ \frac{\xi_p \omega_j}{\omega_p} \text{ para os modos de ordem } j = p+1, p+2, \dots, n, \text{ com } \xi_j > \xi_p \end{cases} \quad (6-3.17)$$

Esse procedimento de construção de matriz de amortecimento global é mais eficaz do que o de uso do *amortecimento de Rayleigh*, pelo fato de permitir total controle das razões de amortecimento dos modos naturais de vibração. Tem, contudo, a desvantagem de fornecer matriz cheia, diferentemente das matrizes de rigidez e de massa globais, que são usualmente esparsas.

EXEMPLO 6-3.2

Para comprovar numericamente o procedimento de superposição de amortecimentos modais, reconsidera-se a viga biapoiada do Exemplo 6-1.1. Estabelecem-se os amortecimentos ($\xi_1 = \xi_2 = 0,02$) e determinam-se as razões de amortecimento dos diversos modos naturais de vibração.

Considera-se, inicialmente, a discretização em três pontos nodais, com a qual são obtidas as seguintes matrizes de rigidez e de massa, globais e restringidas:

$$\mathbf{K} = 10^7 \begin{bmatrix} 4 & -1,5 & 2 & 0 \\ \cdot & 1,5 & 0 & 1,5 \\ \cdot & \cdot & 8 & 2 \\ \text{sim.} & \cdot & \cdot & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 121,90 & 99,048 & -91,429 & 0 \\ \cdot & 594,29 & 0 & -99,048 \\ \cdot & \cdot & 243,81 & -91,429 \\ \text{sim.} & \cdot & \cdot & 121,90 \end{bmatrix}$$

Com a resolução do problema de autovalor ($\mathbf{K}\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{M}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Omega}$), obtém-se:

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 4,2534 \cdot 10^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9,375 \cdot 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5,4243 \cdot 10^5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,9687 \cdot 10^6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \omega_1 = 65,218 \text{ rad/s} \\ \omega_2 = 306,19 \text{ rad/s} \\ \omega_3 = 736,50 \text{ rad/s} \\ \omega_4 = 1403,1 \text{ rad/s} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} -0,013121 & 0,034233 & 0,071883 & 0,090571 \\ -0,033591 & 0 & -0,027324 & 0 \\ 0 & -0,034233 & 0 & 0,090571 \\ 0,013121 & 0,034233 & 0,071883 & 0,090571 \end{bmatrix}$$

$$\text{Equação 6-3.14} \rightarrow \beta = \frac{2 \cdot 0,02}{306,19} = 1,3064 \cdot 10^{-4}$$

$$\text{Equação 6-3.15} \rightarrow \xi_1^* = 0,02 - \frac{0,02 \cdot 65,1218}{306,19} = 0,01575$$

$$\text{Equação 6-3.16} \rightarrow \mathbf{C} = \beta \mathbf{K} + 2\xi_1^* \omega_1 \mathbf{M} \boldsymbol{\Phi}_1 \boldsymbol{\Phi}_1^T \mathbf{M}$$

$$\rightarrow \mathbf{C} = 10^3 \begin{bmatrix} 5,2754 & -1,6974 & 2,6128 & -0,04983 \\ \cdot & 3,3390 & 0 & 1,6974 \\ \cdot & \cdot & 10,451 & 2,6128 \\ \text{sim.} & \cdot & \cdot & 5,2754 \end{bmatrix}$$

Com essa matriz e a matriz modal, tem-se com a transformação similar:

$$\boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} 2,6087 & \approx 0 & \approx 0 & \approx 0 \\ \cdot & 12,247 & \approx 0 & \approx 0 \\ \cdot & \cdot & 70,862 & \approx 0 \\ \text{sim.} & \cdot & \cdot & 257,19 \end{bmatrix} \equiv 2 \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & \omega_j \xi_j & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}$$

que comprova a diagonalização da matriz de amortecimento.

Finalmente, a partir dos coeficientes diagonais da matriz anterior, obtêm-se as razões de amortecimento:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_1 = \frac{2,6087}{2\omega_1} = 0,02 \\ \xi_2 = \frac{12,247}{2\omega_2} = 0,02 \\ \xi_3 = \frac{70,862}{2\omega_3} = 0,048108 = \frac{\xi_2 \omega_3}{\omega_2} \\ \xi_4 = \frac{257,19}{2\omega_4} = 0,091651 \equiv \frac{\xi_2 \omega_4}{\omega_2} \end{array} \right.$$

Esses resultados confirmam as razões de amortecimento especificadas na Equação 6-3.17.

Ainda com a especificação das razões ($\xi_1 = \xi_2 = 0,02$), considera-se a discretização em cinco pontos nodais igualmente espaçados, que tem oito graus de liberdade. A Figura E6-3.2 mostra gráficos obtidos com o procedimento da superposição dos amortecimentos modais. A representação em linha contínua é o resultado da discretização em três pontos nodais, e a representação em linha pontilhada, o da discretização em oito pontos nodais.

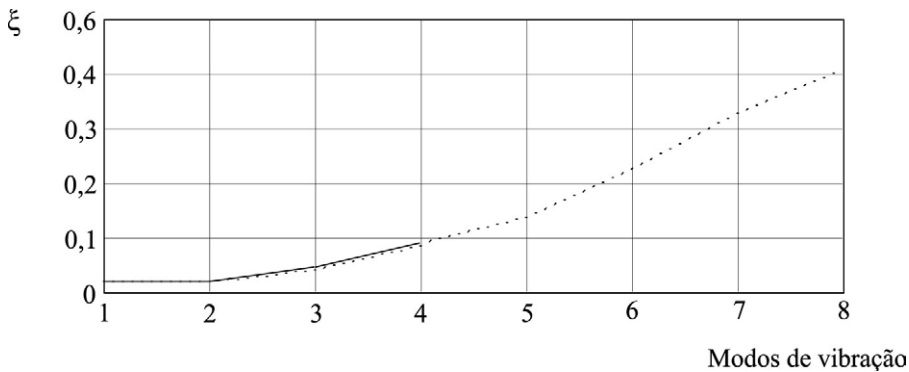


FIGURA E6-3.2 Razão de amortecimento versus modo de vibração.

Essa figura comprova o aumento da grandeza das razões de amortecimento a partir do terceiro modo natural de vibração.

Uma vez que o amortecimento seja proporcional, pode-se utilizar qualquer matriz de transformação de coordenadas formada de vetores ortogonais às matrizes de massa e de rigidez, como é o caso dos *vetores de Ritz* que serão tratados na Seção 9-7.

6-3.2 Amortecimento não proporcional

Como esclarecido anteriormente, o amortecimento proporcional pressupõe que o modelo amortecido tenha os mesmos modos naturais de vibração que o modelo não amortecido, o que é adequado em caso de estrutura de um mesmo material, com dissipação de energia distribuída de forma uniforme. Em sistemas estruturais constituídos de diferentes materiais em regiões localizadas e em casos de interação solo-estrutura e fluido-estrutura, assim como com dispositivos especiais de dissipação de energia, tem-se o denominado *amortecimento não proporcional*.

Como ilustração, considera-se a [Figura 6-3.1](#) em que está esquematizada uma estrutura constituída de concreto na parte inferior e de aço na parte superior.

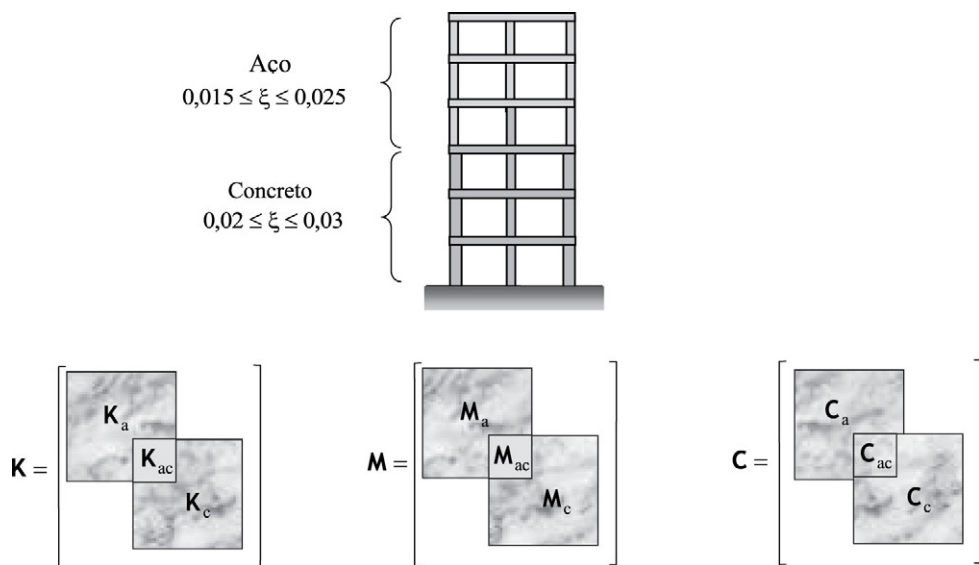


FIGURA 6-3.1 Modelo aço-concreto.

Com a consideração do *amortecimento de Rayleigh* em cada uma das referidas partes, descreve-se, a seguir, um procedimento de construção da matriz de amortecimento não proporcional, em que os índices “c” e “a” se referem, respectivamente, ao concreto e ao aço. Para isso:

1. Determinam-se as frequências naturais do modelo composto aço-concreto.
2. Constroem-se as seguintes matrizes de amortecimento proporcionais referentes separadamente às partes em concreto e em aço:

$$\begin{cases} C_c = \alpha_c M_c + \beta_c K_c \\ C_a = \alpha_a M_a + \beta_a K_a \end{cases} \quad (6-3.18)$$

em que as constantes α_c e β_c , assim como as constantes α_a e β_a , são determinadas através da Equação 6-3.4 ou da Equação 6-3.6, com base em duas das frequências naturais do modelo composto.

3. Obtém-se a matriz de amortecimento da estrutura completa da maneira usual como são construídas as matrizes de rigidez e de massa, globais. Assim, a submatriz C_{ac} é obtida através da soma das contribuições dos coeficientes referentes aos graus de liberdade da interface aço-concreto.

Para um modelo com amortecimento não proporcional, podem ser determinados modos complexos que desacoplam as equações de movimento.¹⁶ Para isso, considera-se a identidade:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}} - \mathbf{M}\dot{\mathbf{d}} = \mathbf{0} \quad (6-3.19)$$

além do sistema das n equações de vibração livre, de maneira a se ter o sistema de $2n$ equações diferenciais:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{d}} \\ \mathbf{d} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d} \\ \dot{\mathbf{d}} \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (6-3.20)$$

É imediato identificar que essa última expressão fornece $(\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{d}} + \mathbf{K}\mathbf{d} = \mathbf{0})$ e a identidade anterior. E com as notações:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\mathbf{C} & -\mathbf{M} \\ -\mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (6-3.21a)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M} \end{bmatrix} \quad (6-3.21b)$$

e

$$\mathbf{v} = \begin{Bmatrix} \mathbf{d} \\ \dot{\mathbf{d}} \end{Bmatrix} \quad (6-3.21c)$$

a Equação 6-3.20 toma a forma:

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{B}\mathbf{v} \quad (6-3.22)$$

em que \mathbf{v} é denominado *vetor de estado*.

Como essa expressão é um sistema de equações diferenciais ordinárias homogêneas de coeficientes constantes, tem solução harmônica que, em forma exponencial, se escreve:

$$\mathbf{v}(t) = \hat{\mathbf{w}} e^{\lambda t} \quad (6-3.23)$$

¹⁶ Foss, K. A., 1958, *Coordinates which Uncouple the Equations of Motion of Damped Linear Dynamic Systems*, Journal of Applied Mechanics, vol. 25, nº 57, pp. 361-364. A determinação de modos complexos é encontrada na referência bibliográfica Humar, J. L., 2012.

Com a substituição dessa solução no sistema anterior, obtém-se:

$$\mathbf{B} \hat{\mathbf{w}} = \lambda \mathbf{A} \hat{\mathbf{w}} \quad (6-3.24)$$

que expressa um problema de autovalor generalizado.

A solução desse problema fornece $2n$ autovalores λ_i que, em caso de amortecimento sub-crítico, são n pares de complexos conjugados, com os correspondentes pares de autovetores complexos conjugados. Esses autovetores têm propriedades de ortogonalidade em relação às matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} . Para comprovar essas propriedades, escreve-se:

$$(\lambda_i \mathbf{A} - \mathbf{B}) \hat{\mathbf{w}}_i = \mathbf{0} \quad (6-3.25)$$

e

$$(\lambda_j \mathbf{A} - \mathbf{B}) \hat{\mathbf{w}}_j = \mathbf{0} \quad (6-3.26)$$

Com a multiplicação da Equação 6-3.25 por $\hat{\mathbf{w}}_j^T$ e a pré-multiplicação da Equação 6-3.26 por $\hat{\mathbf{w}}_i^T$, obtém-se, respectivamente:

$$\hat{\mathbf{w}}_j^T (\lambda_i \mathbf{A} - \mathbf{B}) \hat{\mathbf{w}}_i = 0 \quad (6-3.27)$$

e

$$\hat{\mathbf{w}}_i^T (\lambda_j \mathbf{A} - \mathbf{B}) \hat{\mathbf{w}}_j = 0 \quad (6-3.28)$$

Como matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} são simétricas, a Equação 6-3.27 fornece:

$$\hat{\mathbf{w}}_i^T (\lambda_i \mathbf{A} - \mathbf{B}) \hat{\mathbf{w}}_j = 0 \quad (6-3.29)$$

Com a subtração dessa última expressão pela Equação 6-3.28, chega-se a:

$$(\lambda_i - \lambda_j) \hat{\mathbf{w}}_i^T \mathbf{A} \hat{\mathbf{w}}_j = 0 \quad (6-3.30)$$

Logo, com a condição de que $\lambda_i \neq \lambda_j$, essa equação só é satisfeita em caso de:

$$\hat{\mathbf{w}}_i^T \mathbf{A} \hat{\mathbf{w}}_j = 0 \quad (6-3.31)$$

que expressa a ortogonalidade dos autovetores $\hat{\mathbf{w}}_i$ e $\hat{\mathbf{w}}_j$, com respeito à matriz \mathbf{A} .

Além disso, com a substituição dessa expressão na Equação 6-3.27, obtém-se:

$$\hat{\mathbf{w}}_j^T \mathbf{B} \hat{\mathbf{w}}_i = 0 \quad (6-3.32)$$

que mostra ortogonalidade com respeito à matriz \mathbf{B} .

Assim, com a notação de matriz modal complexa:

$$\hat{\mathbf{W}} = [\hat{\mathbf{w}}_1 \quad \hat{\mathbf{w}}_2 \quad \cdots \quad \hat{\mathbf{w}}_{2n}] \quad (6-3.33)$$

escreve-se:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{W}}^T \mathbf{A} \hat{\mathbf{W}} = \text{diag} (a_{ii}) \\ \hat{\mathbf{W}}^T \mathbf{B} \hat{\mathbf{W}} = \text{diag} (b_{ii}) \end{cases} \quad (6-3.34)$$

Agora, com a pré-multiplicação da Equação 6-3.25 por $\hat{\mathbf{w}}_i^T$, obtém-se:

$$\hat{\mathbf{w}}_i^T (\lambda_i \mathbf{A} - \mathbf{B}) \hat{\mathbf{w}}_i = 0 \rightarrow \lambda_i = \frac{b_{ii}}{a_{ii}} \quad (6-3.35)$$

Logo, pode-se normalizar a matriz modal $\hat{\mathbf{W}}$ em relação à matriz \mathbf{A} , para se ter:

$$\begin{cases} \mathbf{W}^T \mathbf{A} \mathbf{W} = \mathbf{I} \\ \mathbf{W}^T \mathbf{B} \mathbf{W} = \mathbf{\Omega} \end{cases} \quad (6-3.36)$$

em que $\mathbf{\Omega}$ é a matriz espectral constituída pelos autovalores complexos.

A matriz modal normalizada \mathbf{W} pode ser utilizada em transformação de coordenadas para desacoplar o sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{d}} \\ \ddot{\mathbf{d}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d} \\ \dot{\mathbf{d}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}(t) \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (6-3.37)$$

de forma semelhante ao detalhado na Subseção 6-2.1. Contudo, o uso dessa transformação requer muito mais processamento do que em caso de matriz com os modos naturais de vibração, uma vez que o presente problema de autovalor é duas vezes maior, tem resolução de aritmética complexa que não é tão robusta como em caso de autovalores reais.¹⁷ Por essas razões, a presente formulação é raramente utilizada. É mais simples e eficaz utilizar a integração desenvolvida na próxima seção.

6-4 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA DIRETA EM CASO LINEAR

O método de superposição modal detalhado na Seção 6-2 é destinado à análise de modelo de comportamento linear, por se basear em soma de soluções individuais. Além do que requer amortecimento proporcional. Esse método é principalmente recomendado para modelo discreto de elevado número de graus de liberdade, em determinação de resposta de longa duração que possa ser obtida com acurácia satisfatória através de transformação de coordenadas com reduzido número dos primeiros modos naturais de vibração.

A resolução mais geral do sistema global das equações diferenciais de movimento é através de integração numérica direta, que pode ser aplicada em modelo de comportamento linear e comportamento não linear, assim como com amortecimento proporcional ou não proporcional. Essa integração é eficaz computacionalmente, principalmente em determinação de resposta de curta duração, como em caso de modelo sob força de impacto.¹⁸

Os métodos de integração direta são extensões dos métodos de integração da equação de movimento do oscilador simples, que foram detalhados na Subseção 3-7.3. Assim, são métodos desenvolvidos a partir de leis simples de deslocamentos, velocidades e/ou acelerações

¹⁷ Ibrahimbegovic, A. & Wilson, E. L., 1989, *Simple Numerical Algorithms for the Mode Superposition Analysis of Linear Structural Systems with Non-proportional Damping*, Computers & structures, vol. 33, pp. 523-531.

¹⁸ A qualificação direta expressa que não há transformação de coordenadas antes do procedimento de integração, que é também indicada em análise de propagação de ondas, pelo fato de um grande número de modos de vibração ter contribuição relevante na resposta do sistema.

em cada espaçamento de tempo, com as soluções das equações de movimento em sucessivos instantes obtidas através da resolução de sistemas de equações algébricas. Por facilidade esse espaçamento é considerado constante e, em cada dos instantes de integração, não há combinação de contribuições de resultados parciais, mas ocorre acumulação de aproximações, ou erros numéricos, no processo de marcha no tempo. Com isso, o problema de instabilidade numérica pode ser sério, embora controlável. Fortuitamente, eventual amortecimento artificial afeta primordialmente a contribuição dos modos naturais de vibração superiores, que são os menos relevantes na resposta dinâmica.¹⁹

Com a redução do espaçamento entre os instantes de integração, os erros tendem a ser eliminados, e um critério para a escolha desse espaçamento é estabelecido para cada um dos métodos de integração direta. Contudo, na dúvida quanto ao espaçamento a utilizar, devem ser feitas análises com sucessivas reduções desse espaçamento, para comparação de diferenças entre os resultados dessas análises. O espaçamento de tempo estará adequado quando a diferença for irrelevante.

Além disso, como já apresentado, os métodos de integração são divididos em *explícitos* e *implícitos*. Nos primeiros, a resolução referente ao instante t_i é baseada na condição de equilíbrio do instante anterior e, portanto, não requer valores daquele instante. Nos implícitos, a resolução é fundamentada na condição de equilíbrio do instante em que se busca solução e, conseqüentemente, requer valores desse instante. Entre os explícitos, destaca-se o método por *diferença finita central*. Já entre os métodos implícitos, os mais utilizados são o de *Newmark de aceleração média* e o de *Wilson θ* . Todos esses métodos estão detalhados a seguir.

6-4.1 Método por diferença finita central

Para modelo de multigraus, as fórmulas de aproximação por diferença finita central expressas nas Equações 3-7.26 e 3-7.27 são expandidas nas formas

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{d}}_i = \frac{1}{2\Delta t} (\mathbf{d}_{i+1} - \mathbf{d}_{i-1}) \\ \ddot{\mathbf{d}}_i = \frac{1}{\Delta t^2} (\mathbf{d}_{i+1} - 2\mathbf{d}_i + \mathbf{d}_{i-1}) \end{cases} \quad (6-4.1)$$

Com a substituição dessas expressões no sistema global de equações ($\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}_i + \mathbf{C}\dot{\mathbf{d}}_i + \mathbf{K}\mathbf{d}_i = \mathbf{f}_i$) e após a organização das diversas parcelas, obtém-se (em semelhança ao desenvolvido para o oscilador simples) o sistema de equações algébricas

$$\mathbf{M}'\mathbf{d}_{i+1} = \mathbf{f}'_i \quad (6-4.2)$$

em que se têm a pseudomatriz de massa e o pseudovetor das forças estáticas nodais:

$$\begin{cases} \mathbf{M}' = \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C} \\ \mathbf{f}'_i = \mathbf{f}_i - \left(\mathbf{K} - \frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M} \right) \mathbf{d}_i - \left(\frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} - \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C} \right) \mathbf{d}_{i-1} \end{cases} \quad (6-4.3)$$

¹⁹ Importa relembrar que todo modelo numérico é aproximado ao modelo matemático original e que em análise dinâmica se tem, de partida, imprecisões no estabelecimento das ações externas e das propriedades do modelo, principalmente na caracterização do amortecimento. Assim, desde que os erros de integração não sejam relevantes (o que é possível com estabelecimento adequado do espaçamento de tempo), tais erros devem ser aceitos com naturalidade.

A resolução do sistema de equações anterior fornece a solução de deslocamento referente instante t_{i+1} , a partir da qual podem ser calculadas as soluções de velocidades e de acelerações do mesmo instante, através da Equação 6-4.1.

Para aplicar o presente método, é necessário determinar um vetor de deslocamentos fictícios em $(t = -\Delta t)$. Para isso, através da substituição das condições iniciais, \mathbf{d}_0 e $\ddot{\mathbf{d}}_0$, no sistema global das equações de movimento, obtém-se:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}_0 = \mathbf{f}_0 - \mathbf{K}\mathbf{d}_0 - \mathbf{C}\dot{\mathbf{d}}_0 \rightarrow \ddot{\mathbf{d}}_0 = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{f}_0 - \mathbf{K}\mathbf{d}_0 - \mathbf{C}\dot{\mathbf{d}}_0) \quad (6-4.4)$$

Logo, de forma semelhante à Equação 3-7.33, chega-se ao vetor de deslocamentos no instante $-\Delta t$:

$$\mathbf{d}_{-1} = \mathbf{d}_0 - \dot{\mathbf{d}}_0\Delta t + \ddot{\mathbf{d}}_0\Delta t^2/2 \quad (6-4.5)$$

Em caso de matrizes de massa e de amortecimento diagonais, é imediato identificar que a pseudomatriz de massa é também diagonal. Logo, obtém-se a solução de deslocamento referente ao instante t_{i+1} através do simples produto matricial:

$$\mathbf{d}_{i+1} = \mathbf{M}'^{-1}\mathbf{f}'_i \quad (6-4.6)$$

em que os coeficientes diagonais de \mathbf{M}'^{-1} são os recíprocos dos coeficientes de \mathbf{M}' .

Com a consideração de matriz de massa não diagonal e o *amortecimento de Rayleigh*, tem-se o seguinte algoritmo para o presente método de integração direta.

- Especificação de \mathbf{d}_0 , $\dot{\mathbf{d}}_0$, Δt , \mathbf{f}_i em cada discretização do tempo, e dos amortecimentos correspondentes aos modos de vibração ϕ_i e ϕ_j .
- Construção das matrizes \mathbf{K} e \mathbf{M} .
- Cálculo das frequências ω_i e ω_j , e dos coeficientes α e β (Equação 6-3.4).

$$\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K}$$

$$\text{Se } \mathbf{d}_0 = \mathbf{0} \text{ e } \dot{\mathbf{d}}_0 = \mathbf{0} \rightarrow \ddot{\mathbf{d}}_0 = \mathbf{0}$$

$$\text{Se } \mathbf{d}_0 \neq \mathbf{0} \text{ ou } \dot{\mathbf{d}}_0 \neq \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}_0 = (\mathbf{f}_0 - \mathbf{K}\mathbf{d}_0 - \mathbf{C}\dot{\mathbf{d}}_0) \rightarrow \ddot{\mathbf{d}}_0.$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{d}_0 - \dot{\mathbf{d}}_0\Delta t + \ddot{\mathbf{d}}_0\Delta t^2/2 \quad \text{e} \quad \mathbf{M}' = \frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M} + \frac{1}{2\Delta t}\mathbf{C}$$

→ $i = 0, 1, \dots$ até o número total de instantes de discretização

$$\mathbf{f}'_i = \mathbf{f}_i - \left(\mathbf{K} - \frac{2}{\Delta t^2}\mathbf{M}\right)\mathbf{d}_i - \left(\frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M} - \frac{1}{2\Delta t}\mathbf{C}\right)\mathbf{a}$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{d}_i$$

– A resolução do sistema de equações $\mathbf{M}'\mathbf{d}_{i+1} = \mathbf{f}'_i$ fornece \mathbf{d}_{i+1} .

– Além disso, caso seja de interesse determinar as velocidades e acelerações:

→ $i = 1, 2, \dots$ até o número total de instantes de discretização

$$\dot{\mathbf{d}}_i = \frac{1}{2\Delta t}(\mathbf{d}_{i+1} - \mathbf{d}_{i-1})$$

$$\ddot{\mathbf{d}}_i = \frac{1}{\Delta t^2}(\mathbf{d}_{i+1} - 2\mathbf{d}_i + \mathbf{d}_{i-1})$$

Em integração numérica direta, o espaçamento de tempo precisa ser ajustado para se ter:

- estabilidade numérica;
- acurácia de resultados;
- processamento computacional moderado.

A estabilidade numérica é implícita nos chamados *métodos incondicionalmente estáveis*. Essa estabilidade é assegurada nos denominados *métodos condicionalmente estáveis* com o estabelecimento de um espaçamento Δt como fração do menor período do modo natural de vibração do modelo (modo de vibração mais elevado), o que é uma forte restrição ao uso desses métodos em caso de modelo de grande número de graus de liberdade. Além disso, os modos naturais de vibração de menores períodos são os menos bem representados nos modelos discretos.

A acurácia de resultados é aceitável com a adoção de espaçamento Δt que seja uma fração do período do modo de vibração mais elevado que tenha contribuição relevante na resposta dinâmica, T_p .²⁰ Para isso, costuma-se estabelecer a condição:

$$\Delta t \leq T_p / 10 \quad (6-4.7)$$

A extensão do processamento computacional é crítica em *método de integração direta* de modelo de elevado número de graus de liberdade, porque requer a resolução de um sistema de equações algébricas em número igual ao desses graus, em cada instante de integração.²¹ Espaçamento Δt muito pequeno implica processamento muito longo.

Como todos os métodos explícitos, o *método de integração por diferença finita central* é condicionalmente estável. A estabilidade numérica desse método é assegurada com:

$$\Delta t \leq T_n / \pi \quad (6-4.8)$$

em que T_n é o menor período natural de vibração do modelo discreto.

Para ilustrar a severidade desse critério, supõe-se um modelo que tenha ($T_p = 0,01s$) e ($T_n = 0,0001s$). No presente método é necessário adotar ($\Delta t \leq 0,0001/\pi = 0,0000318s$), e nos métodos incondicionalmente estáveis, poder-se-ia adotar ($\Delta t \leq 0,01/10 = 0,001s$).

6-4.2 Método de Newmark

O *método de integração de Newmark* que foi apresentado na Subseção 3-7-3.2 para o oscilador simples, com os parâmetros ($\gamma = 1/2$) e ($\beta = 1/4$), baseia-se no arbítrio de aceleração média em cada espaçamento de tempo e é incondicionalmente estável. Para desenvolvimento desse método em caso de modelo de multigraus, as Equações 3-7.37 e 3-7.39 são expandidas nas formas:

$$\ddot{\mathbf{d}}(\tau) = \frac{1}{2}(\ddot{\mathbf{d}}_i + \ddot{\mathbf{d}}_{i-1}) \quad (6-4.9)$$

e

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{d}}_i = -\ddot{\mathbf{d}}_{i-1} + \frac{4}{\Delta t^2}(\mathbf{d}_i - \mathbf{d}_{i-1} - \dot{\mathbf{d}}_{i-1}\Delta t_i) \\ \dot{\mathbf{d}}_i = -\dot{\mathbf{d}}_{i-1} + \frac{2}{\Delta t}(\mathbf{d}_i - \mathbf{d}_{i-1}) \end{cases} \quad (6-4.10)$$

²⁰ Método de integração direta não utiliza modos de vibração. A referência a esses modos é apenas para racionalização em estabelecimento de um critério de estabelecimento do espaçamento Δt . Isso porque, se a solução corresponde a uma sucessão de harmônicos, o espaçamento deve ser uma fração do menor período do componente harmônico.

²¹ Não se considera o caso de matrizes de massa e de amortecimento diagonais, no método de *integração por diferença finita central*.

Com a substituição dessas equações no sistema das equações diferenciais de movimento ($\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}_i + \mathbf{C}\dot{\mathbf{d}}_i + \mathbf{K}\mathbf{d}_i = \mathbf{f}_i$), obtém-se o sistema de equações algébricas:

$$\mathbf{K}' \mathbf{d}_i = \mathbf{f}'_i \quad (6-4.11)$$

em que se tem, de forma semelhante à Equação 3-7.41, as seguintes expressões de *pseudomatriz de rigidez* e de *pseudovetor das forças estáticas nodais*:

$$\begin{cases} \mathbf{K}' = \mathbf{K} + \frac{4}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{2}{\Delta t} \mathbf{C} \\ \mathbf{f}' = \mathbf{f}_i + \mathbf{M} \left(\ddot{\mathbf{d}}_{i-1} + \frac{4}{\Delta t} \dot{\mathbf{d}}_{i-1} + \frac{4}{\Delta t^2} \mathbf{d}_{i-1} \right) + \mathbf{C} \left(\dot{\mathbf{d}}_{i-1} + \frac{2}{\Delta t} \mathbf{d}_{i-1} \right) \end{cases} \quad (6-4.12)$$

A aplicação do *método de integração de Newmark* se inicia com a determinação do vetor de acelerações $\ddot{\mathbf{d}}_0$, como expresso na Equação 6-4.4. Em etapa genérica, tem a resolução do sistema de equações expresso na Equação 6-4.11 que fornece a solução de deslocamento \mathbf{d}_i , com a qual são obtidas, através da Equação 6-4.10, as soluções $\dot{\mathbf{d}}_i$ e $\ddot{\mathbf{d}}_i$.

O algoritmo dessa integração com o *amortecimento de Rayleigh* está esquematizado a seguir.

- Especificação de \mathbf{d}_0 , $\dot{\mathbf{d}}_0$, Δt , \mathbf{f}_i em cada discretização do tempo, e dos amortecimentos correspondentes aos modos de vibração φ_i e φ_j .
 - Construção das matrizes \mathbf{K} e \mathbf{M} .
 - Cálculo das frequências ω_i e ω_j , e dos coeficientes α e β (Equação 6-3.4)
- $$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K} \quad \text{e} \quad \mathbf{K}' = \mathbf{K} + \frac{4}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{2}{\Delta t} \mathbf{C}$$
- Se $\mathbf{d}_0 = \mathbf{0}$ e $\dot{\mathbf{d}}_0 = \mathbf{0} \rightarrow \ddot{\mathbf{d}}_0 = \mathbf{0}$
Se $\mathbf{d}_0 \neq \mathbf{0}$ ou $\dot{\mathbf{d}}_0 \neq \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}_0 = (\mathbf{f}_0 - \mathbf{K}\mathbf{d}_0 - \mathbf{C}\dot{\mathbf{d}}_0) \rightarrow \ddot{\mathbf{d}}_0$.

→ $i = 1, 2, \dots$ até o número total de instantes de discretização temporal

$$\mathbf{f}'_i = \mathbf{f}_i + \mathbf{M} \left(\ddot{\mathbf{d}}_{i-1} + \frac{4}{\Delta t} \dot{\mathbf{d}}_{i-1} + \frac{4}{\Delta t^2} \mathbf{d}_{i-1} \right) + \mathbf{C} \left(\dot{\mathbf{d}}_{i-1} + \frac{2}{\Delta t} \mathbf{d}_{i-1} \right)$$

– A resolução do sistema de equações $\mathbf{K}' \mathbf{d}_i = \mathbf{f}'_i$ fornece \mathbf{d}_i .

$$\dot{\mathbf{d}}_i = -\dot{\mathbf{d}}_{i-1} + \frac{2}{\Delta t} (\mathbf{d}_i - \mathbf{d}_{i-1})$$

$$\ddot{\mathbf{d}}_i = -\ddot{\mathbf{d}}_{i-1} + \frac{4}{\Delta t^2} (\mathbf{d}_i - \mathbf{d}_{i-1} - \dot{\mathbf{d}}_{i-1} \Delta t)$$

ALGORITMO 6-4.2 Integração direta de Newmark.

Pelo fato de esse método ser incondicionalmente estável, o espaçamento Δt é estabelecido apenas por questão de acurácia, como expresso na Equação 6-4.7.

6-4.3 Método de Wilson θ

O *método de integração de Wilson θ* foi apresentado na Subseção 3-7.3.3 em abordagem do oscilador simples. Foi descrito que esse método se baseia em aceleração linear no espaçamento estendido $\theta \Delta t$.²² E usualmente dota-se ($\theta = 1,4$), o que torna este método incondicionalmente estável.

²² O método de aceleração linear é condicionalmente estável e tem a condição de estabilidade ($\Delta t < 0,55 T_n$).

Para modelo de multigraus de liberdade, as Equações 3-7.43 e 3-7.46 são expandidas nas formas:

$$\ddot{\mathbf{d}}(\tau) = \ddot{\mathbf{d}}_{i-1} + (\ddot{\mathbf{d}}_\theta - \ddot{\mathbf{d}}_{i-1}) \frac{\tau}{\theta \Delta t} \quad (6-4.13)$$

e

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{d}}_\theta = \frac{6}{\theta^2 \Delta t^2} (\mathbf{d}_\theta - \mathbf{d}_{i-1}) - \frac{6}{\theta \Delta t} \dot{\mathbf{d}}_{i-1} - 2\ddot{\mathbf{d}}_{i-1} \\ \dot{\mathbf{d}}_\theta = \frac{3}{\theta \Delta t} (\mathbf{d}_\theta - \mathbf{d}_{i-1}) - 2\dot{\mathbf{d}}_{i-1} - \frac{\theta \Delta t}{2} \ddot{\mathbf{d}}_{i-1} \end{cases} \quad (6-4.14)$$

Com a substituição dessas expressões de velocidade e de aceleração no sistema global das equações de movimento ($\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}_i + \mathbf{C}\dot{\mathbf{d}}_i + \mathbf{K}\mathbf{d}_i = \mathbf{f}_i$), obtém-se o sistema de equações algébricas:

$$\mathbf{K}' \mathbf{d}_\theta = \mathbf{f}'_i \quad (6-4.15)$$

em que, de forma semelhante à Equação 3-7.49, se têm as seguintes expressões de *pseudomatriz de rigidez* e de *pseudovetor das forças estáticas nodais*:

$$\begin{cases} \mathbf{K}' = \mathbf{K} + \frac{6}{\theta^2 \Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{3}{\theta \Delta t} \mathbf{C} \\ \mathbf{f}'_i = \mathbf{f}_{i-1} + \theta (\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_{i-1}) + 6 \mathbf{M} \left(\frac{\ddot{\mathbf{d}}_{i-1}}{3} + \frac{\dot{\mathbf{d}}_{i-1}}{\theta \Delta t} + \frac{\mathbf{d}_{i-1}}{\theta^2 \Delta t^2} \right) + \mathbf{C} \left(\frac{\theta \Delta t}{2} \ddot{\mathbf{d}}_{i-1} + 2\dot{\mathbf{d}}_{i-1} + \frac{3\mathbf{d}_{i-1}}{\theta \Delta t} \right) \end{cases} \quad (6-4.16)$$

A aplicação dessa integração inicia com a determinação do vetor de acelerações referente ao instante t_0 , através da Equação 6-4.4, e segue com a determinação, em cada discretização da variável temporal, da solução de deslocamento \mathbf{d}_θ através da resolução do sistema expresso na Equação 6-4.15. E com essa solução são obtidas as acelerações, velocidades e deslocamentos nodais:

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{d}}_i = \frac{6}{\theta^3 \Delta t^2} (\mathbf{d}_\theta - \mathbf{d}_{i-1}) - \frac{6}{\theta^2 \Delta t} \dot{\mathbf{d}}_{i-1} + \left(1 - \frac{3}{\theta} \right) \ddot{\mathbf{d}}_{i-1} \\ \dot{\mathbf{d}}_i = \dot{\mathbf{d}}_{i-1} + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{\mathbf{d}}_i + \ddot{\mathbf{d}}_{i-1}) \\ \mathbf{d}_i = \mathbf{d}_{i-1} + \Delta t \dot{\mathbf{d}}_{i-1} + \frac{\Delta t^2}{6} (\ddot{\mathbf{d}}_i + 2\ddot{\mathbf{d}}_{i-1}) \end{cases} \quad (6-4.17)$$

Pelo fato de o *método de integração Wilson* θ ser estável com ($\theta > 1,4$), espaçamento Δt é estabelecido em atendimento à condição expressa na Equação 6-4.7.

Segue algoritmo desse método de integração com a utilização do *amortecimento de Rayleigh*.

- Especificação de \mathbf{d}_0 , $\dot{\mathbf{d}}_0$, Δt , \mathbf{f}_i em cada discretização do tempo, e dos amortecimentos correspondentes aos modos de vibração ϕ_i e ϕ_j .

- Construção das matrizes \mathbf{K} e \mathbf{M} .

- Cálculo das frequências ω_i e ω_j , e dos coeficientes α e β (Equação 6-3.4).

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}, \quad \mathbf{K}' = \mathbf{K} + \frac{6}{\theta^2 \Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{3}{\theta \Delta t} \mathbf{C}$$

$$\text{Se } \mathbf{d}_0 = \mathbf{0} \text{ e } \dot{\mathbf{d}}_0 = \mathbf{0} \rightarrow \ddot{\mathbf{d}}_0 = \mathbf{0}$$

$$\text{Se } \mathbf{d}_0 \neq \mathbf{0} \text{ ou } \dot{\mathbf{d}}_0 \neq \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}}_0 = (\mathbf{f}_0 - \mathbf{K} \mathbf{d}_0 - \mathbf{C} \dot{\mathbf{d}}_0) \rightarrow \ddot{\mathbf{d}}_0.$$

$i = 1, 2, \dots$ até o número total de instantes de discretização

$$\mathbf{f}'_i = \mathbf{f}_{i-1} + \theta (\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_{i-1}) + 6\mathbf{M} \left(\frac{\ddot{\mathbf{d}}_{i-1}}{3} + \frac{\dot{\mathbf{d}}_{i-1}}{\theta \Delta t} + \frac{\mathbf{d}_{i-1}}{\theta^2 \Delta t^2} \right) + \mathbf{C} \left(\frac{\theta \Delta t \ddot{\mathbf{d}}_{i-1}}{2} + 2\dot{\mathbf{d}}_{i-1} + \frac{3\mathbf{d}_{i-1}}{\theta \Delta t} \right)$$

- A resolução do sistema de equações $\mathbf{K}' \mathbf{d}_0 = \mathbf{f}'_i$ fornece \mathbf{d}_0 .

$$\ddot{\mathbf{d}}_i = \frac{6}{\theta^3 \Delta t^2} (\mathbf{d}_0 - \mathbf{d}_{i-1}) - \frac{6}{\theta^2 \Delta t} \dot{\mathbf{d}}_{i-1} + \left(1 - \frac{3}{\theta} \right) \ddot{\mathbf{d}}_{i-1}$$

$$\dot{\mathbf{d}}_i = \dot{\mathbf{d}}_{i-1} + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{\mathbf{d}}_i + \ddot{\mathbf{d}}_{i-1})$$

$$\mathbf{d}_i = \mathbf{d}_{i-1} + \Delta t \dot{\mathbf{d}}_{i-1} + \frac{\Delta t^2}{6} (\ddot{\mathbf{d}}_i + 2\ddot{\mathbf{d}}_{i-1})$$

ALGORITMO 6-4.3 Integração direta de Wilson θ .

EXEMPLO 6-4.1

Para comprovar numericamente os métodos de integração anteriores, considera-se a ruptura brusca do cabo que sustenta a massa de 10^3 kg, no sistema esquematizado na Figura E6-4.1a, juntamente com a discretização da viga em nove pontos nodais igualmente espaçados. Trata-se de um problema de vibração livre em que a oscilação é comandada pelo primeiro modo natural de vibração.

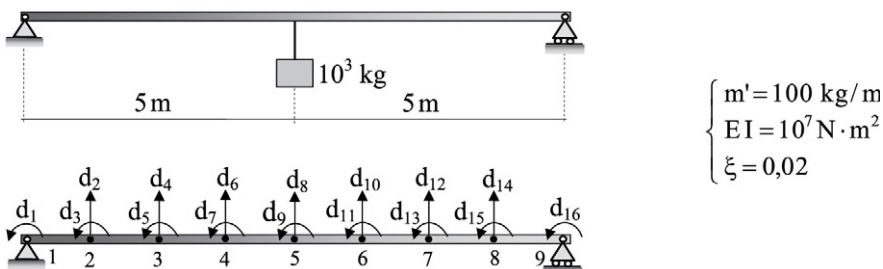


FIGURA E6-4.1a Viga biapoada que sustenta uma massa na seção média.

No caso, aplica-se a idealização em oscilador simples equivalente, na qual se tem:

$$\text{Equação 2-4.13} \rightarrow k_{eq} = \frac{48EI}{\ell^3} = 48 \cdot 10^4 \text{ N/m}$$

$$\text{Equação 2-4.17} \rightarrow m_{eq} = \frac{17m'\ell}{35} = 485,71 \text{ kg}$$

A deformada da viga sob força concentrada na seção média está expressa na Equação 2-4.11 e fornece, quando da ruptura do cabo, as condições iniciais ao movimento:

$$u_o = \frac{f\ell^3}{48EI} = 0,020438 \text{ m}, \quad v_o = 0$$

Com essas condições, a solução em vibração livre é obtida com Eq.3-3.17.

Para comparação dessa solução com soluções obtidas com a referida discretização e matriz de massa consistente, obtêm-se, com base na Equação 2-4.11, os deslocamentos iniciais:

$$\left\{ \begin{array}{l} d_{o1} = -d_{o16} = -6,13125 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \\ d_{o2} = -d_{o14} = -7,50439 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ d_{o3} = -d_{o15} = -5,74805 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \\ d_{o4} = -d_{o12} = -0,014058 \text{ m} \\ d_{o5} = -d_{o13} = -4,59844 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \\ d_{o6} = -d_{o10} = -0,018681 \text{ m} \\ d_{o7} = -d_{o11} = -2,68242 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \\ d_{o8} = -0,020438 \text{ m} \\ d_{o0} = 0 \end{array} \right.$$

As condições iniciais nas coordenadas modais são obtidas com a Equação 6-2.5.

A Figura E6-4.1b mostra os históricos da seção média da viga obtidos com a utilização do espaçamento ($\Delta t = 0,01 \text{ s}$). O histórico representado em linha contínua é o da idealização em oscilador simples equivalente, o histórico em linha pontilhada foi obtido com a primeira equação modal, e a resolução dessa equação por segmentos lineares da ação externa. As amplitudes são praticamente coincidentes, e há pequeno alongamento de período na solução modal.

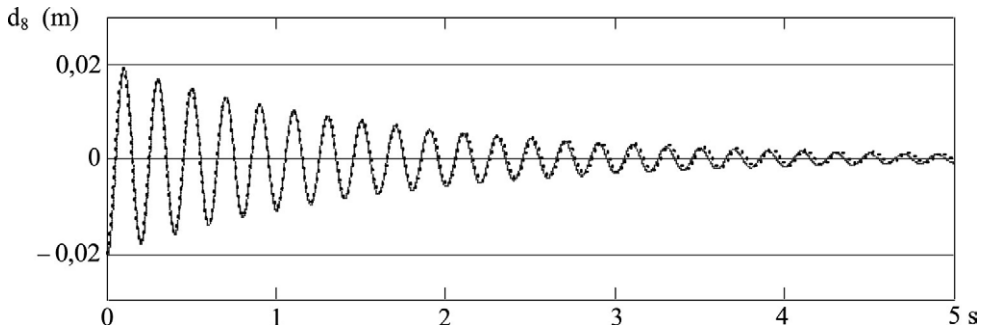


FIGURA E6-4.1b Históricos obtidos com o oscilador simples e com a primeira equação modal.

A Figura E6-4.1c mostra os históricos da mesma seção obtidos com o espaçamento ($\Delta t = 0,001$ s). Em análises do modelo discreto através de integração direta, foi utilizado o *amortecimento de Rayleigh* com a especificação da razão de amortecimento ($\xi = 0,02$) para os dois primeiros modos naturais de vibração. A representação em pontilhado é a da *integração de Newmark* e a em traço-ponto é a da *integração de Wilson* $\theta = 1,4$. Essas representações são graficamente coincidentes e muito próximas à representação obtida com a idealização em oscilador simples, que é mostrada em linha contínua. A integração direta com o *método por diferença finita* apresentou instabilidade numérica, pelo não atendimento da condição expressa na Equação 6-4.8.

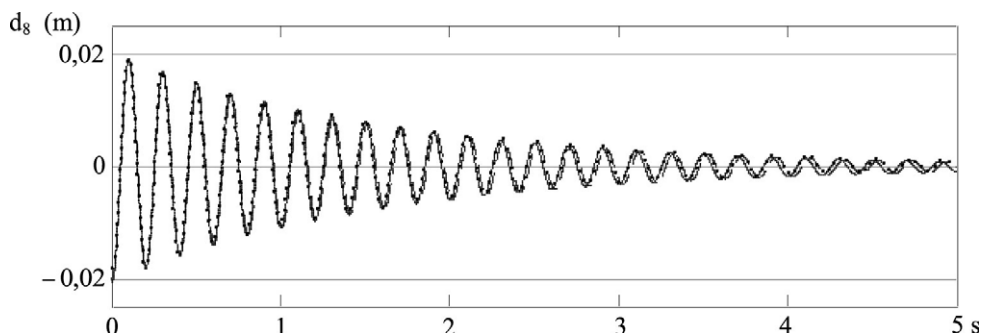


FIGURA E6-4.1c Históricos obtidos com o oscilador e com as integrações de Newton e Wilson.

EXEMPLO 6-4.2

Ainda para comparar os métodos de integração direta, considera-se a viga mostrada na Figura E6-4.2a discretizada em quinze pontos nodais igualmente espaçados.

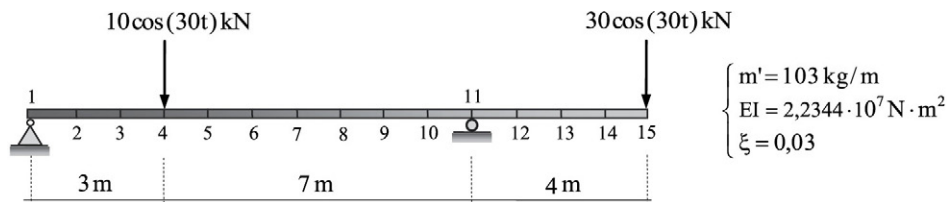


FIGURA E6-4.2a Viga biapoiada com balanço.

Essa viga tem vinte e oito graus de liberdade. A resolução do correspondente problema de autovalor forneceu as seguintes frequências e períodos naturais de vibração:

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_1 = 36,339 \text{ rad/s} \\ \omega_2 = 82,428 \text{ rad/s} \\ \omega_3 = 209,95 \text{ rad/s} \\ \dots \\ \omega_{28} = 1,9206 \cdot 10^4 \text{ rad/s} \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} T_1 = 0,17290 \text{ s} \\ T_2 = 0,07623 \text{ s} \\ T_3 = 0,02993 \text{ s} \\ \dots \\ T_{28} = 0,000327 \text{ s} \end{array} \right.$$

De acordo com o critério apresentado na Subseção 6-2.1, tem-se:

$$\frac{\omega}{\omega_1} = \frac{30}{36,339} = 0,826 > 0,2 \rightarrow \text{justifica-se uma análise dinâmica}$$

$$\frac{\omega}{\omega_3} = \frac{30}{209,95} \cong 0,143 < 0,25 \rightarrow \text{apenas os dois primeiros modos são relevantes}$$

Com as Equações 6-3.6 e 6-3.1 foi construída a matriz de amortecimento com a especificação de ($\xi = 0,03$) para os dois primeiros modos naturais de vibração.

De acordo com a Equação 6-4.8, é necessário adotar ($\Delta t \leq T_n/\pi = 0,00010409$ s) para se ter estabilidade numérica com o *método por diferença finita central*. Com adoção do espaçamento ($\Delta t = 0,000104$ s), a Figura E6-4.2b mostra os históricos do deslocamento transversal da seção média do vão principal, de zero a 0,5s, obtidos com o referido método e com a *integração de Newmark*. Vê-se que essas representações são graficamente coincidentes. Experimentos com ($\Delta t > 0,0001042$ s) confirmaram instabilidade numérica do *método por diferença finita central*.

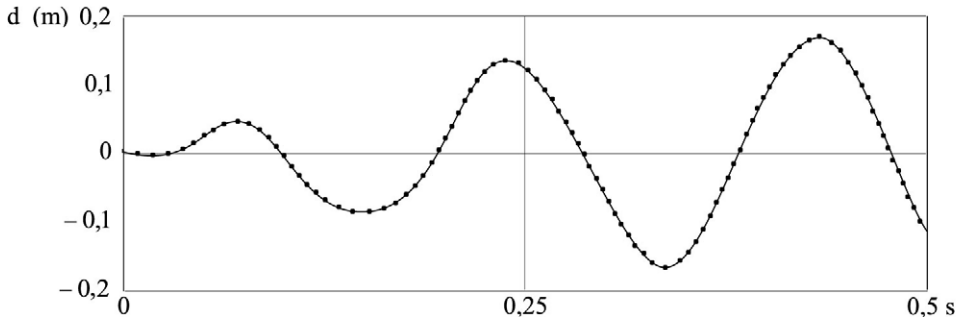


FIGURA E6-4.2b Históricos obtidos com os métodos de Newmark e por diferença finita central.

Com o espaçamento ($\Delta t = 0,005$ s = $T_1/34,58 = T_2/14,45$), a Figura E6-4.2c mostra os históricos do mesmo deslocamento, de zero a 2s, obtidos com os métodos de Newmark, Wilson $\theta = 1,4$ e superposição modal completa (com a resolução das equações modais por segmentos lineares da ação externa). O referido espaçamento atende à condição expressa na Equação 6-4.8 e foram obtidos resultados graficamente coincidentes.

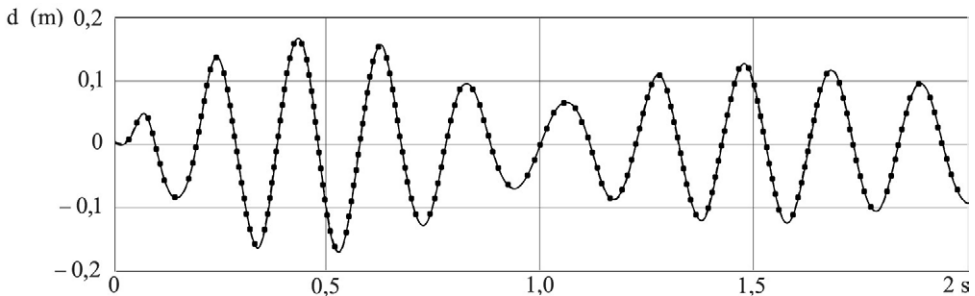


FIGURA E6-4.2c Históricos obtidos com os métodos de Newmark, Wilson $\theta = 1,4$ e superposição modal completa.

A [Figura E6-4.2d](#) mostra os históricos do mesmo deslocamento obtidos com o *método de integração de Wilson* $\theta = 1,21$ no caso do espaçamento ($\Delta t = 0,0025$ s). Observa-se instabilidade numérica aproximadamente a partir de 0,3 s.

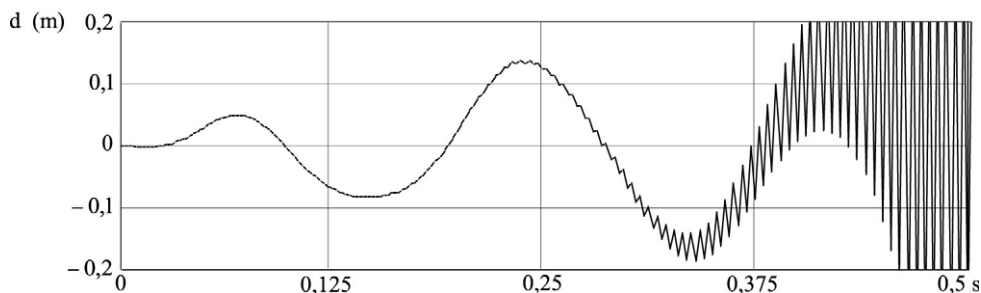


FIGURA E6-4.2d Histórico de deslocamento que mostra instabilidade numérica.

Para quatro diferentes espaçamentos de tempo, a [Tabela E6-4.2a](#) apresenta os limites inferiores de θ com os quais o *método de Wilson* θ não apresentou instabilidade numérica nos dois primeiros segundos de resposta de deslocamento.

Tabela E6-4.2a Estabilidade numérica com o *método de integração de Wilson* θ .

Espaçamento Δt	Estabilidade numérica
$T_1/69,18$	$1,21 < \theta$
$T_1/34,58$	$1,27 < \theta$
$T_1/17,29$	$1,31 < \theta$
$T_1/8,64$	$1,32 < \theta$

Para quantificar a acurácia dos *métodos de integração de Newmark* e de *Wilson* $\theta = 1,4$ em relação ao *método de superposição modal completa* com a resolução das equações modais por segmentos lineares da ação externa, adotou-se a norma:

$$\| \text{dif} \| = \left(\sum_{i=0}^{n^{\text{°inst.}}} (d_{i-\text{sup. modal}} - d_{i-\text{int. direta}})^2 \right)^{1/2}$$

A [Tabela E6-4.2b](#) apresenta valores dessa norma para diferentes espaçamentos de tempo. Observa-se que com $(T_1/4,32 \leq \Delta t \leq T_1/25,93)$, o *método de Newmark* mostrou-se mais acurado do que o *método de Wilson* θ . Com espaçamentos menores, $\Delta t \leq T_1/34,58$, este último método passou a ser mais acurado.

Tabela E6-4.2b Norma de diferenças em relação ao *método de superposição modal*.

dif		
Espaçamento Δt	Método de Newmark	Método de Wilson $\theta = 1,4$
4 / 1000s $\equiv T_1/43,32$	0,02686	0,02430
4 / 900s $\equiv T_1/38,90$	0,02806	0,02650
4 / 800s $\equiv T_1/34,58$	0,02964	0,02827
4 / 700s $\equiv T_1/30,26$	0,03207	0,03059
4 / 600s $\equiv T_1/38,90$	0,03442	0,04066
4 / 500s $\equiv T_1/21,61$	0,03935	0,05851
4 / 400s $\equiv T_1/17,29$	0,05435	0,10913
4 / 300s $\equiv T_1/12,97$	0,10838	0,24216
4 / 200s $\equiv T_1/8,64$	0,28653	0,55428
4 / 100s $\equiv T_1/4,32$	1,2577	1,1233

6-5 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA DIRETA EM CASO NÃO LINEAR

Embora seja usual a utilização de modelos discretos lineares, os sistemas físicos costumam ser não lineares.²³ Contudo, com um *método de integração direta*, comportamentos não lineares gerais (como de modificação de massa, rigidez e/ou amortecimento) podem ser simulados através do estabelecimento de propriedades constantes para o modelo em cada espaçamento de tempo adotado na integração, juntamente com ou sem um procedimento de busca de equilíbrio em cada instante de integração. Essa busca pode ser através de alterações de propriedades do modelo e/ou através de consideração de pseudoforças nodais que busquem soluções equilibradas. Como introdução a esse tema, que é muito amplo, aborda-se nesta seção a não linearidade das forças restitutivas elásticas, em generalização dos procedimentos incrementais dos *métodos de integração de Newmark e de Wilson θ* , que foram apresentados para o oscilador simples na Subseção 3-7.4.²⁴

Quanto ao *método de integração de Newmark*, generaliza-se a Equação 3-7.67, de movimento incremental, para a forma matricial:

$$\mathbf{M} \Delta \ddot{\mathbf{d}}_i + \mathbf{C} \Delta \dot{\mathbf{d}}_i + \mathbf{K}_{i-1} \Delta \mathbf{d}_i = \Delta \mathbf{f}_i \quad (6-5.1)$$

²³ Em Engenharia Civil, é usual determinar esforços internos em comportamento linear e efetuar o dimensionamento para o estado limite último (que se caracteriza pela ruína, instabilidade ou vibrações excessivas), com a consideração de coeficientes de majoração para as ações externas e de coeficiente de minoração para a resistência dos materiais.

²⁴ O *método de integração por diferença finita central* não é aqui abordado, devido à sua condição de estabilidade depender do período do modo de vibração mais elevado do modelo. Além disso, esse período pode se alterar em comportamento não linear.

onde $\mathbf{K}_{t_{i-1}}$ é a matriz de rigidez referente ao instante t_{i-1} e em que se têm os vetores de incrementos:

$$\begin{cases} \Delta \ddot{\mathbf{d}}_i = \ddot{\mathbf{d}}_i - \ddot{\mathbf{d}}_{i-1} \\ \Delta \dot{\mathbf{d}}_i = \dot{\mathbf{d}}_i - \dot{\mathbf{d}}_{i-1} \\ \Delta \mathbf{d}_i = \mathbf{d}_i - \mathbf{d}_{i-1} \\ \Delta \mathbf{f}_i = \mathbf{f}_i - \mathbf{f}_{i-1} \end{cases} \quad (6-5.2)$$

Além disso, de forma semelhante às Equações 3-7.68 e 3-7.69, escrevem-se as leis dos incrementos de acelerações e de velocidades:

$$\begin{cases} \Delta \ddot{\mathbf{d}}_i = -2\ddot{\mathbf{d}}_{i-1} + \frac{4}{\Delta t^2} (\Delta \mathbf{d}_i - \dot{\mathbf{d}}_{i-1} \Delta t) \\ \Delta \dot{\mathbf{d}}_i = -2\dot{\mathbf{d}}_{i-1} + \frac{2}{\Delta t} \Delta \mathbf{d}_i \end{cases} \quad (6-5.3)$$

Logo, com a substituição dessas expressões na Equação 6-5.1, chega-se ao sistema de equações algébricas da primeira etapa do procedimento iterativo, referente ao instante t_i :

$$\mathbf{K}'_{t_i} \Delta \mathbf{d}_i^{(1)} = \Delta \mathbf{f}_i' \quad (6-5.4)$$

onde

$$\begin{cases} \mathbf{K}'_{t_i} = \mathbf{K}_{t_{i-1}} + \frac{4}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{2}{\Delta t} \mathbf{C} \\ \Delta \mathbf{f}_i' = \Delta \mathbf{f}_i + \mathbf{M} \left(2\ddot{\mathbf{d}}_{i-1} + \frac{4}{\Delta t} \dot{\mathbf{d}}_{i-1} \right) + 2 \mathbf{C} \dot{\mathbf{d}}_{i-1} \end{cases} \quad (6-5.5)$$

A resolução do sistema anterior fornece o vetor de incrementos de deslocamentos:

$$\Delta \mathbf{d}_i^{(1)} = \mathbf{K}_{t_i}^{-1} \Delta \mathbf{f}_i' \quad (6-5.6)$$

com o qual se tem uma primeira estimativa do vetor de deslocamentos referente ao instante t_i :

$$\mathbf{d}_i^{(1)} = \mathbf{d}_{i-1} + \Delta \mathbf{d}_i^{(1)} \quad (6-5.7)$$

Com esse vetor, os esforços e/ou as tensões nos diversos elementos do modelo podem ser identificados, a partir dos quais o vetor das forças desequilibradas, $\Delta \mathbf{f}_{di}^{(2)}$, pode ser determinado. Esse tipo de força foi ilustrado na Figura 3-7.12 em *procedimento iterativo de Newton-Raphson* modificado para o caso do oscilador simples.²⁵ Logo, determina-se um novo incremento de deslocamentos:

$$\mathbf{K}'_{t_i} \Delta \mathbf{d}_i^{(2)} = \Delta \mathbf{f}_{di}^{(2)} \rightarrow \Delta \mathbf{d}_i^{(2)} = \mathbf{K}_{t_i}^{-1} \Delta \mathbf{f}_{di}^{(2)} \quad (6-5.8)$$

e fazem-se novas estimativas do vetor de incrementos de deslocamentos e do vetor das forças desequilibradas, referentes ao instante t_i .

²⁵ Alternativamente, pode-se utilizar o *procedimento de Newton-Raphson* em que se fazem atualizações da matriz de rigidez. No caso, alcança-se convergência com um menor número de iterações, embora com um maior volume de cálculo.

Repete-se o procedimento anterior, até que, na J-ésima iteração, uma tolerância de convergência aceitável seja obtida, de maneira a se determinar o incremento final de deslocamentos:

$$\Delta \mathbf{d}_i = \sum_{j=1}^J \Delta \mathbf{d}_i^{(j)} \quad (6-5.9)$$

Com esse incremento, chega-se ao vetor de deslocamentos, que diz respeito ao instante t_i :

$$\mathbf{d}_i = \mathbf{d}_{i-1} + \Delta \mathbf{d}_i \quad (6-5.10)$$

Além disso, com a utilização da Equação 6-5.3 podem ser obtidos os incrementos $\Delta \dot{\mathbf{d}}_i$ e $\Delta \ddot{\mathbf{d}}_i$, a partir dos quais são obtidos os vetores de velocidades e de acelerações:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{d}}_i = \dot{\mathbf{d}}_{i-1} + \Delta \dot{\mathbf{d}}_i \\ \ddot{\mathbf{d}}_i = \ddot{\mathbf{d}}_{i-1} + \Delta \ddot{\mathbf{d}}_i \end{cases} \quad (6-5.11)$$

Já quanto ao *método de integração de Wilson θ* , modifica-se a Equação 3-7.73, de movimento incremental, para a forma:

$$\mathbf{M} \Delta \ddot{\mathbf{d}}_{\theta i} + \mathbf{C} \Delta \dot{\mathbf{d}}_{\theta i} + \mathbf{K}_{i-1} \Delta \mathbf{d}_{\theta i} = \Delta \mathbf{f}_{\theta i} \quad (6-5.12)$$

em que se têm os vetores de incrementos:

$$\begin{cases} \Delta \ddot{\mathbf{d}}_{\theta i} = \ddot{\mathbf{d}}_{i-1} + \theta \Delta t - \ddot{\mathbf{d}}_{i-1} \equiv \ddot{\mathbf{d}}_{\theta} - \ddot{\mathbf{d}}_{i-1} \\ \Delta \dot{\mathbf{d}}_{\theta i} = \dot{\mathbf{d}}_{i-1} + \theta \Delta t - \dot{\mathbf{d}}_{i-1} \equiv \dot{\mathbf{d}}_{\theta} - \dot{\mathbf{d}}_{i-1} \\ \Delta \mathbf{d}_{\theta i} = \mathbf{d}_{i-1} + \theta \Delta t - \mathbf{d}_{i-1} \equiv \mathbf{d}_{\theta} - \mathbf{d}_{i-1} \\ \Delta \mathbf{f}_{\theta i} = \mathbf{f}_{i-1} + \theta \Delta t - \mathbf{f}_{i-1} \equiv \mathbf{f}_{\theta} - \mathbf{f}_{i-1} \end{cases} \quad (6-5.13)$$

Com essas notações, as Equações 3-7.75 e 3-7.77 são modificadas para as formas:

$$\begin{cases} \Delta \ddot{\mathbf{d}}_{\theta i} = \frac{6}{\theta^2 \Delta t^2} \left(\Delta \mathbf{d}_{\theta i} - \theta \Delta t \dot{\mathbf{d}}_{i-1} - \frac{\theta^2 \Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{d}}_{i-1} \right) \\ \Delta \dot{\mathbf{d}}_{\theta i} = \frac{3}{\theta \Delta t} \Delta \mathbf{d}_{\theta i} - 3 \dot{\mathbf{d}}_{i-1} + \frac{\theta \Delta t}{2} \ddot{\mathbf{d}}_{i-1} \end{cases} \quad (6-5.14)$$

Logo, com a substituição dessas últimas expressões na Equação 6-5.12, chega-se ao sistema de equações algébricas:

$$\mathbf{K}'_{\theta i} \Delta \mathbf{d}_{\theta i} = \Delta \mathbf{f}'_i \quad (6-5.15)$$

onde se tem:

$$\begin{cases} \mathbf{K}'_{\theta i} = \mathbf{K}_{i-1} + \frac{6}{\theta^2 \Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{3}{\theta \Delta t} \mathbf{C} \\ \Delta \mathbf{f}'_i = \Delta \mathbf{f}_{\theta i} + \mathbf{M} \left(\frac{6}{\theta \Delta t} \dot{\mathbf{d}}_{i-1} + 3 \ddot{\mathbf{d}}_{i-1} \right) + \mathbf{C} \left(3 \dot{\mathbf{d}}_{i-1} + \frac{\theta \Delta t}{2} \ddot{\mathbf{d}}_{i-1} \right) \end{cases} \quad (6-5.16)$$

A resolução do sistema expresso na Equação 6-5.15 fornece o vetor de incrementos de deslocamento:

$$\Delta \mathbf{d}_{\theta i} = \mathbf{K}_{\theta i}^{-1} \Delta \mathbf{f}'_i \quad (6-5.17)$$

com o qual se tem a primeira estimativa do vetor de deslocamento referente ao instante t_i :

$$\mathbf{d}_i^{(1)} = \mathbf{d}_{i-1} + \frac{1}{\theta} \Delta \mathbf{d}_{\theta i} \quad (6-5.18)$$

As demais etapas iterativas do *procedimento de Newton-Raphson* modificado são semelhantes ao apresentado para o caso do *método de Newmark*.

6-6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A análise dinâmica numérica do comportamento de uma estrutura tem as seguintes etapas:

1. Concepção de um modelo em barras ou de um modelo matemático contínuo.
2. Discretização do modelo contínuo através do *Método dos Elementos Finitos*.
3. Aplicação de um método de análise dinâmica.
4. Interpretação e validação dos resultados obtidos, com retorno a uma das etapas anteriores, se isso se mostrar necessário.

Quando o objetivo é o projeto de uma nova estrutura, a análise deve ser iniciada com um modelo simples que possa expressar o comportamento global de forma aproximativa ao sistema físico real. Isso baseado em prescrições de normas e na experiência do analista em casos semelhantes. O comportamento desse modelo orienta a construção de modelos mais realísticos, cujos resultados devem ser interpretados e validados, antes de serem utilizados. Dependendo da importância do projeto e da busca de uma adequada previsão do comportamento da futura edificação, são utilizados modelos com sucessivos refinamentos para cotejamento de resultados entre os mesmos.

Quando da simulação de uma estrutura existente (para verificação de segurança, reforço estrutural e/ou modificação de projeto) em que sejam possíveis medições de comportamento, o modelo numérico deve ser calibrado. Para isso, um primeiro passo é ajustar resultados da(s) primeira(s) frequência(s) natural(ais), mediante modificações de rigidez e/ou de massa do modelo. Um segundo passo é determinar o amortecimento com um dos métodos apresentados na Seção 3-5 e adotar os valores encontrados em modificação do modelo. E se possível, o passo seguinte é comparar a evolução temporal do comportamento do modelo numérico com medições do sistema físico e buscar proximidade de resultados através do aprimoramento das ações externas do modelo.

O presente capítulo encerra a apresentação dos métodos numéricos no domínio do tempo de determinação de resposta (comumente a partir do instante zero e em uma determinada extensão de tempo), de acordo com o esquema da [Figura 6-6.1](#). Com o estudo desses métodos, o leitor compreenderá grande parte das ferramentas de análise disponibilizadas nas programações automáticas comerciais, o que lhe permitirá se iniciar no uso dessas ferramentas, como também terá os subsídios básicos para o desenvolvimento de seus próprios programas de computador.

Com a disponibilidade de um programa de análise de largo espectro, surge a questão: *Que método utilizar?*

Não é possível uma resposta única, porque essa escolha depende de diversos fatores e, com a experiência, se adquire preferências. Importa, pois, reunir e comentar as principais

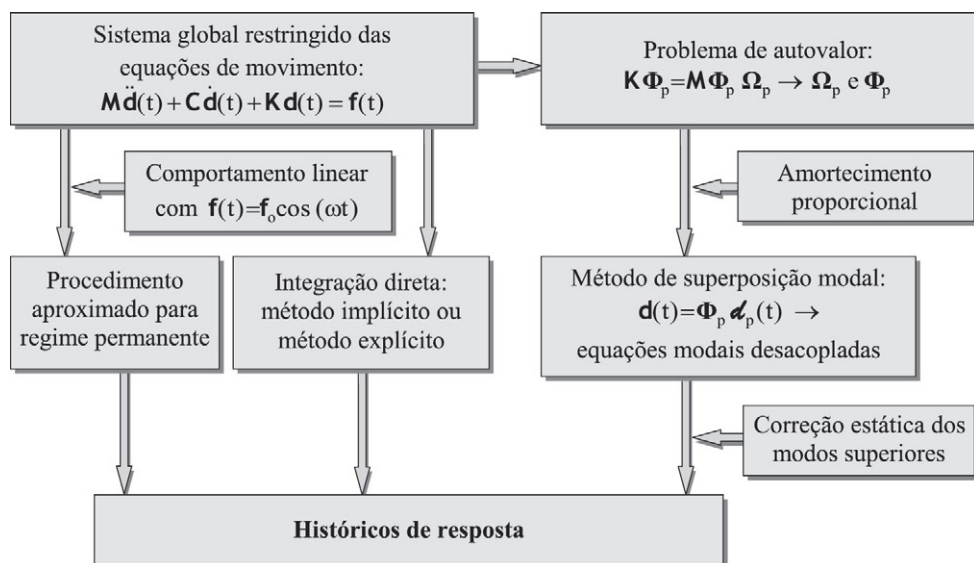


FIGURA 6-6.1 Encaminhamentos de análise de modelos de multigraus de liberdade.

informações, conclusões e sugestões apresentadas até esta seção, quanto a peculiaridades dos métodos de análise dinâmica.

A escolha de um método depende do modelo, das ações externas, dos recursos computacionais disponíveis e da experiência do analista. De forma menos relevante, depende também da provável extensão de tempo de processamento e dos resultados a serem obtidos. Isso porque modelos sofisticados podem ter centenas de milhares de graus de liberdade e os métodos de análise são incrementais na variável temporal, com o fornecimento de soluções em valores discretos do tempo. Assim, o número de graus de liberdade e o número de incrementos considerados na análise têm implicações em tempo de processamento e no volume de resultados a serem interpretados, principalmente em determinação de resposta de longa duração e/ou em comportamento não linear.

Há grande incerteza na idealização da dissipação de energia. O *amortecimento viscoso* é pouco realístico em estruturas, contudo, é usualmente adotado pelo fato de conduzir a equações de movimento de resolução simples e porque fornece resultados próximos aos observados experimentalmente. O *amortecimento de Coulomb* e o *amortecimento estrutural* podem ser considerados através de *amortecimentos viscosos equivalentes*.

Não é possível construir a matriz de amortecimento com base em atributos geométricos e de material dos componentes estruturais. O usual é construir essa matriz a partir das chamadas *razões de amortecimento* de modos de vibração, com valores disponibilizados na literatura e em códigos de projeto, em função do tipo da estrutura (vide Tabela 3-5.1).

Em estrutura de um mesmo material, adota-se matriz de amortecimento global diagonalizável em transformação similar com a matriz modal, o que é denominado *amortecimento proporcional*, através do *procedimento de Rayleigh* ou do *procedimento da superposição*

dos amortecimentos modais. O primeiro procedimento é o mais utilizado devido à sua simplicidade e porque fornece matriz de amortecimento de mesma esparsidade que a matriz de rigidez, a partir da especificação das razões de amortecimento de dois modos de vibração. Comumente especifica-se a mesma razão para o primeiro e um dos modos de frequência mais alta que ainda tenha participação relevante na resposta dinâmica. Contudo, esse procedimento tem a desvantagem de não permitir controle sobre o amortecimento dos diversos modos de vibração que possam ter contribuição relevante na resposta dinâmica. Já o procedimento de superposição dos amortecimentos modais permite esse controle, mas tem a desvantagem de fornecer matriz de amortecimento cheia, além de requerer o conhecimento de todos os modos naturais de vibração que têm participação importante na resposta.

Quanto às forças de inércia, podem ser utilizadas matrizes de *massa discreta* e de *massa consistente*. Essa última tem a mesma esparsidade que a matriz de rigidez, o que implica mais processamento do que com matriz de massa discreta, que é diagonal, sem vantagem significativa em acurácia de resultados, na medida em que se refina o modelo discreto.

Na idealização das forças restitutivas elásticas com elementos de flexão de barra, de placa e/ou de casca, pode-se incluir ou não o efeito de deformação dos esforços cortantes. A consideração desse efeito é relevante em vigas de grande altura, assim como em placas e cascas espessas.

O procedimento aproximado de análise apresentado na [Seção 6-1](#) se aplica apenas a modelos de comportamento linear, fracamente amortecidos (como é o caso das estruturas), sob ação harmônica em que o vetor das forças nodais tenha separação entre uma distribuição espacial e uma função harmônica. Esse procedimento requer pouco processamento e fornece bons resultados de regime permanente, comparativamente aos métodos de superposição modal e de integração direta, que são métodos consistentes de análise. Nesse procedimento, o espaçamento de tempo a considerar na determinação de resposta tem apenas implicação em acurácia de representação da solução, uma vez que não há acumulação de aproximações na sucessão de instantes considerados. Sugere-se adotar espaçamento pequeno em relação ao período T da ação externa, como $\Delta t \leq T/10$.

Em caso de se identificar que a frequência forçante seja muito próxima a uma das frequências naturais do modelo, é indicado afastar essas frequências, o que pode ser feito alterando a rigidez da estrutura por meio da modificação de seus componentes e/ou de suas condições de apoio. Alternativamente, pode-se modificar a massa, aumentar o amortecimento ou introduzir um sistema secundário atenuador de vibração, como o que foi descrito na [Seção 4-5](#).

Entre o *método de superposição modal* que foi desenvolvido na [Seção 6-2](#) e os *métodos de integração direta* apresentados nas Seções 6-4 e 6-5, o primeiro se restringe ao comportamento linear e ao amortecimento proporcional, e esses últimos se aplicam em comportamento linear e em comportamento não linear, assim como com amortecimento proporcional ou não.

No *método de superposição modal*, obtém-se inicialmente solução em um subespaço de dimensão muito inferior à do espaço físico inicial e, posteriormente, transforma-se essa solução ao

espaço inicial. Esse método é particularmente indicado em determinação de resposta de modelo com elevado número de graus de liberdade e de resposta de longa duração, principalmente em caso de transformação de coordenadas com reduzido número de modos naturais de vibração. Isso porque a extensão de processamento da resolução do problema de autovalor em determinação desses modos cresce à medida que se aumenta o número de graus de liberdade e o número dos modos de vibração desejados. Assim, um aspecto crucial ao se optar por esse método é a decisão quanto ao número de modos a utilizar, que, alternativamente ao uso de indicadores mais elaborados, pode ser determinado experimentalmente de forma simplista, através de análises com sucessivos conjuntos de modos e de comparação entre respostas sucessivas. A *correção estática dos modos superiores*, apresentada na Subseção 6-2.2, costuma melhorar a acurácia da resposta obtida através do referido método. Além disso, como esse método requer amortecimento proporcional para a obtenção de equações modais desacopladas, não há necessidade de construção da matriz de amortecimento global. E uma vez que se utilize a resolução direta das equações desacopladas por segmentos lineares da ação externa, como desenvolvida na Subseção 3-7.2, não ocorre acumulação de aproximações na sucessão de instantes considerados, com grande estabilidade numérica. Contudo, é indicado que o espaçamento de tempo especificado na determinação do histórico de resposta seja pequeno em relação ao período T_p do modo de vibração de maior ordem que tenha participação relevante na resposta dinâmica, como $\Delta t \leq T_p/10$.

Como já esclarecido, *métodos de integração direta* podem ser utilizados em modelo de comportamento linear ou não linear, com amortecimento proporcional ou não. É mandatório o uso de integração direta em caso de amortecimento não proporcional e/ou em comportamento não linear.²⁶ Em caso de modelo de comportamento linear com amortecimento proporcional, integração direta é indicada em determinação de resposta de curta duração, em que muitos modos naturais de vibração tenha participação relevante. Isso porque os métodos dessa integração requerem a resolução de um sistema de equações algébricas em número igual ao de graus de liberdade do modelo, em cada instante de determinação de histórico de resposta.

Os métodos de integração direta são *explícitos* ou *implícitos*. O método por *diferença finita central*, descrito na Subseção 6-4.1, por ser explícito e consequentemente condicionalmente estável, requer espaçamento de integração muito pequeno para que se tenha estabilidade numérica. Por essa razão, esse método não costuma ser utilizado em modelos de elevado número de graus de liberdade. O *método implícito de Newmark*, apresentado na Subseção 6-4.2, é incondicionalmente estável (independentemente do espaçamento Δt) e simples, além de fornecer bons resultados. Já o *método implícito de Wilson θ* , detalhado na Subseção 6-4.3, é condicionalmente estável com $(\theta \leq 1,3)$ e incondicionalmente estável com o valor $(\theta = 1,4)$ usualmente adotado. Com métodos incondicionalmente estáveis, o espaçamento de integração precisa apenas ser pequeno em relação ao período T_p do modo de vibração de maior ordem que se antecipa ter participação na resposta dinâmica, como $\Delta t \leq T_p/10$.

Integração direta requer a construção da matriz de amortecimento global. No caso, é usual utilizar o *amortecimento de Rayleigh*, por conduzir a uma matriz de amortecimento com a mesma esparsidade que a da matriz de rigidez. Em análise dinâmica não linear, é prático construir essa matriz com base nas matrizes de massa e de rigidez iniciais, e considerar que o amortecimento se mantenha constante ao longo da resposta do modelo.

²⁶ Como será apresentado no próximo capítulo, amortecimento não proporcional pode ser considerado em análise no domínio da frequência. Isso, contudo, requer excessivo volume de cálculo e não é utilizado na prática.

Com o estudo deste capítulo constata-se que os métodos de análise dinâmica no domínio do tempo em caso de múltiplos de liberdade são simples e se baseiam em conceitos e métodos de análise do oscilador de um grau de liberdade, apresentados no Capítulo 3.

A escolha de um método depende do modelo da estrutura, da excitação aplicada ao modelo, dos recursos computacionais disponíveis, dos resultados desejados e da experiência e preferência do engenheiro analista. Assim, com a compreensão deste capítulo, o leitor poderá se iniciar na utilização desses recursos, de forma consciente.

No próximo capítulo será detalhada a análise no domínio da frequência, que tem formulação mais elaborada do que a do domínio do tempo por requerer álgebra complexa, mas o que a torna adequada quando se utiliza propriedade física definida em forma complexa, como é o amortecimento estrutural. Será também apresentada uma eficaz equivalência desse amortecimento ao viscoso, que propicia análise no domínio do tempo, que é mais simples.

No Capítulo 8 será desenvolvida a análise sísmica de estruturas, que tem características próprias, como o tradicional *método de análise estática equivalente*, a estimativa de valores extremos de resposta a partir de espectros de resposta e a excitação múltipla de apoios a partir de acelerogramas.

No Capítulo 9 serão tratadas a resolução eficiente do problema de autovalor (em determinação de frequências e modos naturais de vibração) e uma eficaz matriz de transformação de coordenadas. Isso porque os graus de liberdade podem chegar à casa de centenas de milhares, o que, em caso de comportamento linear, permite a utilização de método de superposição de respostas individuais.

6-7 EXERCÍCIOS PROPOSTOS

6-7.1 A Figura 6-7.1 mostra uma viga em balanço sob força harmônica na extremidade livre e a discretização dessa viga em quatro elementos de iguais comprimentos.

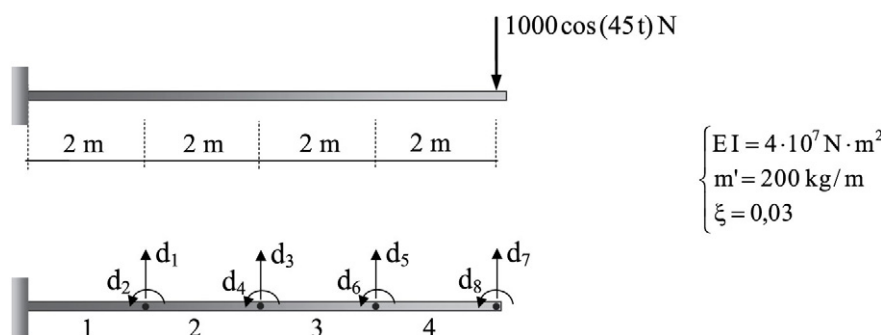


FIGURA 6-7.1 Viga em balanço sob força harmônica.

Para essa viga, pede-se:

- a) A frequência fundamental, o fator de amplificação dinâmica e a amplitude da oscilação em regime permanente, com a concepção de oscilador simples amortecido equivalente.
- b) As frequências naturais correspondentes à discretização mostrada na figura, juntamente com o percentual da diferença da frequência fundamental obtida com

essa discretização em relação à que se obtém com a idealização em oscilador simples equivalente.

- O vetor de amplitudes dos deslocamentos com o procedimento que foi desenvolvido na Seção 6-1. Percentual da diferença do resultado obtido para o deslocamento d_7 em relação à amplitude em regime permanente da idealização em oscilador simples amortecido.
- Os históricos do deslocamento transversal da extremidade livre obtidos com o referido procedimento e com o *método de superposição modal completa*, nos quatro primeiros segundos. Em cada equação modal, indica-se utilizar a resolução direta por segmentos lineares da ação externa e o espaçamento ($\Delta t = 0,005$ s).
- A curva de razões de amortecimento *versus* ordem dos modos naturais de vibração, com base no *amortecimento de Rayleigh* em que se especifica a razão de amortecimento ($\xi = 0,03$) para os dois primeiros modos naturais de vibração.
- Os históricos do deslocamento transversal da extremidade livre, no caso do amortecimento ($\xi = 0,03$) e com a utilização dos *métodos de integração direta de Newmark* e *de Wilson* $\theta = 1,4$. Indica-se utilizar o espaçamento ($\Delta t = 0,005$ s).
- O número de modos naturais de vibração necessários à transformação modal de coordenadas, de acordo com o critério apresentado na Seção 2-2.
- Os históricos do terceiro deslocamento obtidos através do *método de superposição modal*, nos casos de transformação de coordenadas com um e com dois modos naturais de vibração. Indica-se utilizar, em cada equação modal, a resolução direta por segmentos lineares da ação externa e o espaçamento ($\Delta t = 0,005$ s).

6-7.2 A Figura 6-7.2 mostra um *shear building* de três graus de liberdade. Para esse modelo, pede-se:

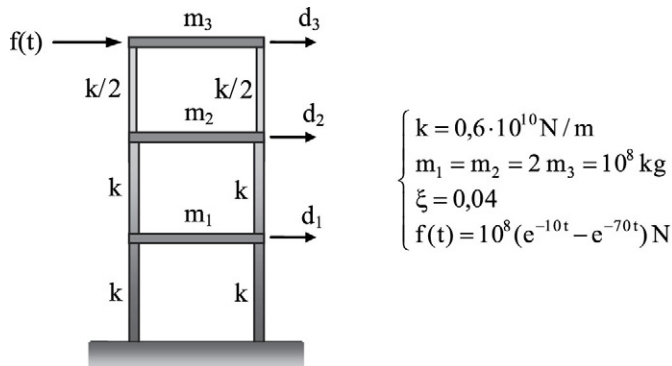


FIGURA 6-7.2 *Shear building* de três graus de liberdade.

- A matriz de *amortecimento de Rayleigh* com base na razão de amortecimento ($\xi = 0,04$) para os dois primeiros modos naturais de vibração.
- A razão de amortecimento do terceiro modo natural de vibração, correspondente à referida matriz.
- Os históricos dos deslocamentos dos três níveis do *shear building*. Indica-se utilizar os *métodos de integração direta por diferença finita central*, *de Newmark* e *de Wilson* $\theta = 1,4$, com o espaçamento ($\Delta t = 0,005$ s).

6-8 QUESTÕES PARA REFLEXÃO

- 6-8.1** Por que é importante estudar o comportamento do oscilador simples para compreender os métodos de análise de modelo de multigraus de liberdade?
- 6-8.2** Como identificar a necessidade de uma análise dinâmica? Quais são os métodos de análise dinâmica, no domínio do tempo, disponíveis para modelo de multigraus de liberdade? Quais são as diferenças básicas entre esses métodos?
- 6-8.3** Qual é a característica da resposta em regime permanente de estrutura sob força harmônica? E qual a aproximação que foi adotada no procedimento desenvolvido na Seção 6-1?
- 6-8.4** Em que consiste o *método de superposição modal*? Quais são as condições para que esse método possa ser aplicado? Quais são as vantagens e desvantagens desse método? E como identificar o número de modos naturais de vibração necessários à transformação de coordenadas?
- 6-8.5** Por que é usual considerar razões de amortecimento de modos naturais de vibração?
- 6-8.6** Por que, em integração das equações modais com ações aperiódicas, é mais indicado utilizar a resolução direta por segmentos lineares da ação externa, formulada na Subseção 3-7.2, do que usar um dos métodos de integração numérica que foram apresentados na Seção 3-7.3?
- 6-8.7** Em que consiste a *correção estática dos modos superiores* à solução do *método de superposição modal*? Quando essa correção se mostra relevante?
- 6-8.8** O que é *amortecimento proporcional*? E *amortecimento não proporcional*? Quando adotar essas concepções de amortecimento?
- 6-8.9** Idem para o *amortecimento de Rayleigh*? Quais são as vantagens e desvantagens dessa idealização de amortecimento?
- 6-8.10** Idem para o *procedimento de superposição dos amortecimentos modais*? Quais são as vantagens e desvantagens desse procedimento?
- 6-8.11** Qual é a utilidade de autovetores complexos em *Dinâmica das Estruturas*? Por que não é usual utilizar esses autovetores?
- 6-8.12** O que significa *integração direta* das equações de movimento? Quais são as vantagens e desvantagens dessa integração? E quais são os principais métodos dessa integração?
- 6-8.13** Por que a questão de *estabilidade numérica* é mais problemática em integração direta das equações de movimento de modelo de multigraus de liberdade do que na equação de movimento do oscilador simples? O que é um método de integração direta *incondicionalmente estável*? E *condicionalmente estável*?
- 6-8.14** Quais são as diferenças básicas entre os *métodos de integração por diferença finita central, de Newmark e de Wilson θ* ? Quais são as vantagens de cada um desses

métodos em relação aos demais? Como arbitrar o espaçamento de integração em cada um desses métodos?

- 6-8.15** Que característica tem a resposta de uma estrutura sob força de impacto? No caso, qual é a influência do amortecimento e qual é o método de análise mais indicado para modelo de elevado número de graus de liberdade?
- 6-8.16** Qual é a diferença entre a simulação de não linearidade física através de modificação da *pseudomatriz de rigidez* e a simulação através de alteração do *pseudovetor das forças nodais*? Que vantagens um procedimento tem em relação ao outro?



CAPÍTULO 7

Análise no Domínio da Frequência

O QUE É E QUAL A IMPORTÂNCIA DA ANÁLISE NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA?

Em resolução numérica, uma *análise no domínio do tempo* fornece solução instantânea a instantes. Já em *análise discreta no domínio da frequência*, as soluções referentes ao conjunto dos instantes de discretização da ação externa só são obtidas ao final da análise. Nesta, passa-se ao domínio da frequência com a *transformada de Fourier (direta)* e retorna-se ao domínio do tempo com a *transformada de Fourier inversa*. Isto é, faz-se a transformação das equações diferenciais de movimento em equações algébricas na variável frequência, cujas soluções são transformadas de volta ao domínio do tempo. Assim, a essência dessa análise é a decomposição da ação externa em componentes harmônicos, a obtenção das respostas a esses componentes em termos de frequência e a transposição, com superposição, dessas respostas ao domínio do tempo.

Com propriedades físicas definidas em forma complexa, como é o caso do *amortecimento estrutural*, a análise no domínio da frequência é a indicada, além de ter concisão de formulação e de expressar o *conteúdo de frequência* da ação externa. O cotejamento desse conteúdo com as primeiras frequências naturais do modelo discreto permite avaliar a potencialidade dessa ação em excitar a estrutura cujo modelo se analisa. Contudo, como essa análise é de entendimento mais difícil ao iniciante, demanda mais atenção de uso e, em grande parte dos casos, requer processamento mais extenso, a equivalência daquele amortecimento ao *amortecimento viscoso*, como aqui apresentado, mostra-se vantajosa, para então se aplicar a análise no domínio do tempo.

Neste capítulo está detalhada a fascinante análise no domínio da frequência, juntamente com os seus fundamentos, orientações de uso e diversas aplicações numéricas, cujas soluções são comparadas com as da análise no domínio do tempo. Isso estruturado nas seguintes seções:

7-1 Apresentação, em notação exponencial complexa, da *série de Fourier*, que é a base para a obtenção das *transformadas de Fourier*.

- 7-2** Desenvolvimento das *transformadas de Fourier inversa e direta*, na *forma contínua* e na *forma discreta*, além da descrição das *transformadas de Fourier rápidas*. Essas últimas são eficientes algoritmos das transformadas discretas e as utilizadas em resoluções numéricas.
- 7-3** Estudo da análise do oscilador simples no domínio da frequência, com o *amortecimento viscoso* e o *amortecimento estrutural*. É pormenorizada a conceituação desse amortecimento e apresentada a formulação discreta com o controle das correspondentes aproximações de cálculo, além da consideração das condições iniciais ao movimento.
- 7-4** Apresentação da análise matricial do oscilador simples no domínio da frequência, assim como das correspondentes peculiaridades e equivalência à resolução com base na *integral de Duhamel*.
- 7-5** Formulação da análise de modelo de multigraus de liberdade através do domínio da frequência, em coordenadas modais e em resolução direta nas coordenadas geométricas.
- 7-6** Comentários quanto à utilização do *amortecimento estrutural* e da análise no domínio da frequência.
- 7-7** Sugestão de exercícios para resolução.
- 7-8** Proposição de questões para reflexão.

7-1 SÉRIE DE FOURIER EM NOTAÇÃO COMPLEXA

A *série de Fourier* é o desenvolvimento de uma função periódica em seus componentes de diferentes frequências e amplitudes. Essa série foi apresentada em notação trigonométrica na Subseção 3-6.1 e, a seguir, é modificada para a forma exponencial complexa. Para isso, substituem-se as *relações de Euler*:

$$\begin{cases} \cos(q\omega_0 t) = \frac{e^{iq\omega_0 t} + e^{-iq\omega_0 t}}{2} \\ \sin(q\omega_0 t) = \frac{e^{iq\omega_0 t} - e^{-iq\omega_0 t}}{2i} \end{cases} \quad (7-1.1)$$

na Equação 3-6.2, obtendo-se a *série de Fourier* sob a forma:

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + \frac{1}{2} \sum_{q=1}^{\infty} (a_q (e^{iq\omega_0 t} + e^{-iq\omega_0 t}) - ib_q (e^{iq\omega_0 t} - e^{-iq\omega_0 t})) \\ \rightarrow \quad f(t) &= a_0 + \frac{1}{2} \sum_{q=1}^{\infty} ((a_q - ib_q) e^{iq\omega_0 t} + (a_q + ib_q) e^{-iq\omega_0 t}) \end{aligned} \quad (7-1.2)$$

com os coeficientes a_0 , a_q e b_q expressos na Equação 3-6.3.

Com as notações:

$$\begin{cases} C_0 = a_0 \\ C_q = \frac{a_q - ib_q}{2} \\ C_q^* = \frac{a_q + ib_q}{2} \end{cases} \quad (7-1.3)$$

o desenvolvimento em série anterior modifica-se para a forma:

$$f(t) = C_0 + \sum_{q=1}^{\infty} (C_q e^{iq\omega_0 t} + C_q^* e^{-iq\omega_0 t}) \quad (7-1.4)$$

em que o coeficiente C_q^* é o complexo conjugado do coeficiente C_q .

Logo, com a notação ($C_{-q} = C_q^*$), obtém-se a seguinte forma exponencial da série de Fourier de uma função periódica, que é mais compacta do que a correspondente forma trigonométrica:

$$f(t) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} C_q e^{iq\omega_0 t} \quad (7-1.5)$$

Nessa forma, C_0 é o valor médio da função periódica $f(t)$ e o coeficiente C_q é a amplitude complexa da função harmônica de frequência $q\omega_0$, denominado *coeficiente de Fourier*. O módulo desse coeficiente é uma medida da participação do harmônico $e^{iq\omega_0 t}$ na composição daquela função.

Esse coeficiente pode também ser escrito em forma exponencial. Para isso, substituem-se as expressões de a_0 , a_q e b_q constantes da Equação 3-6.3 na segunda das expressões da Equação 7-1.3, de maneira a obter

$$\begin{aligned} C_q &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \cos(q\omega_0 t) dt - i \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \sin(q\omega_0 t) dt \right) \\ \rightarrow C_q &= \frac{1}{T_0} \left(\int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) (\cos(q\omega_0 t) - i \sin(q\omega_0 t)) dt \right) \\ \rightarrow C_q &= \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) e^{-iq\omega_0 t} dt, \quad q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \quad (7-1.6)$$

A representação gráfica do módulo desse coeficiente *versus* $q\omega_0$ é o *espectro de amplitudes de Fourier* que evidencia a participação das diversas funções harmônicas na composição da função $f(t)$.

É simples identificar que, com função periódica real, os coeficientes C_q e C_{-q} são complexos conjugados cujas partes imaginárias se cancelam no desenvolvimento em série expresso na Equação 7-1.5.

7-2 TRANSFORMADAS DE FOURIER

A *transformada de Fourier* é um operador matemático linear utilizado usualmente para converter uma função aperiódica no tempo, através da decomposição dessa função, em soma infinita de funções harmônicas, que constitui um *espectro contínuo de amplitudes*.¹ A *transformada de Fourier inversa* converte essa decomposição ao domínio do tempo, em restituição da função original. Essas transformadas são muito úteis em interpretação de resultados experimentais, em transformação de convoluções em multiplicações e em resolução de equações diferenciais, como as da *Dinâmica das Estruturas*. Tais transformadas são desenvolvidas a seguir, em forma analítica e em forma discreta. Posteriormente, são

¹ Assim como a variável independente na *série de Fourier* não é necessariamente o tempo, a variável independente da função aperiódica em *transformada de Fourier* não precisa ser o tempo, pode ser uma variável espacial, por exemplo.

descritas as *transformadas de Fourier rápidas*, que são eficientes algoritmos de cálculo das transformadas discretas.

7-2.1 Transformadas contínuas

A *série de Fourier* expressa na [Equação 7-1.5](#) aplica-se em decomposição de função periódica, com a obtenção de um espectro discreto de amplitudes na variável frequência. Quando o período dessa função se torna muito grande, o espaçamento entre frequências se faz muito pequeno, de maneira que no limite, com o período tendendo ao infinito, a distribuição de frequências passa a ser contínua. Dessa maneira, obtém-se a representação de uma função aperiódica, e diz-se que a *série de Fourier* se converte na *integral de Fourier*, também denominada *transformada de Fourier inversa*, e os *coeficientes de Fourier* se convertem na *transformada de Fourier (direta)*.

Assim, para uma função aperiódica na variável tempo, como a representada em linha contínua na [Figura 7-2.1](#), arbitra-se um período ($T_0 = 2\pi/\omega_0$) com o objetivo de imaginá-la periódica, como sugerem as representações em tracejado da figura. Esse período será posteriormente suposto tender ao infinito, para simular a função aperiódica original.

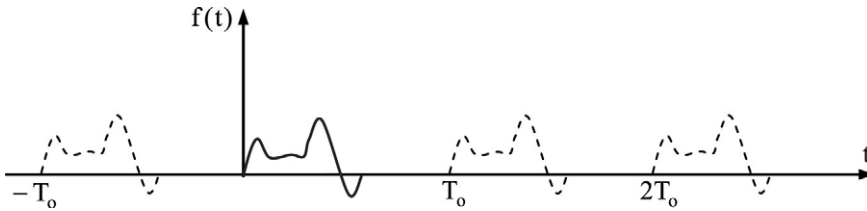


FIGURA 7-2.1 Consideração de uma força aperiódica como periódica.

A partir das [Equações 7-1.5 e 7-1.6](#) e com a notação ($\omega_q = q\omega_0$), escreve-se:

$$\begin{cases} f(t) = \frac{1}{T_0} \sum_{q=-\infty}^{\infty} T_0 C_q e^{i\omega_q t} \rightarrow f(t) = \frac{\omega_0}{2\pi} \sum_{q=-\infty}^{\infty} (T_0 C_q) e^{i\omega_q t} \\ T_0 C_q = \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) e^{-i\omega_q t} dt \end{cases} \quad (7-2.1)$$

Com o estabelecimento de T_0 , tem-se o intervalo entre as frequências dos componentes harmônicos do desenvolvimento da função $f(t)$ suposta com periódica:

$$(q+1)\omega_0 - q\omega_0 = \omega_0 = \Delta\omega \rightarrow \Delta\omega = \frac{2\pi}{T_0} \quad (7-2.2)$$

Com o artifício da extensão de T_0 ao infinito, o intervalo anterior tende a zero e, conseqüentemente, a frequência ω_q tende a variar de forma contínua. Assim, com essa extensão, escreve-se o par de expressões da [Equação 7-2.1](#) sob a forma:

$$\begin{cases} f(t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\substack{T_0 \rightarrow \infty \\ \Delta\omega \rightarrow 0}} \left(\sum_{q=-\infty}^{\infty} T_0 C_q e^{i\omega_q t} \Delta\omega \right) \\ \lim_{\substack{T_0 \rightarrow \infty \\ \Delta\omega \rightarrow 0}} (T_0 C_q) = \lim_{\substack{T_0 \rightarrow \infty \\ \Delta\omega \rightarrow 0}} \left(\int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) e^{-i\omega_q t} dt \right) \rightarrow F(\omega_q) = \lim_{\substack{T_0 \rightarrow \infty \\ \Delta\omega \rightarrow 0}} \left(\int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) e^{-i\omega_q t} dt \right) \end{cases} \quad (7-2.3)$$

Logo, na condição limite tem-se ($\Delta\omega = d\omega$), o que permite trocar, no par de expressões anterior, o somatório por integral, adotar a notação ω em lugar de ω_q e escrever:

$$\begin{cases} f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(i\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ F(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \end{cases} \quad (7-2.4)$$

Essas expressões formam o par de *transformadas de Fourier contínuas*. A primeira é a *transforma inversa*, que exprime a função aperiódica $f(t)$ como a integral de componentes harmônicos de amplitudes $F(i\omega)/(2\pi)$, entre $-\infty$ e $+\infty$. Já a segunda expressão é a *transformada de Fourier (direta)*, que modifica aquela função temporal em uma função no domínio da frequência, $F(i\omega)$.² Nota-se que as partes exponenciais dessas transformadas têm sinais contrários, que o expoente é negativo na transformada direta e é positivo na transformada inversa. Observa-se que a função temporal está denotada com letra minúscula e que a função da frequência, com letra maiúscula.³

As transformadas anteriores são denotadas sob a forma:

$$\begin{cases} f(t) = \mathcal{T}^{-1}(F(i\omega)) \\ F(i\omega) = \mathcal{T}(f(t)) \end{cases} \quad (7-2.5)$$

em que \mathcal{T}^{-1} indica *transformada de Fourier inversa* e \mathcal{T} , *transformada de Fourier (direta)*.

Como ($\omega = 2\pi f$), o par de *transformadas de Fourier* pode também ser escrito em termos da frequência cíclica:

$$\begin{cases} f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(i f) e^{i 2\pi f t} df \equiv \mathcal{T}^{-1}(F(i f)) \\ F(i f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i 2\pi f t} dt \equiv \mathcal{T}(f(t)) \end{cases} \quad (7-2.6)$$

A representação gráfica do módulo da *transformada de Fourier versus* ω ou f é o *espectro de amplitudes* dessa transformada. Esse espectro é contínuo, diferentemente do espectro de amplitudes de Fourier de uma função periódica, que é discreto.

A função aperiódica $f(t)$ pode ser real ou complexa. Com função real e par, $F(i\omega)$ é uma função real e par. Em caso de $f(t)$ ser apenas real, $F(i\omega)$ é complexa, de parte real função par em ω e de parte imaginária função ímpar em ω .

Diz-se que a *transformada de Fourier* é um *operador linear* porque, com funções $f(t)$ e $g(t)$ que admitam essa transformada, tem-se:

$$\mathcal{T}(\alpha f(t) + \beta g(t)) = \alpha \mathcal{T}(f(t)) + \beta \mathcal{T}(g(t)) \quad (7-2.7)$$

² As condições para a existência dessas transformadas são irrelevantes em *Dinâmica das Estruturas* e frequência negativa, como utilizado nessas transformadas, é um artifício matemático.

³ Com a manutenção da correspondência biunívoca entre as funções $f(t)$ e $F(i\omega)$, quaisquer fatores cujo produto seja $1/(2\pi)$ podem ser utilizados nas expressões dessas funções.

em que α e β são escalares.⁴

Entre outras propriedades dessa transformada, tem-se para a derivada primeira:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(\dot{f}(t)) &= \mathcal{T}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(i\omega) e^{i\omega t} d\omega\right)\right) = \mathcal{T}\left(\frac{i\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(i\omega) e^{i\omega t} d\omega\right) \\ \rightarrow \mathcal{T}(\dot{f}(t)) &= i\omega F(i\omega) \equiv i\omega \mathcal{T}(f(t))\end{aligned}\quad (7-2.8)$$

De forma semelhante, chega-se à propriedade da derivada segunda:

$$\mathcal{T}(\ddot{f}(t)) = -\omega^2 F(i\omega) \equiv -\omega^2 \mathcal{T}(f(t)) \quad (7-2.9)$$

Outra propriedade diz respeito à convolução entre as funções $f(t)$ e $g(t)$, que se escreve:

$$f(t) \otimes g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \tau) g(\tau) d\tau \quad (7-2.10)$$

Em caso de as funções $F(i\omega)$ e $G(i\omega)$ serem as *transformadas de Fourier* das funções $f(t)$ e $g(t)$, respectivamente, tem-se:⁵

$$\mathcal{T}(f(t) \otimes g(t)) = \mathcal{T}(f(t)) \mathcal{T}(g(t)) = F(i\omega) G(i\omega) \quad (7-2.11)$$

Ou seja, a *transformada de Fourier* modifica uma integral de convolução no produto das transformadas das funções envolvidas na convolução.

EXEMPLO 7-2.1

Examina-se a *transformada de Fourier* da *função Gaussiana* centrada na origem:

$$f(t) = e^{-t^2/(2\sigma)^2}.$$

Essa transformada se escreve:

$$\mathcal{T}(e^{-t^2/(2\sigma)^2}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/(2\sigma)^2} e^{-i\omega t} dt \rightarrow \mathcal{T}(e^{-t^2/(2\sigma)^2}) = \sigma\sqrt{2\pi} e^{-\sigma^2\omega^2/2}$$

Esse é um resultado real, pelo fato de $f(t)$ ser real e par.

Naturalmente, tem-se a transformada inversa:

$$\mathcal{T}^{-1}(\sigma\sqrt{2\pi} e^{-\sigma^2\omega^2/2})^{-1} = e^{-t^2/(2\sigma)^2}$$

A parte esquerda da [Figura E7-2.1a](#) representa a função $f(t)$ em linha contínua no caso de $(\sigma = 1)$ e, em linha pontilhada no caso de $(\sigma = 4)$. Na parte direita da mesma figura estão mostradas as correspondentes *transformadas de Fourier*, com os mesmos códigos de traçado. Observa-se que a *função Gaussiana* mais estreita corresponde à transformada de Fourier mais larga, e de forma inversa a *função Gaussiana* mais larga corresponde à transformada mais estreita.

⁴ Essa propriedade é utilizada na *integral de Duhamel*, o que, em resolução numérica, facilita a obtenção da solução dessa integral.

⁵ De Vries, P.L., 1994, *A First Course in Computational Physics*, John Wiley & Sons, New York.

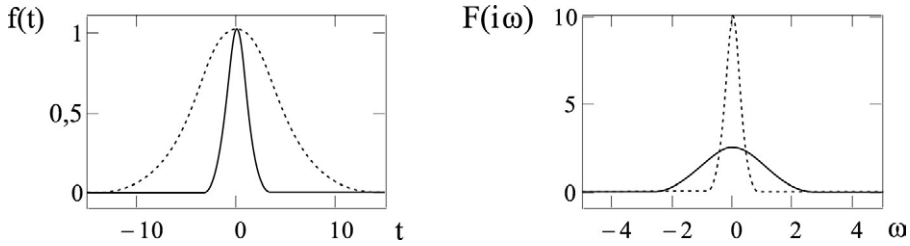


FIGURA E7-2.1a Funções Gaussianas e correspondentes transformadas de Fourier.

EXEMPLO 7-2.2.

Examina-se a transformada de Fourier da função representada na Figura E7-2.2a.

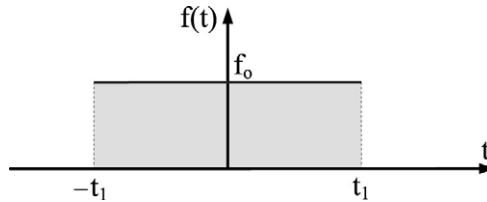


FIGURA E7-2.2a Função degrau.

Essa é também uma função real e par, de transformada:

$$\tau(f_0) = \int_{-t_1}^{t_1} f_0 e^{-i\omega t} dt \rightarrow \tau(f_0) \equiv F(i\omega) = f_0 \frac{e^{i\omega t_1} - e^{-i\omega t_1}}{i\omega} = \frac{2f_0 \sin(\omega t_1)}{\omega}$$

Essa transformada está representada na Figura E7-2.2b em que se observa, assim como no exemplo anterior, que as amplitudes se atenuam à medida que se afasta da origem de frequência.

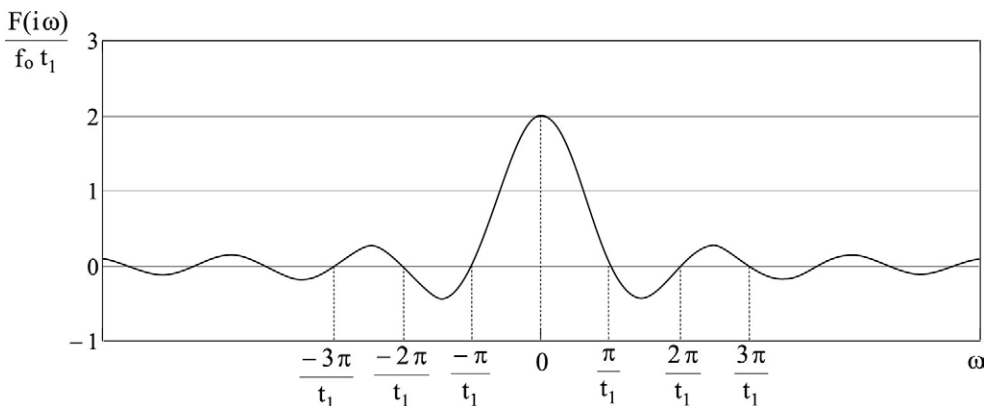


FIGURA E7-2.2b Transformada de Fourier normalizada.

Em espectro de amplitudes de Fourier, pode-se delimitar uma região de frequências que inclua as amplitudes de valores mais relevantes na composição da função $f(t)$, região esta que exprime o chamado conteúdo de frequência dessa função. O cotejamento desse conteúdo com as primeiras

frequências naturais de um sistema mecânico permite prever a importância do comportamento dinâmico desse modelo, assim como fornece uma identificação dos modos naturais de vibração a serem considerados em transformação modal de coordenadas (vide Subseção 6-2.1).

7-2.2 Transformadas discretas

As integrais envolvidas em *transformadas de Fourier* contínuas costumam ser de integrações analíticas impossíveis, além do que, a função aperiódica $f(t)$ pode não ter definição analítica e, sim, ser estabelecida por sequência de valores discretos no tempo. É necessário, portanto, utilizar as *transformadas de Fourier discretas* que operam a partir de sequências de valores de funções, como desenvolvido a seguir.

Como ilustra a [Figura 7-2.2](#), supõe-se uma função discreta de período T_0 que englobe os instantes de definição da mesma, de t_0 a t_f , mais uma extensão ΔT que inclua valores nulos, de t_{f+1} a t_{N-1} . Utiliza-se essa extensão para tornar desprezível o efeito periódico introduzido com a discretização da *transformada de Fourier*, como será mostrado posteriormente. Adota-se um número par de pontos de discretização, de t_0 a t_{N-1} , igualmente espaçados de ($\Delta t = T_0/N$), de maneira a se ter o instante $t_{N/2}$ e o n -ésimo instante:

$$t_n = n \Delta t = n T_0 / N \quad (7-2.12)$$

com ($n = 0, 1, 2, \dots, N-1$).

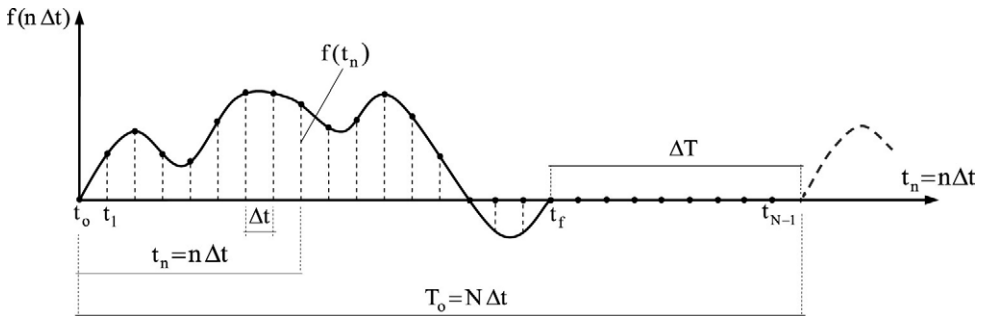


FIGURA 7-2.2 Função aperiódica discretizada em N pontos.

Com a descrita discretização, têm-se N incrementos de frequência definidos por:

$$\Delta \omega = \frac{2\pi}{T_0} \quad (7-2.13)$$

de forma a se estabelecerem as frequências:

$$\omega_q = q \Delta \omega \rightarrow \omega_q = \frac{2\pi q}{T_0} \quad (7-2.14)$$

em que ($q = 0, 1, 2, \dots, N-1$).

A frequência fundamental é ($\omega_0 = 2\pi/T_0$) e, para um instante genérico, escreve-se:

$$\omega_q t_n = \frac{2\pi q}{T_0} \frac{n T_0}{N} \rightarrow \omega_q t_n = \frac{2\pi q n}{N} \quad (7-2.15)$$

Logo, sem considerar frequências negativas, cuja consequência de descarte será examinada na [Subseção 7-3.4](#), as integrais das transformadas expressas na [Equação 7-2.4](#) se tornam nos seguintes somatórios chamados de *transformadas de Fourier discretas*:

$$\begin{cases} f(t_n) = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \sum_{q=0}^{N-1} F(i\omega_q) e^{i2\pi qn/N} \equiv \mathcal{T}\mathcal{D}^{-1}(F(i\omega_q)), & n=0,1,2,\dots,(N-1) \\ F(i\omega_q) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} f(t_n) e^{-i2\pi qn/N} \equiv \mathcal{T}\mathcal{D}(f(t_n)), & q=0,1,2,\dots,(N-1) \end{cases} \quad (7-2.16)$$

Nesse par de expressões, $\mathcal{T}\mathcal{D}$ denota *transformada de Fourier discreta* e $\mathcal{T}\mathcal{D}^{-1}$, *transformada de Fourier inversa discreta*.⁶

Naturalmente, esse par de transformadas pode também ser obtido diretamente a partir da *série de Fourier* definida nas [Equações 7-1.5 e 7-1.6](#), que se repetem:

$$\begin{cases} f(t) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} C_q e^{iq\omega_0 t} \\ C_q = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) e^{-iq\omega_0 t} dt \end{cases} \quad (7-2.17)$$

Considerando a discretização da variável temporal nesse par de expressões, substitui-se $q\omega_0 t$ por $(q\omega_0 t_n = q\omega_0 t = 2\pi qn/N)$, e chega-se ao par:

$$\begin{cases} f(t_n) = \sum_{q=0}^{N-1} C_q e^{i2\pi qn/N} \\ C_q = \frac{\Delta t}{T_0} \sum_{n=0}^{N-1} f(t_n) e^{-i2\pi qn/N} \end{cases} \quad (7-2.18)$$

em que n varia de 0 a $(N-1)$. Considera-se a mesma variação quanto a q , para delimitar as frequências discretas e evitar frequências negativas. Seguidamente, sem alterar a correspondência biunívoca entre essas duas expressões, retira-se o fator $1/T_0$ da segunda expressão e o inclui na primeira, de maneira a obter:

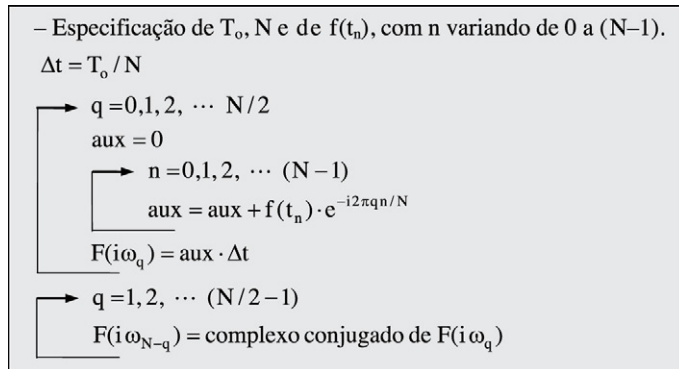
$$\begin{cases} f(t_n) = \frac{1}{T_0} \sum_{q=0}^{N-1} C_q e^{i2\pi qn/N} \equiv \frac{\Delta\omega}{2\pi} \sum_{q=0}^{N-1} C_q e^{i2\pi qn/N} \\ C_q = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} f(t_n) e^{-i2\pi qn/N} \end{cases} \quad (7-2.19)$$

Logo, com a troca da notação C_q por $F(i\omega_q)$ e como $(1/T_0 = \Delta\omega/2\pi)$, o par de expressões anterior fica igual ao das *transformadas de Fourier* expressas na [Equação 7-2.16](#).

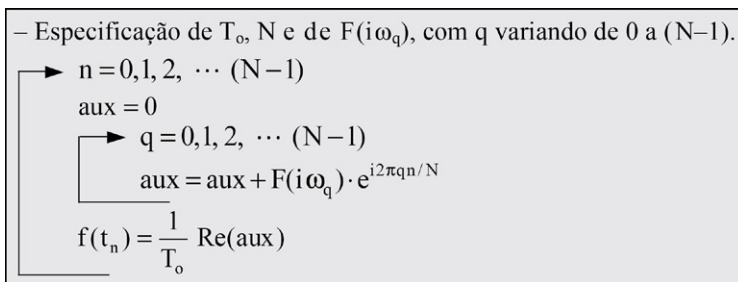
Diz-se que a representação gráfica de $|F(i\omega_q)|$ *versus* ω_q é o *espectro de amplitudes* da *transformada de Fourier discreta*.

Será demonstrado na [Subseção 7-3.4](#) que $F(i\omega_q)$ e $F(i\omega_{N-q})$, em que $0 < q < N/2$, são complexos conjugados. Portanto, só há necessidade de aplicar a segunda expressão da [Equação 7-2.16](#) com q variando de 0 a $(N/2-1)$. Assim, escreve-se o seguinte algoritmo.

⁶ Com a manutenção da correspondência biunívoca, pode-se multiplicar uma dessas transformadas por um fator e dividir a outra por esse fator. Assim, ao utilizar programa automático com essas transformadas é necessário identificar a forma das mesmas.

**ALGORITMO 7-2.1** Obtenção da transformada de Fourier discreta.

Já para a transformada inversa, escreve-se o [Algoritmo 7-2.2](#):

**ALGORITMO 7-2.2** Obtenção da transformada de Fourier inversa discreta.

Nesse algoritmo, o valor superior da variável incremental n pode ser menor do que $(N-1)$, o que é útil para reduzir as multiplicações com variáveis complexas e porque costuma não ser necessário determinar a transformada inversa em toda a extensão ΔT . Especificou-se parte real na última linha desse algoritmo, porque aproximações da aritmética em ponto-flutuante podem conduzir a resíduos de parte imaginária em $f(t_n)$ que em aritmética infinita é real.

Além disso, importa reconhecer que, enquanto a *transformada de Fourier contínua* representa exatamente a função $f(t)$, a *transformada de Fourier discreta* expressa de forma aproximada apenas uma forma periódica dessa função. Consequentemente, para utilizar essa transformada, as correspondentes aproximações precisam ser controladas, como será detalhado na [Subseção 7-3.4](#).

EXEMPLO 7-2.3

Para comprovar numericamente as transformadas de Fourier discretas, considera-se a função representada na [Figura E7-2.3a](#), que tem a transformada de Fourier contínua:

$$F(i\omega) = \int_0^{t_1} e^{-i\omega t} dt = \frac{\sin(t_1\omega)}{\omega} + i \frac{\cos(t_1\omega) - 1}{\omega}$$

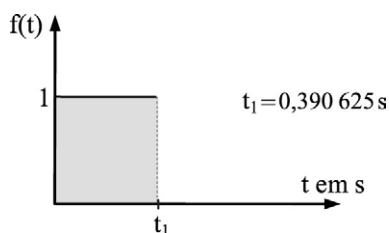


FIGURA E7-2.3a Função degrau.

Adota-se a discretização dessa função com ($T_0 = 10$ s) e ($N = 2^{10}$).

Nas Figuras E7-2.3b e E7-2.3c estão mostradas a parte real e a parte imaginária da transformada de Fourier. As linhas contínuas representam resultados da transformada contínua e as linhas pontilhadas, da transformada discreta. Praticamente, tem-se coincidência de representações.

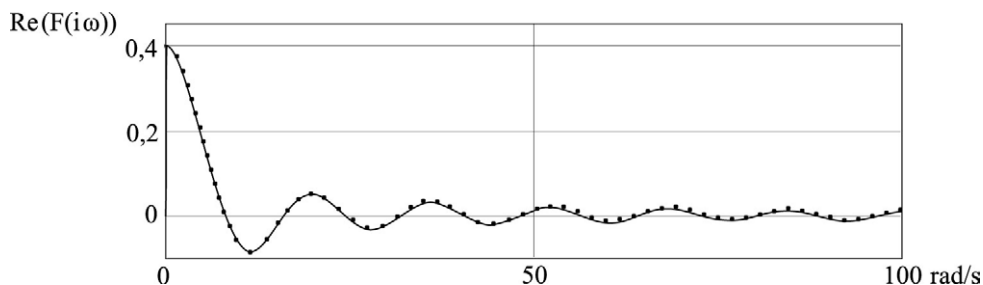


FIGURA E7-2.3b Parte real da transformada de Fourier.

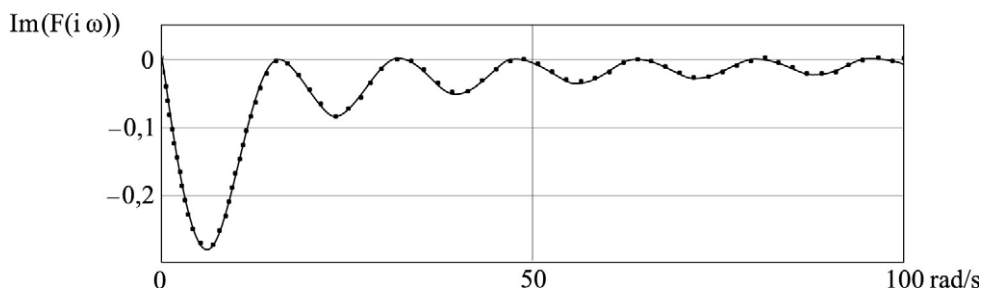


FIGURA E7-2.3c Parte imaginária da transformada de Fourier.

Finalmente, na Figura E7-2.3d, está representada em linha contínua a discretização inicial, e em linha pontilhada, a transformada de Fourier inversa. Tem-se coincidência de representações, o que mostra recuperação da função contínua original, a menos da descontinuidade dessa função.

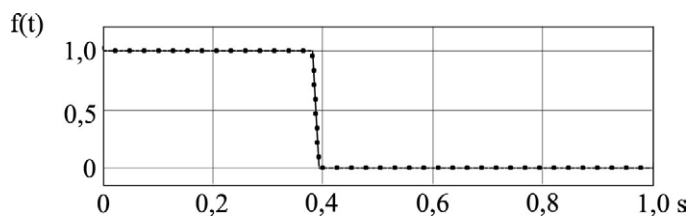


FIGURA E7-2.3d Transformada de Fourier inversa.

7-2.3 Transformadas rápidas

Os algoritmos apresentados na subseção anterior são simples e foram utilizados em todos os exemplos numéricos deste capítulo, mas não são computacionalmente eficientes.

Cada uma das transformadas discretas expressas na [Equação 7-2.16](#) tem N somatórios e N^2 multiplicações com variáveis complexas. Em caso de valor elevado para N , a aplicação direta dessas expressões demanda excessivas multiplicações. Grande parte dessas multiplicações pode ser evitada, o que deu origem às *transformadas de Fourier rápidas* (FFT—*Fast Fourier Transform*) apresentadas pioneiramente por J. W. Cooley e J. W. Tukey, em 1965.⁷

Para breve esclarecimento dessas transformadas rápidas, escreve-se a transformada direta discreta contida na [Equação 7-2.16](#) sob a forma:

$$\begin{aligned}
 F(i\omega_q)/\Delta t &= \sum_{n=0}^{N-1} f(t_n) e^{-i2\pi qn/N} \\
 \rightarrow F(i\omega_q)/\Delta t &= \sum_{n=0}^{N/2-1} f(t_{2n}) e^{-i2\pi q(2n)/N} + \sum_{n=0}^{N/2-1} f(t_{2n+1}) e^{-i2\pi q(2n+1)/N} \\
 \rightarrow F(i\omega_q)/\Delta t &= \sum_{n=0}^{N/2-1} f(t_{2n}) e^{-i2\pi qn/(N/2)} + e^{-i2\pi q/N} \sum_{n=0}^{N/2-1} f(t_{2n+1}) e^{-i2\pi qn/(N/2)} \quad (7-2.20)
 \end{aligned}$$

Essa expressão mostra a divisão do cálculo de $F(i\omega_q)$ em duas parcelas de $N/2$ somas, em que os termos pares da sequência de $f(t_n)$ comparecem na primeira parcela, e os termos de ordem ímpar, na segunda parcela.⁸ Com essa divisão, em lugar de N^2 multiplicações com variáveis complexas, passa-se a ter $(2(N/2)^2 = N^2/2)$ multiplicações. Além disso, como $(N = 2^n)$, $(N/2 = 2^{n-1})$ é um número par, o que permite a divisão de cada uma das referidas parcelas em duas outras e, assim sucessivamente, até que em cada parcela se tenha uma única multiplicação de variáveis complexas. A mesma sequência de divisões em parcelas de somatórios se aplica à transformada inversa discreta, com idêntica redução de multiplicações.⁹

Com o descrito procedimento, o número total de multiplicações com variáveis complexas, em cada transformada, reduz de N^2 para $(N/2)\log_2 N$. E a [Tabela 7-2.1](#) apresenta as percentagens dessa redução para diferentes valores de N , o que evidencia a impressionante eficácia das *transformadas de Fourier rápidas*.

⁷ Cooley, J. W. & Tukey, J. W., 1965, *An Algorithm for The Machine Calculation of Complex Fourier Series*, Mathematics of Computation, vol.19, pp. 297-301. Nesse artigo, tem-se a restrição de N ser múltiplo inteiro de 2, restrição esta que foi eliminada em artigos posteriores. Assim, atualmente a expressão *transformada de Fourier rápida* se refere a uma família de eficientes algoritmos de obtenção de *transformada de Fourier discreta*.

⁸ É o chamado *lema de Danielson-Lanczos*.

⁹ Os sistemas computacionais disponibilizam rotinas dessas transformadas com diferentes condições de normalização, o que requer atenção do usuário. Um algoritmo de transformada rápida detalhado para programação é encontrado em Cooley, J. W.; Lewis, P. A. W. & Welch, P. D., 1969, *The Fast Fourier Transform and its Applications*, IEEE Transactions on Education, vol. 12, pp. 27-34. Um programa dessa transformada em FORTRAN é encontrado em J. F. Hall, 1982, *An FFT Algorithm for Structural Dynamics*, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, vol.10, pp.707-811.

Tabela 7-2.1 Redução de multiplicações em *transformada de Fourier rápida*.

N	Porcentagem de redução
$2^8 = 256$	98,44
$2^9 = 512$	99,12
$2^{10} = 1024$	99,51
$2^{11} = 2048$	99,73
$2^{12} = 4096$	99,85

7-3 OSCILADOR SIMPLES AMORTECIDO

O oscilador simples foi estudado em notação trigonométrica nos Capítulos 2 e 3. Nesta seção, determina-se, em notação complexa, a resposta desse oscilador sob forças harmônica, periódica arbitrária e aperiódica. Na [Seção 7-4](#), a análise sob força aperiódica discreta será apresentada em formulação matricial.

7-3.1 Força harmônica

Uma força cossenoidal pode ser escrita sob a forma:¹⁰

$$f(t) = f_0 \cos(\omega t) \equiv f_0 \operatorname{Re}(\cos \omega t + i \sin \omega t) \rightarrow \boxed{f(t) = f_0 \operatorname{Re}(e^{i\omega t})} \quad (7-3.1)$$

onde Re expressa a parte real da função complexa $e^{i\omega t}$.

A seguir, obtém-se a resposta do oscilador simples sob essa força, nos casos do *amortecimento viscoso* e do *amortecimento estrutural*.

7-3.1.1 Amortecimento viscoso

Com a expressão de força anterior e *amortecimento viscoso*, tem-se a equação de movimento:

$$\boxed{m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = f_0 \operatorname{Re}(e^{i\omega t})} \quad (7-3.2)$$

Escreve-se, agora, a solução de deslocamento em regime permanente expressa na Equação 3-4.2 com notação análoga à da referida força:

$$\begin{aligned} u_p(t) &= a_p \cos(\omega t - \phi) = a_p \operatorname{Re}(\cos(\omega t - \phi) + i \sin(\omega t - \phi)) \\ \rightarrow u_p(t) &= \operatorname{Re}(a_p e^{i(\omega t - \phi)}) = \operatorname{Re}(a_p e^{-i\phi} e^{i\omega t}) \end{aligned} \quad (7-3.3)$$

Para escrever a solução anterior em forma mais compacta, adota-se a notação de *amplitude complexa, solução no domínio da frequência* ou *resposta complexa em frequência*:

$$U(i\omega) = a_p e^{-i\phi} \quad (7-3.4)$$

¹⁰ Uma força senoidal pode ser escrita sob a forma $f_0 \operatorname{Im}(e^{i\omega t})$, onde Im indica a parte imaginária.

que contém o ângulo de fase entre a resposta e a força externa, expresso na Equação 3-4.9, que se repete:

$$\phi = \arctg \frac{2r\xi}{1-r^2} \quad (7-3.5)$$

em que r é a *razão de frequências*, ω/ω_n .

Logo, sem o índice p , por simplicidade, a solução de deslocamento anterior escreve-se sob a forma:

$$u(t) = \text{Re}(U(i\omega)e^{i\omega t}) \quad (7-3.6)$$

que expressa que a solução é harmônica com a mesma frequência que a da força externa.

Com a substituição dessa solução na equação de movimento anterior e sem indicação de parte real, também por simplicidade, obtém-se a referida amplitude sob a nova forma:

$$(-m\omega^2 + i c \omega + k)U(i\omega)e^{i\omega t} = f_0 e^{i\omega t} \rightarrow U(i\omega) = \frac{f_0}{k - m\omega^2 + i c \omega} \quad (7-3.7)$$

Além disso, utiliza-se a notação de função de transferência (na frequência) ou função (complexa) de resposta em frequência:¹¹

$$H(i\omega) = \frac{1}{k - m\omega^2 + i c \omega} \quad (7-3.8)$$

Com essa função, escreve-se a solução em regime permanente:¹²

$$u(t) = \text{Re}(f_0 H(i\omega)e^{i\omega t}) \quad (7-3.9)$$

Como ($\omega_n^2 = k/m$) e ($c = 2\xi \omega_n m$), escreve-se aquela função também sob as formas:

$$H(i\omega) = \frac{1}{k(1 - (\omega/\omega_n)^2 + i 2\xi(\omega/\omega_n))} \rightarrow H(i\omega) = \frac{1}{k(1 - r^2 + i 2r\xi)} \quad (7-3.10)$$

Para melhor entendimento dessa função, utiliza-se a representação no plano complexo ou *plano de Argand* mostrado na [Figura 7-3.1](#).¹³ No caso, tem-se a variável complexa:¹⁴

$$(1 - r^2) + i 2r\xi = \sqrt{(1 - r^2)^2 + (2r\xi)^2} e^{i\phi} \quad (7-3.11)$$

¹¹ Vale registrar que essa função contém a frequência forçante e as características do oscilador.

¹² Observa-se que, com força harmônica de amplitude unitária, a amplitude da resposta de deslocamento é igual à função de transferência, isto é, essa função representa a resposta em regime permanente do oscilador sob a referida força. Por essa razão, essa função recebe também o nome de *flexibilidade dinâmica*.

¹³ Representação geométrica apresentada pelo matemático francês Jean-Robert Argand (1768-1822).

¹⁴ O primeiro membro dessa equação é a forma retangular de número complexo, e o segundo membro, a forma polar.

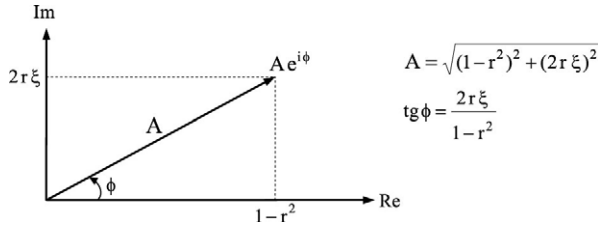


FIGURA 7-3.1 Representação de variável complexa.

Logo, obtém-se a função de transferência sob a nova forma:

$$H(i\omega) = \frac{1}{k\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\xi)^2} e^{i\phi}} \rightarrow \boxed{H(i\omega) = |H(i\omega)| e^{-i\phi}} \quad (7-3.12)$$

em que se identifica o módulo:

$$\boxed{|H(i\omega)| = \frac{1}{k\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\xi)^2}} \equiv \frac{A_d}{k}} \quad (7-3.13)$$

Isto é, o módulo da referida função é igual ao fator de amplificação dinâmica que foi definido na Equação 3-4.15, dividido pelo coeficiente de rigidez.

Além disso, com a substituição da Equação 7-3.12 na solução expressa na Equação 7-3.9, chega-se à nova forma da solução de deslocamento em regime permanente:

$$\boxed{u(t) = f_o |H(i\omega)| \operatorname{Re}(e^{i(\omega t - \phi)})} \quad (7-3.14)$$

em que se tem a amplitude de oscilação:

$$a_p = f_o |H(i\omega)| \quad (7-3.15)$$

No citado regime, com *amortecimento viscoso*, a energia dissipada é igual ao trabalho realizado pela força externa, que para um ciclo de oscilação se escreve:

$$E_{d/\text{viscoso}} = \int_{\text{ciclo}} f(t) du = \int_0^{2\pi/\omega} f(t) \dot{u}(t) dt \quad (7-3.16)$$

onde

$$\begin{cases} f(t) = f_o \cos(\omega t) \\ \dot{u}(t) = -\omega a_p \sin(\omega t - \phi) \end{cases} \quad (7-3.17)$$

Assim, reescreve-se a energia dissipada em um ciclo:

$$\begin{aligned} E_{d/\text{viscoso}} &= -\omega a_p f_o \int_0^{2\pi/\omega} \cos(\omega t) \sin(\omega t - \phi) dt = -\omega a_p f_o \left(-\frac{\pi \sin \phi}{\omega} \right) \\ \rightarrow E_{d/\text{viscoso}} &= \pi a_p f_o \sin \phi = \frac{\pi a_p^2 \sin \phi}{|H(i\omega)|} \rightarrow \boxed{E_{d/\text{viscoso}} = \frac{\pi a_p^2}{|H(i\omega)|} \frac{\operatorname{tg} \phi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \phi}}} \end{aligned} \quad (7-3.18)$$

Logo, com base nas Equações 7-3.5 e 7-3.13, a expressão anterior fornece:

$$E_{d/\text{viscoso}} = \pi a_p^2 k 2r \xi \rightarrow \boxed{E_{d/\text{viscoso}} = \pi c \omega a_p^2} \quad (7-3.19)$$

que é o mesmo resultado expresso na Equação 3-5.23 e que evidencia que essa energia é função da frequência forçante.

7-3.1.2 Amortecimento estrutural

O *amortecimento estrutural* foi apresentado sucintamente na Subseção 3-1.2. A seguir, esse amortecimento é descrito de forma mais ampla e utilizado na equação de movimento do oscilador simples.

O comportamento elástico linear de materiais é uma simplificação do comportamento real. Em materiais sob tensões cíclicas no domínio elástico, sempre há dissipação de energia devida ao atrito interno e às deformações plásticas em escala microscópica. Com isso, as trajetórias de carregamento e de descarregamento de um material não são coincidentes, como ilustra a Figura 7-3.2. Ocorre a formação de um *ciclo de histerese*, cuja área delimitada é igual à energia dissipada.

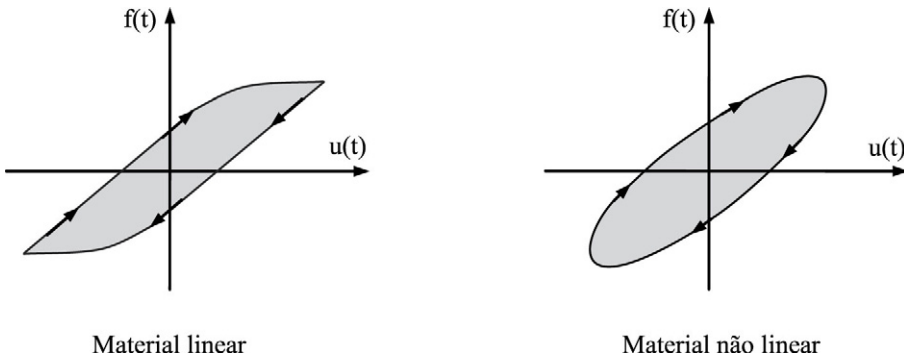


FIGURA 7-3.2 Ciclos de histerese.

Experimentos com diversos materiais, como metais, borracha, vidro etc., evidenciam que a referida dissipação praticamente independe da frequência forçante, o que motivou a concepção do modelo de *amortecimento estrutural*, *histerético* ou *sólido*.¹⁵ Os primeiros experimentos com esse modelo foram conduzidos por A. L. Kimball e D. E. Lovell, em 1927,

¹⁵ É controverso o uso desses nomes na literatura. Aqui, o termo *amortecimento estrutural* é utilizado em referência apenas à dissipação de energia devida ao atrito em material sob ciclos elásticos. Contudo, por vezes esse termo é usado quanto ao atrito em conexões entre componentes estruturais e em aparelhos de apoio, como também usado em referência a todas as causas de dissipação, além de ser adotado em caso de ciclos de histerese além do limite elástico. Devido a essa imprecisão de terminologia, um nome mais adequado para o presente amortecimento seria *amortecimento em material elástico*, e um nome mais esclarecedor para o amortecimento viscoso seria *amortecimento visco-elástico*.

e as primeiras aplicações foram em análises aeroelásticas de asas de avião, conduzidas por H. G. Küssner, em 1929.¹⁶

Esses experimentos mostraram que esse amortecimento depende do tipo do material e, por serem conduzidos em comportamento elástico, não inclui a energia dissipada em escala macroscópica, que deve ser considerada em comportamento não linear do modelo. Mostraram também que a força de amortecimento em regime permanente é proporcional à velocidade (linear ou angular) e inversamente proporcional à frequência forçante, podendo ser escrita sob a forma:

$$f_a(t) = \eta k \frac{\dot{u}(t)}{\omega} \quad (7-3.20)$$

onde η é o denominado *coeficiente de amortecimento estrutural*. A constante k foi incluída nessa definição de força para que esse coeficiente seja adimensional e que essa força possa ser expressa juntamente com a força restitutiva elástica.

Com a consideração de que a resposta no referido regime seja na frequência forçante, como expresso na [Equação 7-3.6](#) para uma ação cossenoidal, tem-se a resposta de velocidade:

$$\dot{u}(t) = i\omega \operatorname{Re}(U(i\omega) e^{i\omega t}) \equiv i\omega u(t) \quad (7-3.21)$$

que é defasada de 90° em relação à resposta de deslocamento. Logo, com a substituição dessa expressão na equação anterior, obtém-se a força do *amortecimento estrutural* sob a forma usual:

$$f_a(t) = i\eta k u(t) \quad (7-3.22)$$

que é função da força elástica $ku(t)$. Essa é chamada *forma complexa da força do amortecimento estrutural*. No caso, não se explicita a dependência dessa força em relação à frequência forçante, e a constante imaginária expressa que essa força é em fase com a velocidade.

Com essa força e ação externa harmônica, escreve-se a equação de movimento do oscilador simples:

$$m\ddot{u}(t) + i\eta k u(t) + ku(t) = f_0 e^{i\omega t} \rightarrow m\ddot{u}(t) + k(1 + i\eta)u(t) = f_0 e^{i\omega t} \quad (7-3.23)$$

em que, em caso de ação cossenoidal, vale a parte real da solução $u(t)$.

Nessa equação, o fator $(k(1+i\eta))$ é denominado *rigidez complexa*, e o fator $(k(i+i\eta)u(t))$ é chamado de *força restauradora complexa*.¹⁷

Com a substituição, nessa última equação, da solução de deslocamento em regime permanente expressa na [Equação 7-3.3](#) e a omissão da indicação de parte real, por simplicidade, obtém-se:

$$(-m\omega^2 + k(1 + i\eta)) U(i\omega) e^{i\omega t} = f_0 e^{i\omega t} \quad (7-3.24)$$

¹⁶ Neumark, S., 1962, *Concept of Complex Stiffness Applied to Problems of Oscillations with Viscous and Hysteretic Damping*, Ministry of Aviation, Aeronautical Research Council, Reports and Memoranda, n° 3269.

¹⁷ Essa “rigidez” foi utilizada pioneiramente por R. Kassner, em 1936.

Dessa expressão, tem-se a resposta no domínio da frequência:¹⁸

$$U(i\omega) = \frac{f_0}{-m\omega^2 + k(1 + i\eta)} \equiv f_0 H(i\omega) \quad (7-3.25)$$

em que se identifica a nova função de transferência:

$$H(i\omega) = \frac{1}{-m\omega^2 + k(1 + i\eta)} \equiv \frac{1}{k(1 - r^2 + i\eta)} \quad (7-3.26)$$

Também, em desenvolvimento semelhante ao do *amortecimento viscoso*, chega-se à solução expressa na [Equação 7-3.14](#), mas com o módulo de função de transferência:

$$|H(i\omega)| = \frac{1}{k\sqrt{(1 - r^2)^2 + \eta^2}} \quad (7-3.27)$$

e com o ângulo de fase:¹⁹

$$\phi = \arctg \frac{\eta}{1 - r^2} \quad (7-3.28)$$

Vê-se que a resolução com o *amortecimento viscoso* se transforma em resolução com o *amortecimento estrutural*, com a simples substituição das expressões da função de transferência e do ângulo de fase.

Assim, a expressão de energia dissipada da [Equação 7-3.18](#) é também válida com o *amortecimento estrutural*, que, com as expressões anteriores de módulo da função de transferência e de ângulo de fase, fornece:

$$E_{d/estrutural} = \pi a_p^2 k \sqrt{(1 - r^2)^2 + \eta^2} \frac{\eta}{1 - r^2} \frac{1}{\sqrt{1 + \eta^2/(1 - r^2)^2}} \rightarrow E_{d/estrutural} = \pi a_p^2 k \eta \quad (7-3.29)$$

Essa expressão foi apresentada na Equação 3-5.29, sem demonstração. Ela é independente da frequência forçante, como é evidenciado por experimentos físicos. Já com o modelo de *amortecimento viscoso*, a energia dissipada varia linearmente com essa frequência, o que é ilustrado na [Figura 7-3.3](#).

Vale identificar que, em caso do *amortecimento estrutural*, a função de transferência e o ângulo de fase recaem nas correspondentes expressões do amortecimento viscoso ao fazer:

$$\eta = 2 \xi r \quad (7-3.30)$$

Esse é o resultado que foi expresso na Equação 3-5.31 e obtido igualando-se as energias dissipadas com os dois amortecimentos, o que torna a dissipação de energia dependente da

¹⁸ Mantém-se a convenção de letra maiúscula representar função no domínio da frequência e letra minúscula, no domínio do tempo.

¹⁹ Importa observar que o máximo valor desse módulo ocorre com ($r = 1$), e que a resposta nunca é em fase com a ação externa.

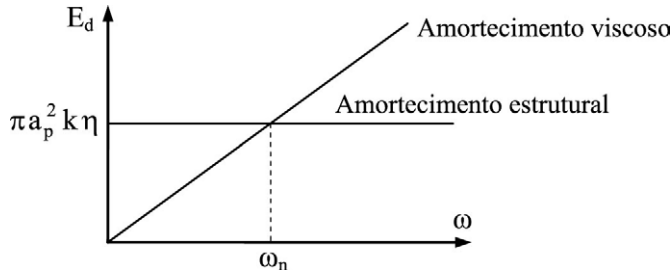


FIGURA 7-3.3 Energia dissipada *versus* frequência forçante.

frequência forçante. Por essa razão, é mais indicado adotar a equivalência apresentada a seguir.

As curvas de resposta em frequência com os *amortecimentos viscoso* e *estrutural* são semelhantes e próximas entre si. Os valores máximos dessas curvas, com o *amortecimento viscoso*, ocorrem muito próximos de ($r = 1$) e, com o *amortecimento estrutural*, exatamente em ($r = 1$). Logo, como a maior relevância do amortecimento é limitar as amplitudes em condição de ressonância, é prático adotar equivalência entre esses amortecimentos baseada na coincidência de frequências, ($\omega = \omega_n$).

Nessa condição e com *amortecimento estrutural*, obtém-se a amplitude:

$$a_{p/estrutural} = f_o |H(i\omega)|_{r=1} = \frac{f_o}{k \eta} \quad (7-3.31)$$

Com o amortecimento viscoso, obtém-se:

$$a_{p/viscoso} = f_o |H(i\omega)|_{r=1} = \frac{f_o}{k 2 \xi} \quad (7-3.32)$$

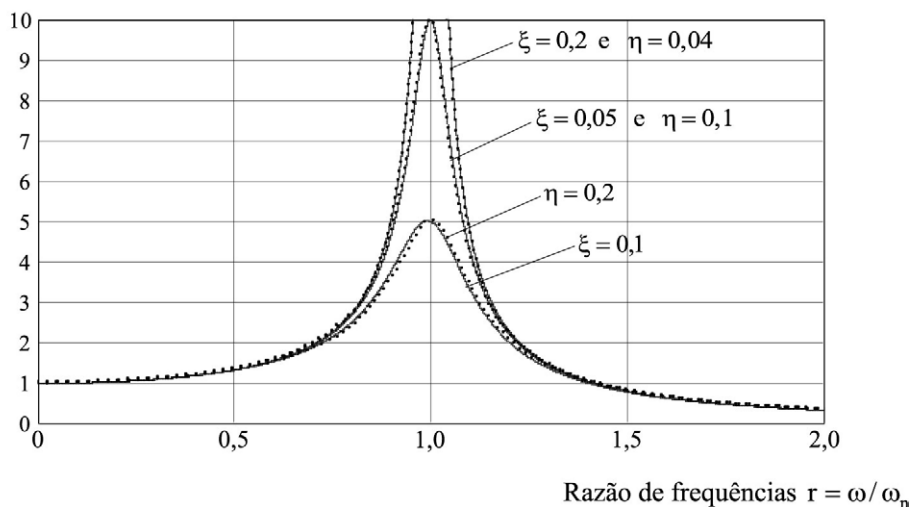
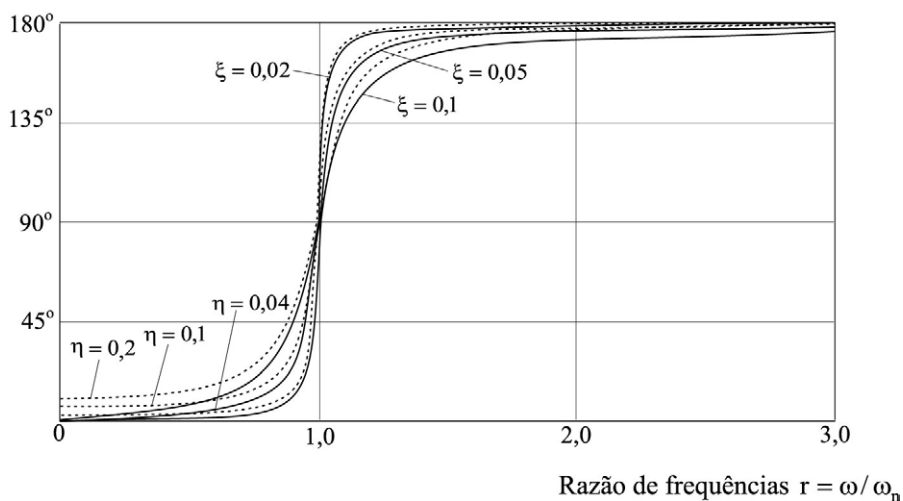
Com a igualdade dessas duas expressões, obtêm-se as equivalências:

$$\eta_{eq} = 2 \xi \quad (7-3.33a)$$

e

$$\xi_{eq} = \eta / 2 \quad (7-3.33b)$$

A [Figura 7-3.4](#) mostra a representação do fator de amplificação dinâmica *versus* razão de frequência, e a [Figura 7-3.5](#), a representação do ângulo de fase. Os traçados contínuos são referentes ao *amortecimento viscoso*, e as linhas pontilhadas dizem respeito ao *amortecimento estrutural*. Identifica-se coincidência de representações na razão de frequências igual à unidade, que foi a condição de equivalência adotada. Vê-se que, para valores usuais de amortecimento e razões de frequências diferentes da unidade, essas representações são muito pouco diferentes entre si. Ou seja, a resposta com o *amortecimento estrutural* é igual à resposta com o *amortecimento viscoso* na condição de ($\omega = \omega_n$) e é muito pouco diferente em caso de ($\omega \neq \omega_n$). Assim, dada a incerteza no estabelecimento de valor para o amortecimento de uma estrutura, é prático utilizar a equivalência anterior e efetuar a análise no domínio do tempo.

Fator de amplificação dinâmica**FIGURA 7-3.4** Fator de amplificação dinâmica *versus* razão de frequências.**Ângulo de fase****FIGURA 7-3.5** Ângulo de fase *versus* razão de frequências.

Com a equivalência expressa na [Equação 7-3.33a](#), passa-se a ter as seguintes expressões de função de transferência e de ângulo de fase:

$$H(i\omega) = \frac{1}{k(1 - r^2 + i2\xi r)} \quad (7-3.34)$$

$$|H(i\omega)| = \frac{1}{k\sqrt{(1-r^2)^2 + 4\xi^2}} \quad (7-3.35)$$

$$\phi = \arctg \frac{2\xi}{1-r^2} \quad (7-3.36)$$

Além disso, com a substituição das [Equações 7-3.35 e 7-3.36](#) na [Equação 7-3.18](#), obtém-se:

$$E_{d/\text{viscoso}} = \pi a_p^2 k 2\xi \quad (7-3.37)$$

o que confirma que a energia dissipada independe da frequência forçante ao se adotar ($\eta_{eq} = 2\xi$).

7-3.2 Força periódica arbitrária

Na Seção 3-6 foi obtida a resposta de deslocamento em regime permanente do oscilador simples linear sob força periódica arbitrária, sob a forma de uma soma de soluções harmônicas em notação trigonométrica. A mesma resposta pode ser escrita em notação complexa exponencial, como desenvolvido a seguir. Esse desenvolvimento será útil para o tratamento desse oscilador sob força aperiódica, com *transformada de Fourier*, que será apresentado na próxima subseção.

Com o desenvolvimento de uma excitação de período T_0 em *série de Fourier*, a equação de movimento do oscilador simples de *amortecimento viscoso* fica sob a forma:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} C_q e^{iq\omega_0 t} \quad (7-3.38)$$

em que ($\omega_0 = 2\pi/T_0$) e C_q é o *coeficiente de Fourier* expresso na [Equação 7-1.6](#).

A partir da solução em regime permanente expressa na [Equação 7-3.9](#) para o caso de força harmônica, tem-se a solução de deslocamento:

$$u(t) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} (H(iq\omega_0) C_q e^{iq\omega_0 t}) \quad (7-3.39)$$

Nessa solução, ocorre a função de transferência do q -ésimo harmônico, que, de acordo com as [Equações 7-3.8 e 7-3.10](#), se escreve:

$$H(iq\omega_0) = \frac{1}{k - m(q\omega_0)^2 + icq\omega_0} \equiv \frac{1}{k(1 - r_q^2 + i2r_q\xi)} \quad (7-3.40)$$

e onde se utiliza a nova notação de razão de frequências:

$$r_q = \frac{q\omega_0}{\omega_n} \quad (7-3.41)$$

De forma análoga à solução expressa na [Equação 7-3.14](#), a solução anterior pode também ser escrita como:

$$u(t) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} C_q |H(iq\omega_0)| e^{i(q\omega_0 t - \phi_q)} \quad (7-3.42)$$

em que se tem o módulo da função de transferência associado ao harmônico de frequência $q\omega_0$:

$$|H(iq\omega_0)| = \frac{1}{k\sqrt{(1-r_q^2)^2 + (2r_q\xi)^2}} \quad (7-3.43)$$

e se tem o ângulo de fase:

$$\phi_q = \arctg \frac{2r_q\xi}{1-r_q^2} \quad (7-3.44)$$

A solução expressa na [Equação 7-3.39](#) e na [Equação 7-3.42](#) é periódica como a ação externa. Com um valor de $q\omega_0$ próximo à frequência natural, r_q é próximo da unidade, o que implica grande contribuição do correspondente componente harmônico na resposta de deslocamento, particularmente em caso de amortecimento muito pequeno. É oportuno observar que a forma complexa de solução anterior é mais compacta do que a forma trigonométrica apresentada na Equação 3-6.14.

Em obtenção da forma complexa do *amortecimento estrutural* na Subseção 7-3.1.2, pressupôs-se que a velocidade fosse harmônica simples e defasada de 90° em relação ao deslocamento. Assim, na suposição de que com esse amortecimento e ação periódica arbitrária se tenha oscilação próxima à harmônica, basta substituir na solução de deslocamento anterior as seguintes expressões:²⁰

$$|H(iq\omega_0)| = \frac{1}{k\sqrt{(1-r_q^2)^2 + \eta^2}} \quad (7-3.45)$$

$$\phi_q = \arctg \frac{\eta}{1-r_q^2} \quad (7-3.46)$$

em que pode ser adotada a equivalência de amortecimento expressa na [Equação 7-3.33a](#).

7-3.3 Força aperiódica

Considera-se, agora, a equação de movimento do oscilador simples viscoso:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = f(t) \quad (7-3.47)$$

em que $f(t)$ é uma força aperiódica.

Na transformada inversa que consta na [Equação 7-2.4](#), $F(i\omega)d\omega/(2\pi)$ é a amplitude infinitesimal do componente harmônico de frequência ω , no desenvolvimento de $f(t)$. Logo, de acordo com a [Equação 7-3.9](#), escreve-se a resposta infinitesimal de deslocamento em regime permanente do oscilador simples:

$$du(t) = \text{Re} \left(\frac{F(i\omega) d\omega}{2\pi} H(i\omega) e^{i\omega t} \right) \quad (7-3.48)$$

²⁰ Quando a frequência dominante de uma ação periódica é próxima de uma frequência natural, o correspondente modo natural de vibração fica predominante na resposta, o que torna mais consistente adotar o modelo de amortecimento estrutural.

Logo, em comportamento linear, a solução de deslocamento (no domínio do tempo) sob a força aperiódica $f(t)$ é a sobreposição das respostas infinitesimais no intervalo de frequências de $-\infty$ a $+\infty$, o que se escreve:²¹

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(i\omega) F(i\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (7-3.49)$$

em que $F(i\omega)$ é a *transformada de Fourier* da força $f(t)$.²²

Além disso, com a notação de solução no domínio da frequência:

$$U(i\omega) = H(i\omega) F(i\omega) \equiv H(i\omega) \mathcal{T}(f(t)) \quad (7-3.50)$$

a solução de deslocamento anteriormente obtida toma a forma mais compacta:²³

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(i\omega) e^{i\omega t} d\omega \equiv \mathcal{T}^{-1}(U(i\omega)) \quad (7-3.51)$$

Isto é, a transformada de Fourier inversa da solução no domínio da frequência é a solução no domínio do tempo, o que implica a transformada direta:

$$U(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-i\omega t} dt \equiv \mathcal{T}(u(t)) \quad (7-3.52)$$

Nota-se que a função temporal está representada em letra minúscula, e a solução no domínio da frequência está denotada em maiúsculo.

A *transformada de Fourier* de $f(t)$, juntamente com as [Equações 7-3.50 e 7-3.51](#), é utilizada na resolução através do domínio da frequência. Com aquela transformada obtém-se a “ação no domínio da frequência” $F(i\omega)$; em seguida, com essa ação e a função de transferência $H(i\omega)$, determina-se a solução nesse domínio, $U(i\omega)$, e, finalmente, com a *transformada inversa de Fourier* dessa solução, chega-se à solução $u(t)$ no domínio do tempo, em regime permanente.

Outra forma de obter a solução no domínio da frequência é com a aplicação da transformada de Fourier à equação diferencial de movimento do oscilador, que em caso do *amortecimento viscoso*, fornece:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\ddot{m}u(t) + \dot{c}u(t) + ku(t)) &= \mathcal{T}(f(t)) \rightarrow \mathcal{T}(\ddot{m}u(t)) + \mathcal{T}(\dot{c}u(t)) + \mathcal{T}(ku(t)) = \mathcal{T}(f(t)) \\ \rightarrow -m\omega^2 \mathcal{T}(u(t)) + i\omega \mathcal{T}(u(t)) + k \mathcal{T}(u(t)) &= \mathcal{T}(f(t)) \rightarrow (-m\omega^2 + i\omega + k) U(i\omega) = F(i\omega) \end{aligned} \quad (7-3.53)$$

Vê-se que a *transformada de Fourier* converteu uma equação diferencial na variável temporal, em uma equação algébrica na variável frequência. E essa equação tem a solução:

$$U(i\omega) = \frac{1}{k - m\omega^2 + i\omega} F(i\omega) \equiv H(i\omega) \mathcal{T}(f(t)) \quad (7-3.54)$$

²¹ Não há necessidade de indicar que nessa solução vale a parte real, porque a cada número complexo corresponde o seu conjugado, de maneira que as partes imaginárias se cancelam.

²² Em resumo, como essa força é considerada através de uma soma infinita de funções harmônicas de frequências de variação contínua, a solução é a integral das respostas infinitesimais do oscilador a essas funções.

²³ Assim, a análise no domínio da frequência tem base em superposição de respostas individuais a forças externas harmônicas e, na presente forma *standard*, não considera o efeito de condições iniciais.

que é o mesmo resultado que foi expresso na [Equação 7-3.50](#).

É relevante, para desenvolvimentos futuros, definir o *delta de Dirac* centrado no instante τ :

$$\delta(t - \tau) = 0 \quad \text{para } t \neq \tau \quad (7-3.55a)$$

que corresponde ao impulso unitário:²⁴

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - \tau) dt = 1 \quad (7-3.55b)$$

Considerando o *delta de Dirac* com a dimensão s^{-1} , esse impulso é adimensional e está ilustrado na [Figura 7-3.6](#).

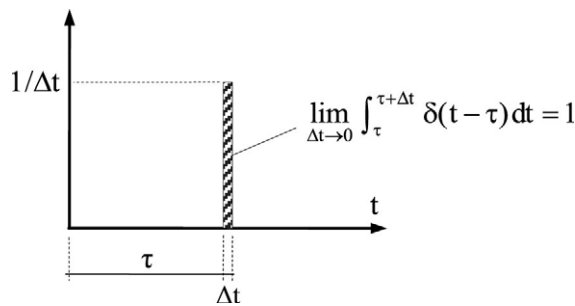


FIGURA 7-3.6 Impulso unitário.

Com a definição anterior, uma força de magnitude f aplicada no instante τ escreve-se sob a forma denominada *propriedade de filtragem*:

$$f(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t - \tau) dt \quad (7-3.56)$$

Além disso, de acordo com o par de transformadas contido na [Equação 7-2.4](#), escreve-se:

$$\begin{cases} \mathcal{T}(\delta(t - \tau)) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau) e^{-i\omega t} dt = e^{-i\omega \tau} \\ \mathcal{T}^{-1}(e^{-i\omega \tau}) = \delta(t - \tau) \end{cases} \quad (7-3.57)$$

Essas expressões, para um impulso que atua no instante zero, particularizam-se em:

$$\boxed{\begin{cases} \mathcal{T}(\delta(t)) = 1 \\ \mathcal{T}^{-1}(1) = \delta(t) \end{cases}} \quad (7-3.58)$$

Logo, com a substituição da primeira expressão desse par na [Equação 7-3.50](#), obtém-se ($U(i\omega) = H(i\omega)$). Isso significa que a resposta no domínio da frequência a um impulso unitário centrado na origem (em caso de condições iniciais nulas) é a função de transferência, ou seja, é a *transformada de Fourier* direta daquela resposta:

$$\boxed{H(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-i\omega t} dt \equiv \mathcal{T}(h(t))} \quad (7-3.59)$$

²⁴ Na Subseção 3-7.1 foi utilizado o termo *impulso de curta duração* em referência a $f(\tau) d\tau$ que tem a dimensão $N \cdot s \equiv kg \cdot m/s$.

Naturalmente, de forma inversa tem-se:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(i\omega) e^{i\omega t} d\omega \equiv \mathcal{T}^{-1}(H(i\omega)) \quad (7-3.60)$$

Assim, a resposta no domínio do tempo a um impulso unitário que atua no instante zero e a função de transferência constituem um par de transformadas de Fourier. Diz-se que a função de transferência tem as características do oscilador no domínio da frequência e que a resposta a um impulso unitário tem essas características no domínio do tempo.

Quanto ao caso de força aperiódica e amortecimento viscoso, tem-se a *integral de Duhamel* expressa na Equação 3-7.3, que se repete:

$$u(t) = \frac{1}{m\omega_a} \int_0^t f(\tau) e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \sin(\omega_a(t-\tau)) d\tau, \quad t > \tau \quad (7-3.61)$$

Nessa expressão, identifica-se a resposta, no domínio do tempo, ao impulso unitário que atua no instante τ :

$$h(t-\tau) = \frac{1}{m\omega_a} e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \sin(\omega_a(t-\tau)), \quad t > \tau \quad (7-3.62)$$

Com base na Equação 3-3.17, vê-se que essa resposta é idêntica à solução de deslocamento em vibração livre subamortecida no instante $(t - \tau)$ devida às condições iniciais $(u_\tau = 0)$ e $(v_\tau = 1/m)$.

Além disso, com a resposta anterior, tem-se a nova forma da *integral de Duhamel*:²⁵

$$u(t) = \int_0^t f(\tau) h(t-\tau) d\tau, \quad t > \tau \quad (7-3.63)$$

Essa integral de convolução, com a propriedade expresso na Equação 7-2.11, reescreve-se como:

$$u(t) = f(t) \otimes h(t) \rightarrow \mathcal{T}(u(t)) = \mathcal{T}(f(t) \otimes h(t)) = F(i\omega) H(i\omega) \rightarrow \mathcal{T}(u(t)) = U(i\omega)$$

Esse é o mesmo resultado que foi expresso na Equação 7-3.52. E com aquela integral, a Figura 7-3.7 ilustra os dois encaminhamentos de análise.

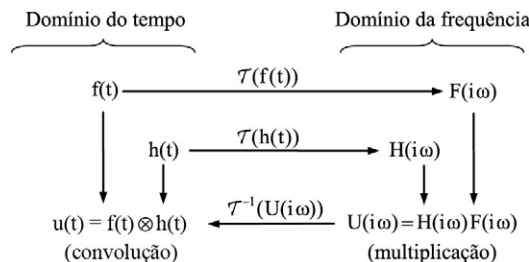


FIGURA 7-3.7 Análises nos domínios do tempo e da frequência.

²⁵ A força é considerada como uma soma de impulsos.

Na Subseção 3-7.1 foi exposta a dificuldade de resolução analítica da *integral de Duhamel*, além do fato de que as ações aperiódicas costumam ser definidas de forma discreta. O mesmo ocorre quanto à resolução no domínio da frequência, o que torna necessário utilizar as transformadas de Fourier discretas.

Para isso, no caso viscoso e em semelhança à [Equação 7-3.40](#), tem-se a função de transferência:

$$H(i\omega_q) = \frac{1}{k - m\omega_q^2 + ic\omega_q}, \quad q = 0, 1, 2, \dots, (N-1) \quad (7-3.64)$$

com $(\omega_q = 2\pi q/T_0)$.

Já em caso do *amortecimento estrutural*, a partir da [Equação 7-3.26](#), escreve-se a função de transferência:²⁶

$$H(i\omega_q) = \frac{1}{-m\omega_q^2 + k(1 + i\eta)} \quad , \quad q = 0, 1, 2, \dots, (N-1) \quad (7-3.65)$$

Com uma dessas duas funções e com $F(i\omega_q)$, tem-se a solução no domínio da frequência:

$$U(i\omega_q) = H(i\omega_q)F(i\omega_q), \quad q = 0, 1, 2, \dots, (N-1) \quad (7-3.66)$$

Logo, a partir dessa solução e em semelhança à *transformada de Fourier inversa* contida na [Equação 7-2.16](#), obtém-se a solução de deslocamento na sequência dos instantes adotados:

$$u(t_n) = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \sum_{q=0}^{N-1} U(i\omega_q) e^{i2\pi qn/N} \equiv \mathcal{T}\mathcal{D}^{-1}(U(i\omega_q)), \quad n = 0, 1, 2, \dots, (N-1) \quad (7-3.67)$$

Assim, $f(t_n)$ com $(n = 0, 1, 2)$ são os dados no domínio do tempo e a entrada ao domínio da frequência; $F(i\omega_q) = \mathcal{T}\mathcal{D}(f(t_n))$ com $(q = 0, 1, 2)$ são os dados no domínio da frequência; $H(i\omega_q)$ transforma esses dados na solução nesse domínio $U(i\omega_q)$ e, finalmente, $\mathcal{T}\mathcal{D}^{-1}(U(i\omega_q))$ é a solução no domínio do tempo, $u(t_n)$.

Essa análise tem o [Algoritmo 7-3.1](#).

– Especificação de k, m, c ou η, T_0, N e de $f(t_n)$, com n variando de 0 a $(N-1)$.

$F(i\omega_q) = \mathcal{T}\mathcal{D}(f(t_n)), \quad q = 0, 1, 2, \dots, (N-1)$

→ $q = 0, 1, 2, \dots, (N-1)$

$\omega_q = 2\pi q/T_0$

$H(i\omega_q) = \frac{1}{k - m\omega_q^2 + ic\omega_q} \quad \text{ou} \quad H(i\omega_q) = \frac{1}{-m\omega_q^2 + k(1 + i\eta)}$

$U(i\omega_q) = H(i\omega_q)F(i\omega_q)$

$u(t_n) = \mathcal{T}\mathcal{D}^{-1}(U(i\omega_q)), \quad n = 0, 1, 2, \dots, (N-1)$

ALGORITMO 7-3.1 Resolução no domínio da frequência.

²⁶ Como não se tem comprovação experimental do amortecimento estrutural em caso de ação aperiódica, supõe-se que os movimentos vibratórios sejam próximos a harmônicos.

7-3.4 Controle das aproximações

A *transformada de Fourier* contínua de uma função aperiódica representa exatamente essa função através de soma infinita de funções harmônicas de frequências que variam de forma contínua. Já a correspondente transformada discreta representa essa função considerando-a como discreta e periódica, de período que inclui a duração da função aperiódica original, mais uma extensão finita de tempo, o que naturalmente implica resultado que difere da transformada contínua. Assim, a solução de deslocamento expressa anteriormente é a resposta em regime permanente de uma extensão periódica da força externa que foi discretizada em N instantes igualmente espaçados e, portanto, as correspondentes aproximações precisam ser examinadas, para que possam ser controladas. E, como discutido a seguir, essas aproximações dependem do conteúdo de frequência da força externa, do período fundamental arbitrado, do número de instantes de sua discretização. Essas causas não são independentes entre si e fogem ao senso comum.

Inicialmente comprova-se que a função $f(t_n)$ expressa pela *transformada de Fourier inversa discreta* é periódica. Para isso, faz-se ($n = N + \ell$) na primeira expressão contida na [Equação 7-2.16](#) e escreve-se:

$$\begin{aligned} f(t_{N+\ell}) &= \frac{\Delta\omega}{2\pi} \sum_{q=0}^{N-1} F(i\omega_q) e^{2\pi q(N+\ell)/N} \\ \rightarrow f(t_{N+\ell}) &= \frac{\Delta\omega}{2\pi} \sum_{q=0}^{N-1} F(i\omega_q) e^{i2\pi q} e^{i2\pi q\ell/N} \end{aligned} \quad (7-3.68)$$

Logo, como ($e^{i2\pi n} \equiv \cos 2\pi n + i \sin 2\pi n$) é igual a 1 com qualquer valor inteiro de q , tem-se da expressão anterior:

$$f(t_{N+\ell}) = f(t_\ell) \quad (7-3.69)$$

o que comprova periodicidade.

Verifica-se, agora, a consequência de se substituir, no fator exponencial da referida transformada inversa, ($n = \ell$) por $-(N - \ell)$. Para isto, escreve-se:

$$e^{i2\pi q(-(N-\ell))/N} = e^{-i2\pi q} e^{i2\pi q\ell/N} = e^{i2\pi q\ell/N} \quad (7-3.70)$$

Esse resultado mostra que, caso fossem consideradas frequências negativas na transformada, os componentes de ordem ℓ e de ordem $-(N - \ell)$ teriam a mesma participação na composição da força discreta, o que justifica terem sido consideradas apenas frequências positivas na expressão dessa transformada.

Verifica-se, também, o que ocorre ao fazer ($q = N - \ell$) na *transformada de Fourier direta discreta*, com $0 < \ell < N/2$. Para isto, escreve-se:

$$F(i\omega_{N-\ell}) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} f(t_n) e^{-i2\pi(N-\ell)n/N} \rightarrow F(i\omega_{N-\ell}) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} f(t_n) e^{-i2\pi n} e^{i2\pi\ell n/N}$$

Logo, como $e^{-i2\pi n}$ é igual a 1 para qualquer valor inteiro de n , a expressão anterior fornece:

$$F(i\omega_{N-\ell}) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} f(t_n) e^{i2\pi\ell n/N} \quad (7-3.71)$$

Isto é, $F(i\omega_{N-\ell})$ é o complexo conjugado de $F(i\omega_\ell)$ e, portanto, têm-se a igualdade de amplitudes:

$$|F(i\omega_{N-\ell})| = |F(i\omega_\ell)| \quad (7-3.72)$$

como mostrado na [Figura 7-3.8](#). Consequentemente, pode-se calcular $F(i\omega_q)$ com q variando de 0 a $N/2$, e impor que $F(i\omega_{N-q})$ seja o complexo conjugado de $F(i\omega_q)$, como no Algoritmo 7-2.1. Isso, além de reduzir o volume de cálculo, evita que aproximações da aritmética em ponto-flutuante façam com que $F(i\omega_{N-q})$ não seja um perfeito complexo conjugado de $F(i\omega_q)$.

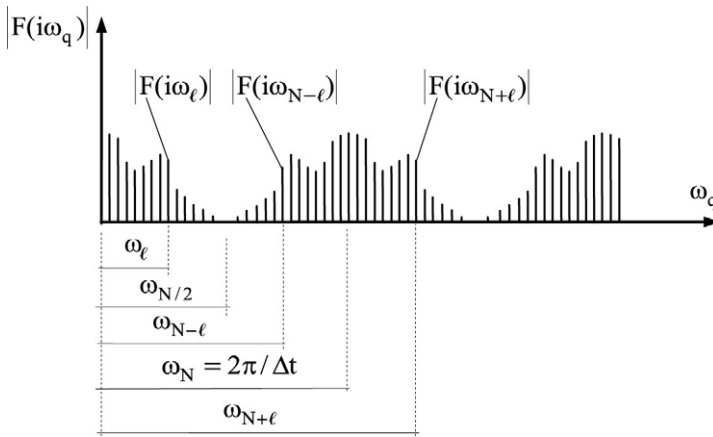


FIGURA 7-3.8 Espectro de amplitudes da *transformada de Fourier discreta*.

Também, tem-se:

$$F(i\omega_0) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} f(t_n) e^{i0} = \text{número real} \quad (7-3.73)$$

e, com N par, obtém-se:

$$\begin{aligned} F(i\omega_{N/2}) &= \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} f(t_n) e^{-i2\pi \frac{N}{2} \frac{1}{N}} = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} f(t_n) e^{-i\pi n} \\ \rightarrow F(i\omega_{N/2}) &= \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} f(t_n) (\cos(\pi n) - i \sin(\pi n)) = \text{número real} \end{aligned} \quad (7-3.74)$$

Consequentemente, como $F(i\omega_\ell)$ e $F(i\omega_{N-\ell})$ são complexos conjugados e as correspondentes funções exponenciais se reduzem à unidade, as correspondentes partes imaginárias se cancelam na soma da transformada inversa discreta, o que garante que $f(t_n)$ seja real. O mesmo ocorre na solução discreta de deslocamentos expressa na [Equação 7-3.67](#), pelo fato de essa solução ser obtida com a transformada inversa de $U(i\omega_q)$.

Além disso, devido ao fato de o espectro da *transformada de Fourier discreta* ter o período $N\Delta\omega$, frequências superiores a $\omega_{N/2}$ não são representadas nessa transformada. Isto é,

($q = N/2$) determina a maior frequência representada na transformada de Fourier discreta. Essa é a *frequência de Nyquist*²⁷ ou *frequência de dobramento*, que se escreve a partir da [Equação 7-2.14](#):

$$\omega_{N/2} = \frac{2\pi N}{2T_0} \rightarrow \boxed{\omega_{N/2} = \frac{\pi}{\Delta t}} \quad (7-3.75)$$

$$\rightarrow \boxed{\delta_{N/2} = \frac{1}{2\Delta t}} \quad (7-3.76)$$

Portanto, $2\Delta t$ é o mais curto período de harmônico incluído na transformada discreta, enquanto o mais longo período é igual a T_0 , arbitrado ao discretizar a ação externa.

Assim, a acurácia de representação de uma função aperiódica através da transformada de Fourier discreta pode ser melhorada com a redução do espaçamento Δt . Para uma dada sequência de valores discretos $f(t_n)$, caso inexistentem frequências acima da *frequência de Nyquist* na correspondente função contínua, a *transformada de Fourier inversa discreta* representa exatamente a transformada contínua dessa função, a menos do caráter periódico introduzido. É o que ocorre no caso do espectro ilustrado na figura anterior em que se tem ($|F(i\omega_{N/2})| = 0$). Caso contrário, há sobreposição de valores de *amplitudes de Fourier*, como mostra a [Figura 7-3.9](#), o que contamina a solução numérica em fenômeno denominado *aliasing*, significando *distorção de representação*.

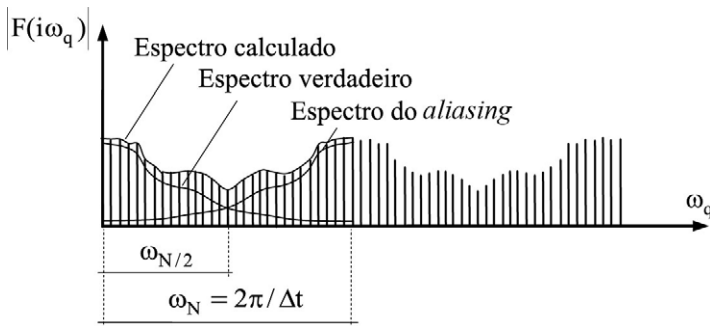


FIGURA 7-3.9 Espectro de amplitudes da *transformada de Fourier discreta* com *aliasing*.

Caso se identifique que $|F(i\omega_{N/2})|$ seja significativo, há necessidade de redução do espaçamento Δt . De forma inversa, caso se conheça *a priori* a máxima frequência relevante na expansão da função contínua $f(t)$, $f_{\text{máx.}}$, a expressão anterior estabelece a seguinte condição de espaçamento dos valores discretos dessa função:

$$\delta_{\text{máx.}} \leq \frac{1}{2\Delta t} \rightarrow \boxed{\Delta t \leq \frac{1}{2\delta_{\text{máx.}}}} \quad (7-3.77)$$

Por outro lado, há também o interesse em que o espaçamento Δt seja suficientemente pequeno em relação ao período natural do oscilador simples, para que a resposta em vibração livre durante a extensão do período seja bem representada. Para isso, recomenda-se impor também que $\Delta t < T_n/10$.

²⁷ Denominação em homenagem ao matemático sueco-americano Harry Nyquist (1889-1976).

Falta uma estratégia para escolher a extensão ΔT , que é a parte incluída no período T_0 para que seja eliminado o efeito periódico introduzido na representação da função $f(t)$ através da *transformada de Fourier discreta*. É prático arbitrar essa extensão de maneira que a amplitude em vibração livre, ao atingir o final do período T_0 , se reduza a um valor irrelevante, como 1% de seu valor no instante t_f (vide [Figura 7-2.2](#)), por exemplo.

Em caso do *amortecimento viscoso*, essa redução pode ser estimada com base na resposta ao impulso unitário atuante no instante zero, que, de acordo com a [Equação 7-3.62](#), decresce com o fator exponencial $e^{-\xi\omega_n t}$. Logo, escreve-se:

$$\begin{aligned} e^{-\xi\omega_n\Delta T} &\leq 1/100 \rightarrow -\xi\omega_n\Delta T \ln e \leq (\ln 1 - \ln 100) \\ &\rightarrow \Delta T \geq \frac{\ln 100}{\xi\omega_n} \rightarrow \boxed{\Delta T \geq 0,733 T_n / \xi} \end{aligned} \quad (7-3.78)$$

Assim, para uma dada força aperiódica definida de forma discreta, as aproximações dependem essencialmente de T_0 e de N ou, o que dá no mesmo, de Δt e de N . Em outras palavras, dependem da resolução no tempo, Δt , e da resolução em frequência $\Delta\omega$.

EXEMPLO 7-3.1

Para comprovar numericamente a análise desenvolvida anteriormente, considera-se a idealização em oscilador simples do reservatório sob força de impacto que foi utilizada no Exemplo 3-7.1. Essa idealização e essa força estão reproduzidas na [Figura E7-3.1a](#), por conveniência.

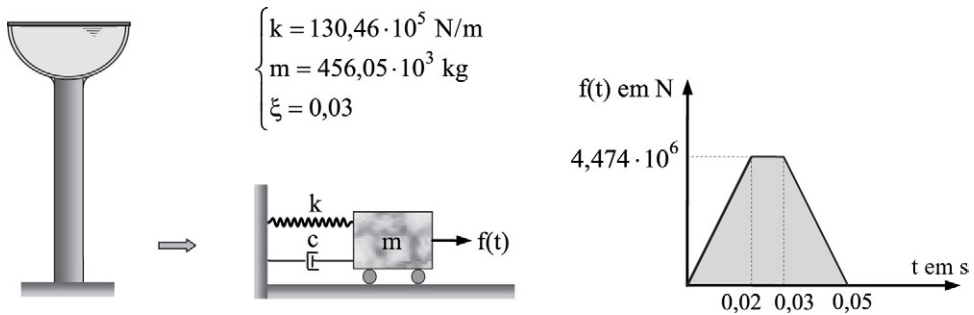


FIGURA E7-3.1a Idealização em oscilador simples e força de impacto.

Inicialmente, adota-se ($T_0 = 15$ s) e ($N = 2^{10}$).

Com essa discretização, tem-se a *frequência de Nyquist*:

$$\omega_{N/2} = \frac{\pi}{\Delta t} \rightarrow \omega_{N/2} = \frac{\pi N}{T_0} = 214,47 \text{ rad/s}$$

Na [Figura E7-3.1b](#) estão representadas a parte real e a parte imaginária da *transformada de Fourier*, respectivamente, simétrica e antissimétrica em relação à *frequência de Nyquist*.

Na [Figura E7-3.1c](#) está mostrado o espectro de amplitudes da *transformada de Fourier*, simétrico em relação à *frequência de Nyquist*. No caso, essa frequência é nula, o que evidencia que o espaçamento ($\Delta t = T_0/N = 0,01465$ s) adotado está adequado.

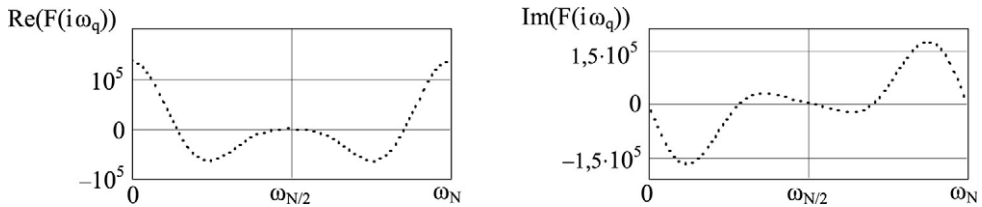


FIGURA E7-3.1b Parte real e parte imaginária da transformada de Fourier.

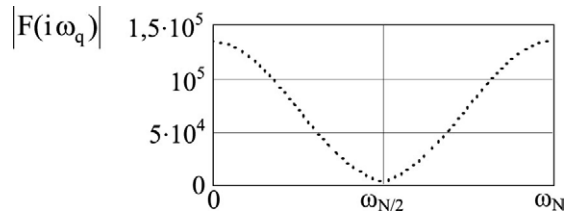


FIGURA E7-3.1c Espectro de amplitudes da transformada de Fourier.

A Figura E7-3.1d apresenta os históricos de deslocamento nos quinze primeiros segundos. A representação em linha contínua resultou da análise no domínio da frequência, e a representação em linha pontilhada, da resolução por segmentos lineares da ação externa. Essas representações são praticamente coincidentes. Contudo, em representações de zero a um segundo e meio, como mostra a Figura E7-3.1e, identifica-se que ocorre um deslocamento inicial na solução obtida através do domínio da frequência, o que se deve à adoção de um valor não adequado para T_0 .

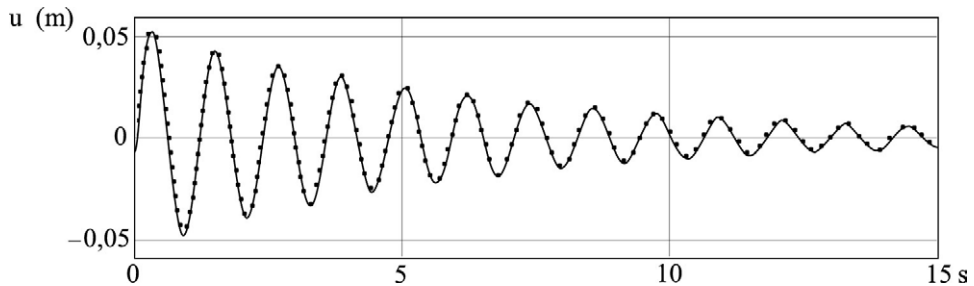


FIGURA E7-3.1d Históricos de deslocamento nos quinze primeiros segundos.

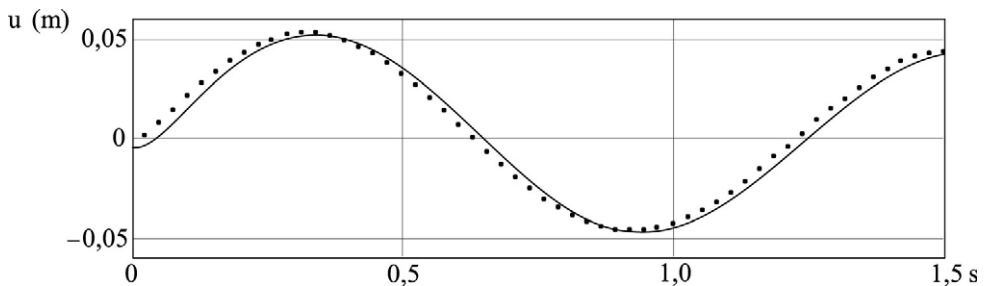


FIGURA E7-3.1e Históricos de deslocamento, com condição inicial espúria.

De fato, conforme a [Equação 7-3.78](#), é indicado utilizar:

$$\Delta T \geq 0,733 T_n / \xi = 0,733 \cdot 1,175 / 0,03 = 28,709 \text{ s} \rightarrow T_0 \geq 28,709 + 0,05 = 28,759 \text{ s}$$

e foi utilizado ($T_0 = 15 \text{ s}$).

A [Figura E7-3.1f](#) apresenta os históricos obtidos com base em ($T_0 = 30 \text{ s}$) e ($N = 2^{11}$), os quais têm perfeita coincidência de representação.

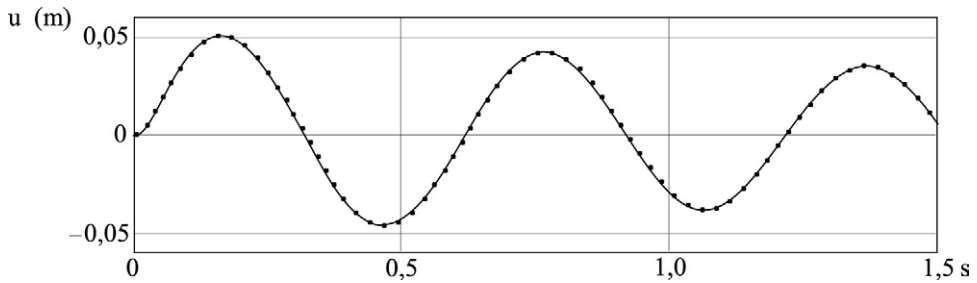


FIGURA E7-3.1f Históricos de deslocamento, sem condição inicial espúria.

Com a utilização do *amortecimento estrutural* equivalente expresso na [Equação 7-3.33a](#), juntamente com a correspondente função de transferência expressa na [Equação 7-3.65](#), foram obtidas representações gráficas coincidentes com as anteriormente apresentadas.

EXEMPLO 7-3.2

Para evidenciar a importância da *frequência de Nyquist*, reconsidera-se o oscilador do exemplo anterior, agora sob a força ($f(t) = 10^6 e^{-10t} \text{ N}$) que está representada a seguir.

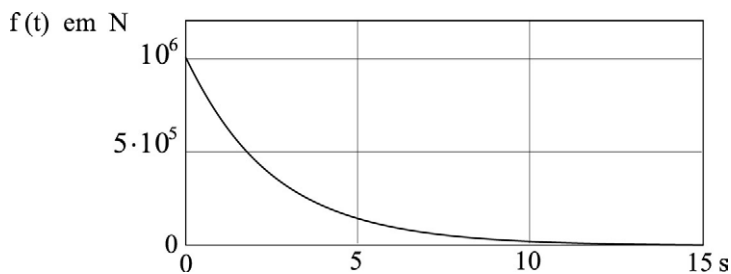


FIGURA E7-3.2a Força aplicada ao oscilador.

Adota-se ($T_0 = 5 \text{ s}$) com ($N = 2^7$), ($N = 2^8$), ($N = 2^9$) e ($N = 2^{10}$).

Com essas discretizações, obtêm-se os espectros da *transformada de Fourier* mostrados no [Figura E7-3.2b](#). Observa-se que, com o aumento do valor de N , cresce a *frequência de Nyquist* e decresce a amplitude $|F(i\omega_{N/2})|$.

A [Figura E7-3.2c](#) apresenta os históricos de deslocamento obtidos com os diversos valores de N . A linha contínua, a linha em traço-ponto e a linha tracejada se referem, respectivamente, às

soluções resultantes com ($N = 2^9$), ($N = 2^8$) e ($N = 2^7$). A solução com ($N = 2^{10}$), não representada, praticamente coincidiu com a de ($N = 2^9$). Independentemente das condições iniciais espúrias, as amplitudes diminuem à medida que se aumenta o valor de N , até se estabilizarem com ($N = 2^9$).

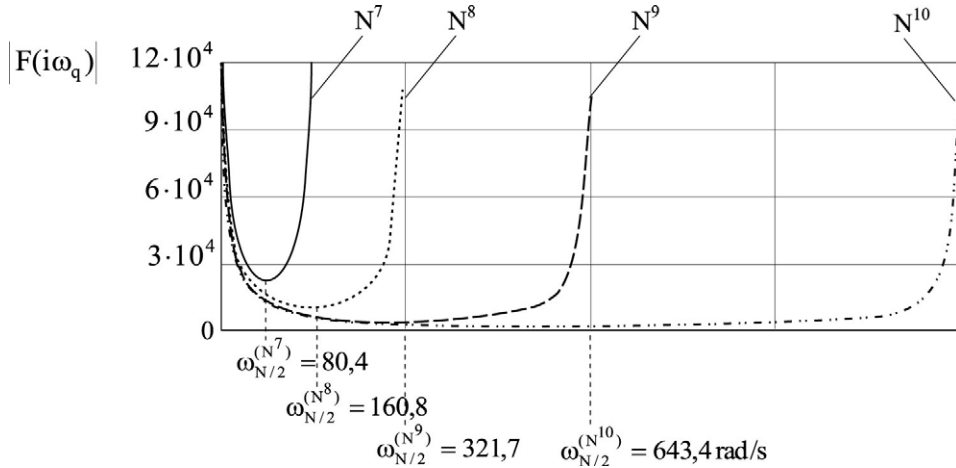


FIGURA E7-3.2b Espectros de amplitudes da *transformada de Fourier*.

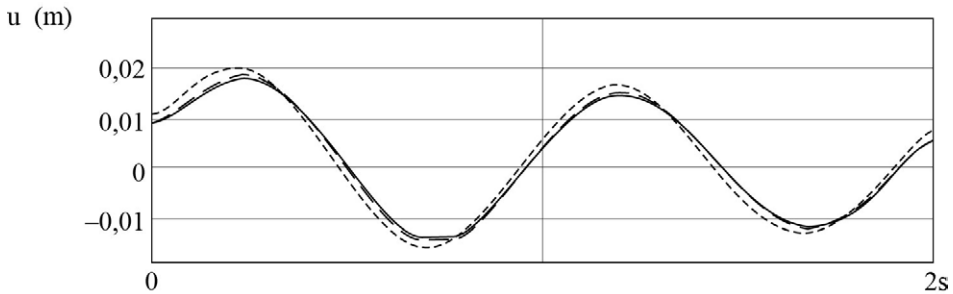


FIGURA E7-3.2c Históricos de deslocamento.

A extensão ΔT , em que valores nulos da ação externa são especificados para eliminar a periodicidade introduzida com a discretização da *transformada de Fourier*, implica mais processamento computacional, o que afeta a eficiência da análise. Além do que, raramente é relevante a resposta após o cessar dessa ação. Há, pois, o interesse em um procedimento que elimine essa periodicidade artificial, sem o uso daquela extensão.²⁸

Um desses procedimentos é subtrair, da solução em regime permanente $u(t_n)$ obtida com a análise no domínio da frequência, a solução discreta de vibração livre devida às condições

²⁸ Veletsos, A. S. & Kumar, A., 1983, *Steady State and Transient Response of Linear Structures*, Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE, vol. 109, pp. 1215-1230.

iniciais espúrias, \tilde{u}_0 e \tilde{v}_0 , determinadas nessa mesma análise. Assim, tendo-se a solução expressa na Equação 3-3.17, escreve-se a solução de deslocamento corrigida:

$$u_{\text{cor}}(t_n) = u(t_n) - e^{-\xi\omega_n t_n} \left(\tilde{u}_0 \cos(\omega_a t_n) + \frac{\tilde{u}_0 \xi \omega_n + \tilde{v}_0}{\omega_a} \sin(\omega_a t_n) \right) \quad (7-3.79)$$

Para essa expressão, \tilde{u}_0 é o deslocamento $u(t_0)$ obtido com a análise no domínio da frequência, e a velocidade \tilde{v}_0 é aproximadamente igual a $(u(t_1) - u(t_0))/\Delta t$, em que $u(t_1)$ é também deslocamento obtido com essa análise. Alternativamente e de forma rigorosa, \tilde{v}_0 pode ser obtida a partir da derivada primeira da expressão de deslocamento da análise no domínio da frequência. Para isso, com a substituição da Equação 7-2.15 na Equação 7-3.67 obtém-se:

$$u(t_n) = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \sum_{q=0}^{N-1} U(i\omega_q) e^{i\omega_q t_n} \quad (7-3.80)$$

A derivada dessa expressão é a solução de velocidade:

$$\begin{aligned} \dot{u}(t_n) &= \frac{\Delta\omega i}{2\pi} \sum_{q=0}^{N-1} \omega_q U(i\omega_q) e^{i\omega_q t_n} \\ \rightarrow \dot{u}(t_n) &= \frac{(\Delta\omega)^2 i}{2\pi} \sum_{q=0}^{N-1} q U(i\omega_q) e^{i\omega_q t_n} = \frac{2\pi i}{T_0^2} \sum_{q=0}^{N-1} q U(i\omega_q) e^{i\omega_q t_n} \end{aligned} \quad (7-3.81)$$

Assim, chega-se à velocidade no instante inicial:

$$\tilde{v}_0 = \frac{2\pi i}{T_0^2} \sum_{q=0}^{N-1} q U(i\omega_q) \rightarrow \tilde{v}_0 = -\frac{4\pi}{T_0^2} \sum_{q=0}^{N/2} q \operatorname{Im}(U(i\omega_q)) \quad (7-3.82)$$

Uma vez que seja eliminada a periodicidade artificial, o critério de escolha da extensão ΔT passa a ser a duração de tempo em que se deseja obter a resposta dinâmica após o cessar da ação externa, em geral, o lapso em que um valor máximo da resposta possa ser alcançado. E como em vibração livre esse máximo ocorre em não mais do que $T_n/2$, passa a ser indicado utilizar:

$$T_0 \geq t_f + T_n/2 \quad (7-3.83)$$

EXEMPLO 7-3.3

Para comprovar o procedimento de eliminação de periodicidade apresentado anteriormente, reconsidera-se o Exemplo 7-3.1.

Naquele exemplo, com base em ($T_0 = 15\text{ s}$) e ($N = 2^{10}$), foi obtido o histórico de deslocamento em linha contínua mostrado na Figura E7-3.1e, que apresenta as condições iniciais espúrias:

$$u_0 = -4,913 \cdot 10^{-3} \text{ m} \quad e \quad v_0 = -7,755 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}$$

Com essas condições e a Equação 7-3.79, são obtidos os históricos mostrados na Figura E7-3.3. O histórico corrigido está representado em linha tracejada, que coincide com o da resolução por segmentos lineares da ação externa representado em linha pontilhada.

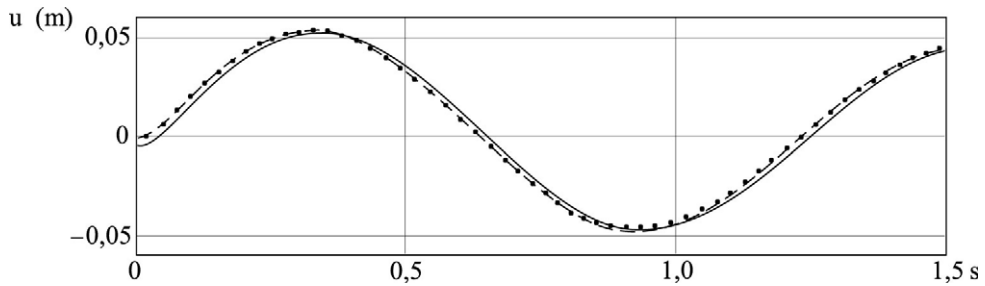


FIGURA E7-3.3 Históricos de deslocamento.

7-3.5 Consideração das condições iniciais ao movimento

Com a desenvolvida análise no domínio da frequência obtém-se apenas a resposta forçada. Em caso do *amortecimento viscoso* e em comportamento linear, condições iniciais ao movimento podem ser levadas em conta através da adição da solução de vibração livre amortecida (expressa na Equação 3-3.17) à resposta de deslocamento obtida através do referido domínio. Alternativamente, essas condições podem ser incluídas na análise nesse domínio, como exposto a seguir.

Dado a um oscilador simples um deslocamento u_0 e uma velocidade nula, a partir da posição neutra especificada pela coordenada x_0 como mostra a parte esquerda da Figura 7-3.10, a massa oscila a partir de u_0 em vibração livre, até se estabilizar na referida posição, devido ao amortecimento. Alternativamente, uma vez que seja aplicada uma força ($f_0 = ku_0$), instantaneamente e de forma permanente, a partir da configuração neutra e em sentido contrário a u_0 , como ilustra a parte direita da mesma figura, essa força imprime uma vibração em torno de u_0 , até que a oscilação decaia, por amortecimento, a esse valor de deslocamento.

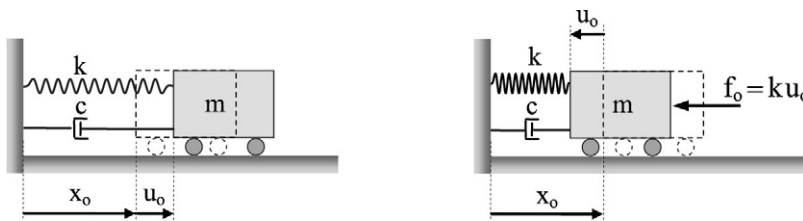


FIGURA 7-3.10 Oscilador simples amortecido com deslocamento inicial.

Assim, com base nas Equações 7-3.66 e 7-3.67, escreve-se a resposta ao referido deslocamento inicial como:

$$u(t_n) = u_0 + \frac{\Delta\omega}{2\pi} \sum_{q=0}^{N-1} H(i\omega_q) F(i\omega_q) e^{i2\pi q n/N}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, (N-1) \quad (7-3.84)$$

em que $F(i\omega_q)$ é a transformada discreta da força igual a $-ku_o$. Essa transformada, de acordo com a segunda expressão da [Equação 7-2.16](#), se escreve:

$$F(i\omega_q) = -\Delta t k u_o \sum_{n=0}^{N-1} e^{-i2\pi q n/N} \quad (7-3.85)$$

Já quanto ao efeito da velocidade inicial v_o , tem-se:

$$\int_{-\infty}^{\infty} m v_o \delta(t) dt = m v_o \quad (7-3.86)$$

onde $\delta(t)$ é o *delta de Dirac* que atua no instante zero. Assim, a velocidade inicial pode ser simulada através da aplicação do impulso:

$$I = m v_o \delta(t) \quad (7-3.87)$$

cujas resposta de deslocamento se escreve:

$$u(t) = m v_o h(t) \quad (7-3.88)$$

em que $h(t)$ é a resposta ao impulso unitário expressa na [Equação 7-3.60](#). Em outras palavras, a grandeza matematicamente correlata à velocidade inicial é a quantidade de movimento $m v_o$.

Logo, escreve-se a solução contínua devida à velocidade inicial v_o :

$$u(t) = \frac{m v_o}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(i\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (7-3.89)$$

e, em forma discreta, tem-se

$$u(t_n) = \frac{m v_o \Delta \omega}{2\pi} \sum_{q=0}^{N-1} H(i\omega_q) e^{i2\pi q n/N}$$

$$\rightarrow \boxed{u(t_n) = \frac{m v_o}{N \Delta t} \sum_{q=0}^{N-1} H(i\omega_q) e^{i2\pi q n/N}} \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots, (N-1) \quad (7-3.90)$$

7-4 FORMULAÇÃO MATRICIAL

A análise no domínio da frequência desenvolvida anteriormente é *standard*, tem a desvantagem de operar com variáveis complexas, além da necessidade do estabelecimento de um período e de fornecer a solução nas coordenadas originais apenas ao final da análise. Essas desvantagens são em parte eliminadas com a formulação matricial desenvolvida a seguir. Nesta, incorpora-se, em uma única expressão, a transformada de Fourier discreta da ação externa, o produto dessa transformada pela função de transferência e a transformada inversa desse produto.²⁹

²⁹ Venancio-Filho, F. & Claret, A.M., 1992, *Matrix formulation of the Dynamic Analysis of SDOF in the Frequency Domain*, Computers & Structures, vol. 42, n^o. 5, pp. 853-855.

7-4.1 Matriz de transformada de Fourier implícita

Para desenvolver a análise no domínio da frequência de oscilador simples em notação matricial, definem-se os seguintes vetores e matrizes:

$$\mathbf{f} = [f(t_0) \quad f(t_1) \quad \cdots \quad f(t_n) \quad \cdots \quad f(t_{N-1})]^T \quad (7-4.1a)$$

$$\mathbf{u} = [u(t_0) \quad u(t_1) \quad \cdots \quad u(t_n) \quad \cdots \quad u(t_{N-1})]^T \quad (7-4.1b)$$

$$\mathbf{F} = [F(i\omega_0) \quad F(i\omega_1) \quad \cdots \quad F(i\omega_q) \quad \cdots \quad F(i\omega_{N-1})]^T \quad (7-4.1c)$$

$$\mathbf{E}^- = \begin{bmatrix} e^0 & e^0 & \cdots & e^0 & \cdots & e^0 \\ \cdot & e^{-i(2\pi/N)} & \cdots & e^{-in(2\pi/N)} & \cdots & e^{-i(N-1)(2\pi/N)} \\ & & \ddots & & & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & e^{-iqn(2\pi/N)} & \cdots & e^{-iq(N-1)(2\pi/N)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vdots \\ \text{sim.} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & e^{-i(N-1)(N-1)(2\pi/N)} \end{bmatrix} \quad (7-4.1d)$$

$$\mathbf{E}^+ = \begin{bmatrix} e^0 & e^0 & \cdots & e^0 & \cdots & e^0 \\ \cdot & e^{i(2\pi/N)} & \cdots & e^{in(2\pi/N)} & \cdots & e^{i(N-1)(2\pi/N)} \\ & & \ddots & & & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & e^{iqn(2\pi/N)} & \cdots & e^{iq(N-1)(2\pi/N)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vdots \\ \text{sim.} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & e^{i(N-1)(N-1)(2\pi/N)} \end{bmatrix} \quad (7-4.1e)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} H(i\omega_0) & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & H(i\omega_1) & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & H(i\omega_q) & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & H(i\omega_{N-1}) \end{bmatrix} \quad (7-4.1f)$$

Assim, o vetor \mathbf{f} contém os dados de entrada à análise, o vetor \mathbf{u} , os valores de saída, ambos no domínio do tempo. Na matriz \mathbf{H} pode ser utilizada a função de transferência do amortecimento viscoso ou do amortecimento estrutural.

Com as definições anteriores e com base na [Equação 7-2.16](#), escreve-se a *transformada de Fourier discreta* da ação externa sob a forma matricial:

$$\mathbf{F} = \Delta t \mathbf{E}^- \mathbf{f} \quad (7-4.2)$$

Logo, com base nas [Equações 7-3.66 e 7-3.67](#), tem-se a solução de deslocamento no domínio do tempo sob a forma:

$$\mathbf{u} = \frac{\Delta \omega}{2\pi} \mathbf{E}^+ \mathbf{H} \mathbf{F} \quad (7-4.3)$$

A partir dessas duas últimas equações, escreve-se:

$$\mathbf{u} = \frac{\Delta\omega \Delta t}{2\pi} \mathbf{E}^+ \mathbf{H} \mathbf{E}^- \mathbf{f} \rightarrow \boxed{\mathbf{u} = \frac{1}{N} \mathbf{E}^+ \mathbf{H} \mathbf{E}^- \mathbf{f}} \quad (7-4.4)$$

Com a notação de matriz de transformada implícita:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^+ \mathbf{H} \mathbf{E}^- \quad (7-4.5)$$

a solução anterior fica sob a forma mais compacta:

$$\boxed{\mathbf{u} = \frac{1}{N} \mathbf{E} \mathbf{f}} \quad (7-4.6)$$

Essa expressão sintetiza a *transformada de Fourier* da ação externa, o produto dessa transformada pela função de transferência e a transformada inversa desse produto, o que motivou a denominação *transformada de Fourier implícita*.

A [Figura 7-4.1](#) esquematiza a análise no domínio da frequência nas formulações matricial e standard. Nessa última, diferentemente da primeira, ficam explicitados o conteúdo de frequência da ação externa e a solução no domínio da frequência. Na primeira e para um dado oscilador, a matriz \mathbf{E} pode ser utilizada com diferentes dados de entrada, não requer que o número de pontos da discretização daquela ação seja uma potência de dois,³⁰ e tem propriedades que facilitam o seu cálculo, como será apresentado na [Subseção 7-4.3](#).

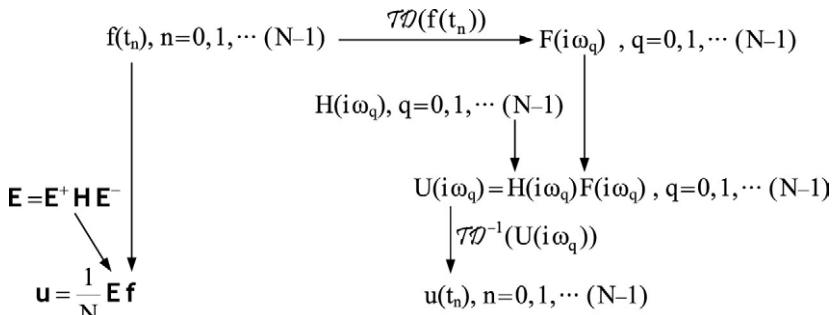


FIGURA 7-4.1 Análises no domínio da frequência, matricial e standard.

A solução de velocidade é obtida a partir da [Equação 7-4.4](#) e se escreve:

$$\boxed{\dot{\mathbf{u}} = \frac{1}{N} \mathbf{E}^+ \dot{\mathbf{H}} \mathbf{E}^- \mathbf{f}} \quad (7-4.7)$$

³⁰ Venancio-Filho, F. & Claret, A.M., 2002, *Frequency and Time Domain Dynamic Structural Analysis: Convergence and Causality*, Computers & Structures, vol. 80, pp. 1503-1509.

em que se tem a matriz diagonal:

$$\dot{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} i\omega_0 H(i\omega_0) & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & i\omega_1 H(i\omega_1) & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & i\omega_q H(i\omega_q) & \cdots & 0 \\ & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & i\omega_{N-1} H(i\omega_{N-1}) \end{bmatrix} \quad (7-4.8)$$

7-4.2 Consideração das condições iniciais

Na [Subseção 7-3.5](#) foi mostrado como incluir condições iniciais em análise no domínio da frequência. A seguir, esse efeito é considerado em formulação matricial.³¹

Um deslocamento inicial u_0 pode ser levado em conta, na análise no domínio da frequência, através da soma desse deslocamento à solução de deslocamento como resposta à aplicação, de forma instantânea, da força $-ku_0$. Logo, tendo-se em vista as [Equações 7-3.84 e 7-3.85](#), escreve-se, em forma matricial, a solução devida a u_0 :

$$\mathbf{u} = u_0 \mathbf{1} + \frac{1}{N} \mathbf{E} (-k u_0 \mathbf{1}) \quad (7-4.9)$$

em que $\mathbf{1}$ é um vetor de N coeficientes iguais à unidade.

Na referida subseção, foi também mostrado que a resposta à velocidade inicial v_0 é $mv_0 h(t)$. Com base ao expresso na [Equação 7-3.90](#), escreve-se a solução devida a essa velocidade:

$$\mathbf{u} = \frac{m v_0}{N \Delta t} \mathbf{E} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \right\} = \frac{m v_0}{N \Delta t} \mathbf{E} \boldsymbol{\delta} \quad (7-4.10)$$

em que $\boldsymbol{\delta}$ denota um vetor de N coeficientes, com apenas o primeiro coeficiente não nulo e igual à unidade.

Assim, uma vez que seja obtida a matriz de transformada implícita, a consideração de condições iniciais ao movimento requer simples operações matriciais.

Com a ação simultânea de força aperiódica de valores discretos contidos no vetor \mathbf{f} e das condições iniciais u_0 e v_0 , escreve-se a solução de deslocamento sob a forma compacta:

$$\mathbf{u} = u_0 \mathbf{1} + \frac{1}{N} \mathbf{E} \left(\mathbf{f} - k u_0 \mathbf{1} + \frac{m v_0}{\Delta t} \boldsymbol{\delta} \right) \quad (7-4.11)$$

7-4.3 Propriedades da matriz de transformada implícita

Além de concisão, a formulação matricial tem, em relação à formulação standard, as vantagens de um menor número de operações, de não apresentar a restrição de N ser múlti-

³¹ Ferreira, W.G.; Claret, A.M.; Venancio-Filho, F.; Ribeiro, M.V., 1997, *The Treatment of Initial Conditions in the Frequency-Domain Dynamic Analysis*, XVIII CILANCE, vol. 2, pp. 815-821.

plo inteiro de 2 e de permitir liberdade quanto à extensão de período. Essas vantagens são identificadas com o exame de um termo genérico da matriz de transformada implícita, **E**.

Para isso, com a notação ($a = 2\pi/N$), um termo genérico da matriz **E** se escreve:

$$e_{nj} = \sum_{q=0}^{N-1} e_{nq}^+ h_{qq} e_{qj}^- = \sum_{q=0}^{N-1} e^{iaq} h_{qq} e^{-ijaq} = \sum_{q=0}^{N-1} h_{qq} e^{iaq(n-j)} \quad (7-4.12)$$

em que ($n = 0, 1, 2 \dots (N-1)$) e ($h_{qq} = H(i\omega_q)$). Além disso, e_{nq}^+ e e_{qj}^- são, respectivamente, termos genéricos das matrizes **E**⁺ e **E**⁻.

O cálculo do fator exponencial da expressão anterior envolve a diferença ($n-j$), o que significa que os termos de cada diagonal descendente da matriz **E**, da esquerda para a direita, têm valores constantes.³² Isto é, essa matriz tem:

$$e_{nj} = e_{n+1,j+1} \quad (7-4.13)$$

Essa propriedade é ilustrada na parte esquerda da Figura 7-4.2, que evidencia que a matriz **E** pode ser construída a partir de sua primeira coluna e de sua primeira linha.

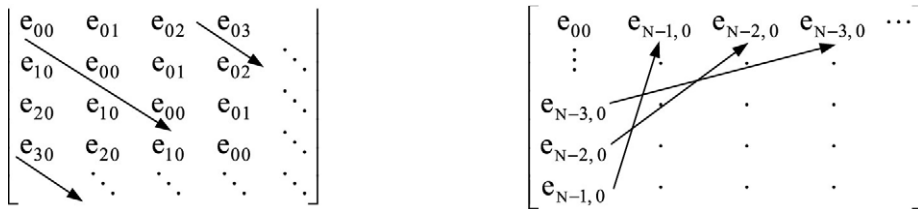


FIGURA 7-4.2 Indicação de coeficientes iguais da matriz de transformada implícita.

Para um coeficiente genérico da primeira linha da matriz **E**, tem-se:

$$e_{0,N-n} = \sum_{q=0}^{N-1} h_{qq} e^{iaq(-N+n)} = \sum_{q=0}^{N-1} h_{qq} e^{-iaqN} e^{iaqn} = \sum_{q=0}^{N-1} h_{qq} e^{-i2\pi q} e^{iaqn} \\ \rightarrow e_{0,N-n} = \sum_{q=0}^{N-1} h_{qq} e^{iaqn} \rightarrow \boxed{e_{0,N-n} = e_{n0}} \quad (7-4.14)$$

Esse resultado expressa que a primeira linha da matriz **E** pode ser gerada a partir de sua primeira coluna, como ilustra a parte direita da figura anterior. Logo, para construir essa matriz é necessária apenas a determinação de sua primeira coluna.

Além disso, o termo genérico dessa coluna se escreve:

$$e_{n0} = \sum_{q=0}^{N-1} h_{qq} e^{iaqn} \equiv \sum_{q=0}^{N-1} H(i\omega_q) e^{i2\pi q n/N} \quad (7-4.15)$$

³² Esta uma matriz de diagonais constantes é denominada *matriz de Toeplitz*, em homenagem ao matemático alemão Otto Toeplitz (1881-1940).

A partir desse resultado, identifica-se que:

$$\frac{\Delta\omega}{2\pi} e_{n0} = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \sum_{q=0}^{N-1} H(i\omega_q) e^{i2\pi q n/N}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, (N-1) \quad (7-4.16)$$

é a *transformada de Fourier inversa discreta* da função de transferência. Assim, a referida coluna pode ser obtida com a *transformada de Fourier inversa rápida* dessa função.

Importa mostrar que a formulação matricial pode ser utilizada sem a tradicional extensão de período. Como o aumento dos dados de entrada com termos nulos (em constituição da referida expansão) implica mais linhas na matriz **E**, essa matriz expressa “resultados” de um período. Logo, devido à periodicidade introduzida com a discretização da *transformada de Fourier*, a primeira linha dessa matriz, (e_{0j} , $j = 0, 1 \dots N-1$), seria igual à linha virtual que ocorreria após o final da matriz, (e_{Nj} , $j = 0, 1 \dots N-1$), e assim por diante. Além disso, devido à formação daquela primeira linha, novas linhas implicam novos coeficientes nas primeiras posições da referida linha, como ilustra a parte direita da figura anterior. Portanto, anulando-se os coeficientes superiores à diagonal principal da matriz **E**, como ilustrado na [Figura 7-4.3](#), elimina-se a periodicidade. Diz-se, então, que essa matriz passa a atender ao *princípio da causalidade* que estabelece que a resposta do sistema em um instante t_n depende apenas das ações atuantes em instantes anteriores.

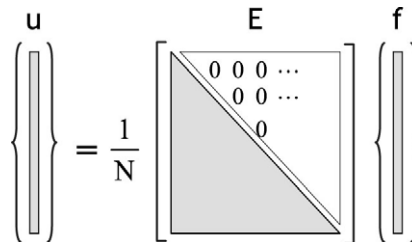


FIGURA 7-4.3 Esquema de eliminação da periodicidade.

Outro fato importante é que a presente análise pode ser utilizada em determinação de parte dos valores de saída. Isso é esclarecido com o produto matricial esquematizado na [Figura 7-4.4](#). Identifica-se que, com a utilização dos n primeiros valores dos dados de entrada, $f(t_0)$ até $f(t_{n-1})$, há necessidade apenas de considerar as n primeiras colunas da matriz **E**⁻. Basta determinar as n primeiras colunas do produto **HE**⁻. Seguidamente, a partir desse produto, para determinar os n primeiros valores de saída, $u(t_0)$ até $u(t_{n-1})$, só é preciso utilizar as n primeiras linhas da matriz **E**⁺. Logo, faz-se necessário conhecer apenas a primeira submatriz principal de ordem ($n \times n$) da matriz **E**, na qual os coeficientes acima da diagonal principal devem ser anulados, para eliminar o efeito de periodicidade.

Desvincula-se, assim, o número dos dados de entrada com o número dos valores de saída, embora seja necessário determinar todos os termos da função de transferência.

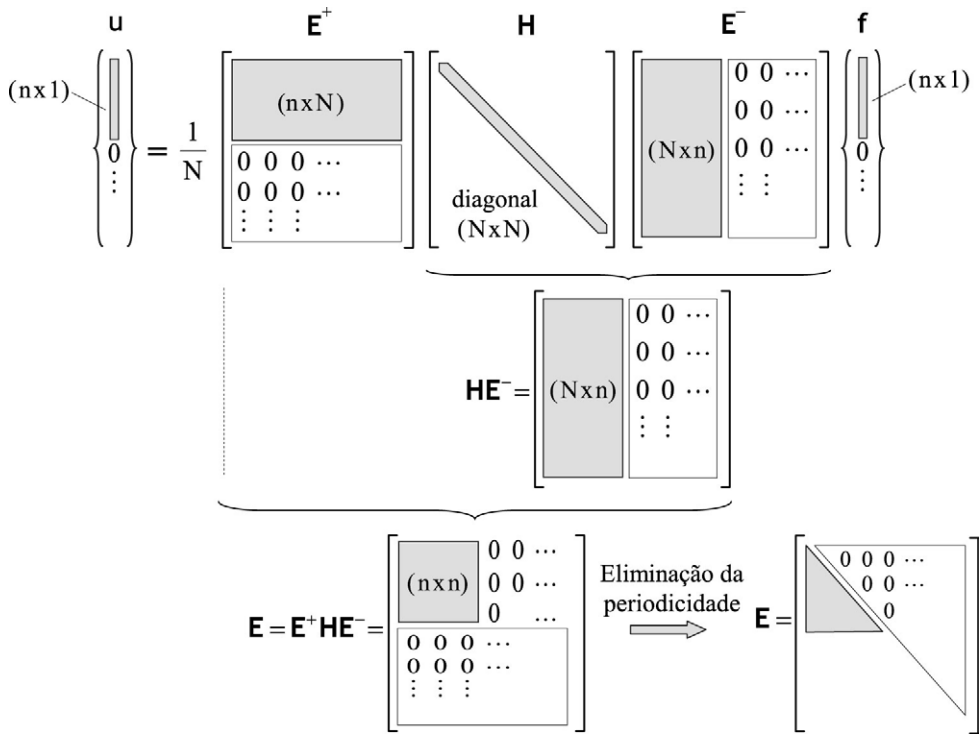


FIGURA 7-4.4 Esquema de resolução parcial com a formulação matricial.

7-4.4 Transposição ao domínio do tempo

A formulação matricial desenvolvida anteriormente utiliza função de transferência, que tem variável complexa e, portanto, tem vantagem em caso de se adotar amortecimento estrutural. Com *amortecimento viscoso*, essa formulação não carece do uso de variável complexa, como exposto a seguir.

A *transformada de Fourier inversa* da função de transferência, $H(i\omega)$, é a resposta no domínio do tempo a um impulso unitário que atua no instante zero, $h(t)$. Logo, com base na [Equação 7-4.16](#), tem-se:

$$\frac{\Delta\omega}{2\pi} e_{n0} = h(t_n) \rightarrow e_{n0} = h(t_n) \frac{2\pi}{\Delta\omega} \equiv h(t_n) T_0 \quad (7-4.17)$$

Como na solução de deslocamento expressa na [Equação 7-4.6](#), a matriz E é pré-multiplicada por $1/N$, escreve-se:

$$\frac{1}{N} e_{n0} = h(t_n) \frac{T_0}{N} \equiv h(t_n) \Delta t \quad n = 0, 1, 2, \dots, (N-1) \quad (7-4.18)$$

onde $h(t_n)\Delta t$ é a resposta de deslocamento, no instante t_n , devida a um impulso atuante durante o primeiro espaçamento de tempo.

Além disso, de acordo com a [Equação 7-3.62](#), tem-se a resposta a um impulso unitário atuante no instante zero:

$$h(t) = \frac{1}{m\omega_a} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_a t) \quad (7-4.19)$$

Recai-se, assim, em uma matriz triangular inferior constituída de valores discretos da resposta ao impulso unitário centrado na origem, matriz esta que, multiplicada pelo espaçamento Δt e pós-multiplicada pelo vetor dos dados de entrada, fornece os valores de saída no domínio do tempo, como ilustra a [Figura 7-4.5](#).

$$\mathbf{u} = \Delta t \begin{bmatrix} h(t_0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h(t_1) & h(t_0) & 0 & \dots & 0 \\ h(t_2) & h(t_1) & h(t_0) & & \\ h(t_3) & h(t_2) & h(t_1) & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix} \mathbf{f}$$

FIGURA 7-4.5 Solução matricial no domínio do tempo.

Como ($h(t_0) = 0$), a n -ésima linha do sistema de equações algébricas esquematizado na figura anterior fornece a solução de deslocamento no instante t_n :

$$u(t_n) = \Delta t \sum_{i=0}^{n-1} h(t_{n-i}) f(t_i) \quad (7-4.20)$$

Logo, as soluções de velocidade e de aceleração, no referido instante, podem ser obtidas, de forma aproximada, como:

$$\begin{cases} \dot{u}_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta t} \\ \ddot{u}_i = \frac{\dot{u}_i - \dot{u}_{i-1}}{\Delta t} \end{cases}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \quad (7-4.21)$$

A solução de deslocamento referente ao instante t_n é computada com os valores da resposta ao impulso centrado na origem, calculados em cada um dos instantes anteriores a t_n . Assim, à medida que cresce o valor de n , o número de termos do somatório dessa solução aumenta linearmente, sendo que cada termo corresponde a uma multiplicação de variáveis reais. Esse aumento não ocorre em resolução recursiva que se caracterize pela determinação da solução em cada instante a partir da solução do instante anterior, como na resolução direta por segmentos lineares da ação externa que foi desenvolvida na Subseção 3-7.2 e nos métodos de integração numérica implícitos detalhados na Subseção 3-7.3. Além do que, na presente resolução, a ação externa é considerada constante em cada espaçamento de tempo, enquanto essa ação tem lei linear naquela resolução. Consequentemente, a presente resolução requer espaçamento de tempo menor, sendo adequada em determinação de resposta de curta duração, além de útil quando a resposta ao impulso unitário é obtida experimentalmente.

A solução de deslocamento expressa na [Equação 7-4.20](#) também se escreve sob a forma:

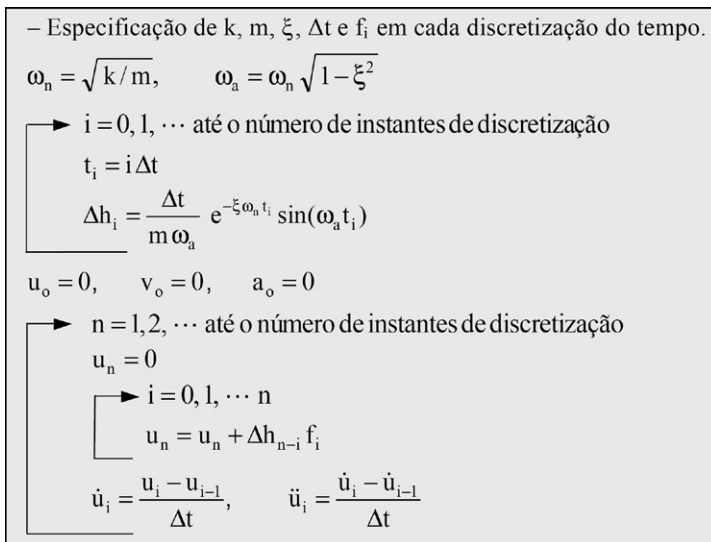
$$u(t_n) = \Delta t \sum_{i=1}^n h(t_i) f(t_{n-i}) \quad (7-4.22)$$

que pode ser obtida diretamente da *integral de Duhamel* expressa na [Equação 7-3.63](#). Para isso, com base na propriedade da convolução que foi apresentada na [Equação 7-2.10](#), escreve-se:

$$u(t) = \int_0^t f(t-\tau) h(\tau) d\tau \quad (7-4.23)$$

em que se tem a resposta ao impulso unitário centrado na origem e a força externa variando do instante t até a origem, o que significa inversão na medida do tempo. Logo, a [Equação 7-4.22](#) pode ser entendida como a forma discreta dessa integral, em que se considera a força externa como constante em cada espaçamento de tempo.

Segue algoritmo da presente resolução.



ALGORITMO 7-4.1 Resolução com base na resposta ao impulso unitário centrado na origem.

EXEMPLO 7-4.1

Para comprovar o algoritmo anterior, considera-se o oscilador simples de ($k=50 \text{ kN/m}$), ($m=250 \text{ kg}$) e ($\xi = 0,03$), agora sob a força harmônica de $5000 \cos(70t)$ em newtons.

No caso, têm-se as propriedades:

$$\begin{cases} \omega_n = 14,142 \text{ rad/s} \\ T_n = 0,444 \text{ s} \\ \omega_a = 14,136 \text{ rad/s} \end{cases}$$

Nas duas próximas figuras estão representados, em linha contínua, os históricos de deslocamento obtidos com a expressão exata contida na Equação 3-4.10, juntamente com os históricos, em linha pontilhada, obtidos com o algoritmo anterior. Para a [Figura E7-4.1a](#) adotou-se o espaçamento ($\Delta t = 0,005s = T_n/88,8$) e para a [Figura E7-4.1b](#) segunda, ($\Delta t = 0,0005s = T_n/888$). Esses históricos evidenciam a necessidade de intervalo de tempo muito pequeno para se obter uma resposta acurada com o algoritmo anterior, o que se deve à consideração da força excitadora como constante em cada espaçamento de tempo.

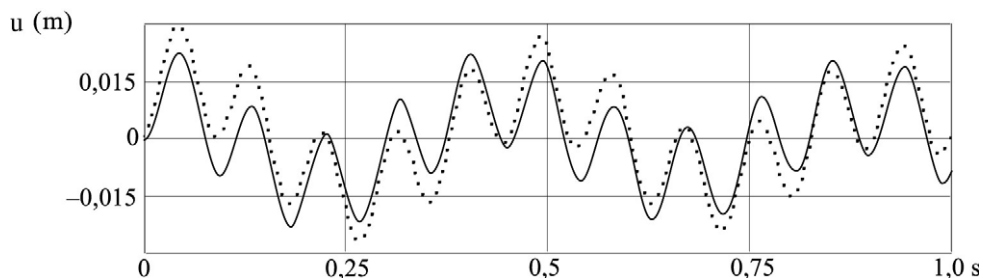


FIGURA E7-4.1a Históricos de deslocamento no caso de ($\Delta t = 0,005s$).

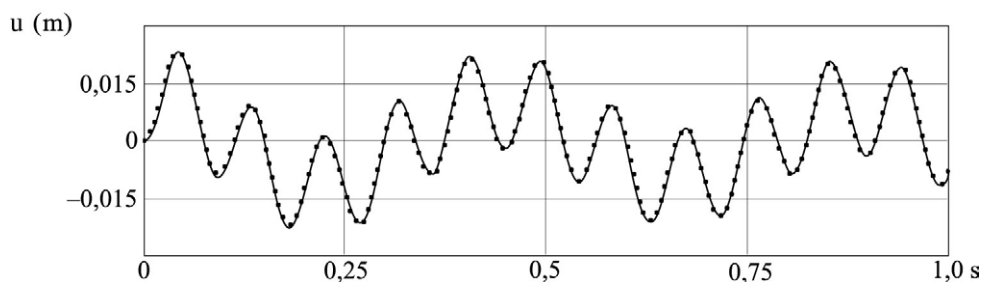


FIGURA E7-4.1b Históricos de deslocamento no caso de ($\Delta t = 0,0005s$).

Com os mesmos códigos de representação, na [Figura E7-4.1c](#) estão mostrados os históricos de velocidade obtidos com o espaçamento ($\Delta t = 0,0005s$), que são coincidentes.

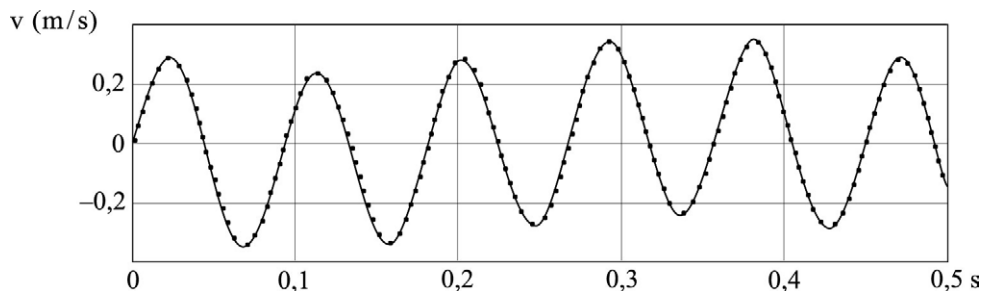


FIGURA E7-4.1c Históricos de velocidade no caso de ($\Delta t = 0,0005s$).

7-5 MODELO DE MULTIGRAUS DE LIBERDADE

O sistema global das equações de movimento de modelo de multigraus de liberdade, com *amortecimento viscoso*, tem a forma:³³

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{d}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{d}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (7-5.1)$$

Em caso de *amortecimento proporcional*, o sistema anterior pode ser resolvido através de transformação modal de coordenadas, como apresentado a seguir. Com *amortecimento não proporcional*, pode ser resolvido sem essa transformação, como está demonstrado na [Subseção 7-5.2](#).

7-5.1 Resolução com coordenadas modais

A transformação de coordenadas:

$$\mathbf{d}(t) = \Phi_p \mathbf{d}_p(t) \quad (7-5.2)$$

foi utilizada no *método de superposição modal* apresentado na Seção 6-2. Com esse método obtêm-se as equações modais desacopladas:

$$\ddot{d}_j(t) + 2\omega_j \xi_j \dot{d}_j(t) + \omega_j^2 d_j(t) = f_j(t), \quad j=1, 2 \dots p \quad (7-5.3)$$

em que ocorre a força modal:

$$f_j(t) = \Phi_j^T \mathbf{f}(t) \quad (7-5.4)$$

Cada uma dessas equações modais pode ser resolvida no domínio do tempo, com um dos métodos apresentados no Capítulo 3. Pode também ser resolvida no domínio da frequência, de acordo como o que foi apresentado na [Subseção 7-3.3](#). Em análise *standard* nesse domínio e para cada equação modal, devem ser determinadas a *transformada de Fourier* da força modal, a função de transferência, a solução no domínio da frequência e a transformada inversa dessa solução. Com o conjunto das soluções modais obtidas e através da transformação modal de coordenadas, chega-se à solução nas coordenadas geométricas iniciais.

Essa resolução requer menos processamento em caso de o vetor das forças nodais externas ter separação entre uma distribuição espacial de forças e uma função do tempo, como foi expresso na Equação 6-2.31 e que se repete, por conveniência:

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}_0 f(t) \quad (7-5.5)$$

Com essa separação, a j -ésima equação modal toma a forma:

$$\ddot{d}_j(t) + 2\omega_j \xi_j \dot{d}_j(t) + \omega_j^2 d_j(t) = \Phi_j^T \mathbf{f}_0 f(t) \quad (7-5.6)$$

Logo, como $(\Phi_j^T \mathbf{f}_0)$ é um escalar, pode-se resolver a nova forma de equação modal:

$$\ddot{d}_j(t) + 2\omega_j \xi_j \dot{d}_j(t) + \omega_j^2 d_j(t) = f(t) \quad (7-5.7)$$

e multiplicar a correspondente solução por aquele escalar.

³³ Não se considera o caso do *amortecimento estrutural* porque não há comprovação experimental de que este possa ser utilizado em modelo de multigraus de liberdade sob ações externas aperiódicas.

Assim, a menos do efeito de condições iniciais ao movimento, escreve-se a solução nas coordenadas geométricas:

$$\mathbf{d}(t) = \sum_{j=1}^p \boldsymbol{\varphi}_j \boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{f}_0 \boldsymbol{\alpha}_j(t) \quad (7-5.8)$$

Considera-se, agora, que a função $f(t)$ seja aperiódica discretizada em N instantes, como foi ilustrado na [Figura 7-2.2](#). Isso permite a determinação da *transformada de Fourier discreta*:

$$F(i\omega_q) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} f(t_n) e^{-i2\pi q n/N} \equiv \mathcal{T}\mathcal{D}(f(t_n)), \quad q = 0, 1, 2, \dots, (N-1) \quad (7-5.9)$$

Para a equação modal anterior, a função de transferência discreta expressa na [Equação 7-3.64](#) toma a forma:

$$H_j(i\omega_q) = \frac{1}{\omega_j^2 - \omega_q^2 + i2\xi_j \omega_j \omega_q}, \quad q = 0, 1, 2, \dots, (N-1) \quad (7-5.10)$$

com $(\omega_q = 2\pi q/T_0)$.

Logo, obtém-se a j -ésima solução no domínio da frequência:

$$U_j(i\omega_q) = H_j(i\omega_q) F(i\omega_q), \quad q = 0, 1, 2, \dots, (N-1) \quad (7-5.11)$$

Com base nessa solução e através da *transformada de Fourier inversa discreta*, chega-se à j -ésima solução modal:

$$\boldsymbol{\alpha}_j(t_n) = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \sum_{q=0}^{N-1} U_j(i\omega_q) e^{i2\pi q n/N} \equiv \mathcal{T}\mathcal{D}^{-1}(U_j(i\omega_q)), \quad n = 0, 1, 2, \dots, (N-1) \quad (7-5.12)$$

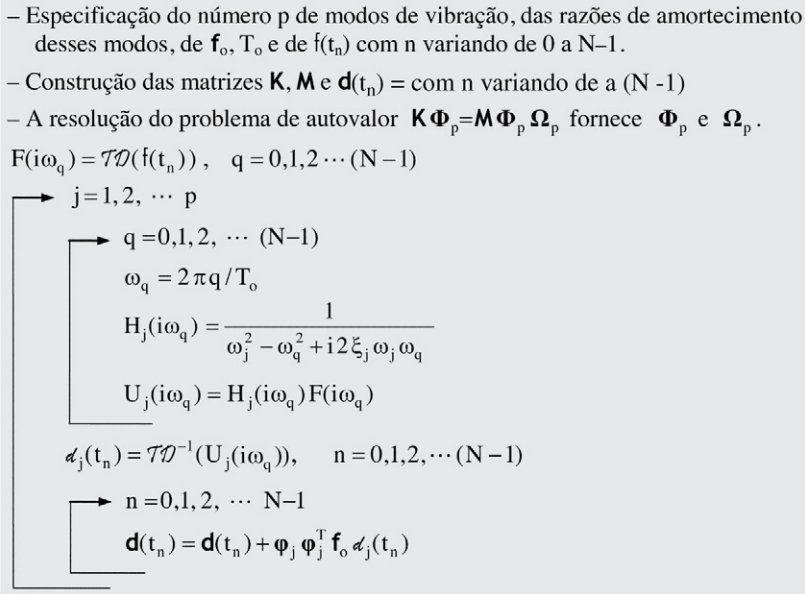
Finalmente, com base no conjunto das soluções modais, obtém-se a solução discreta nas coordenadas geométricas:

$$\mathbf{d}(t_n) = \sum_{j=1}^p \boldsymbol{\varphi}_j \boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{f}_0 \boldsymbol{\alpha}_j(t_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, (N-1) \quad (7-5.13)$$

Com o estabelecimento de T_0 e de N , determina-se Δt . A extensão ΔT contida em T_0 deve atender ao indicado na [Equação 7-3.78](#), para que não ocorram condições iniciais espúrias, e o espaçamento Δt deve atender ao estabelecido na [Equação 7-3.77](#) (com a substituição de t_n pelo p -ésimo período natural de vibração), para uma adequada representação do conteúdo de frequência da função $f(t)$. Condições iniciais podem ser levadas em conta com base na [Equação 6-2.5](#) e no que foi apresentado na [Subseção 7-3.5](#).

Essa resolução tem o algoritmo que se segue.³⁴

³⁴ É oportuno relembrar a possibilidade de resolução das equações modais por segmentos lineares da força modal, com o algoritmo que foi apresentado na Subseção 3-7.2, que leva em conta as condições iniciais, além de ser recursivo, com pequeno número de operações aritméticas. Contudo, não se pode afirmar que essa resolução seja sempre computacionalmente superior à da análise no domínio da frequência e sim, que essa resolução é muito eficaz e mais simples do que a dessa análise.



ALGORITMO 7-5.1 Resolução das equações modais no domínio da frequência.

Em cada equação modal, pode-se utilizar a formulação matricial que foi apresentada na Seção 7-4. No caso, com a imposição de que a matriz de transformada implícita seja triangular inferior, elimina-se a periodicidade devida à discretização da *transformada de Fourier*, o que dispensa a tradicional extensão de período.

7-5.2 Resolução direta

Com forças externas quaisquer, o sistema global das equações de movimento com amortecimento viscoso pode ser escrito como:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{d}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{d}(t) = \sum_{j=1}^J \mathbf{f}_j f_j(t) \quad (7-5.14)$$

onde \mathbf{f}_j é a j -ésima distribuição espacial de forças nodais externas, $f_j(t)$ é a correspondente função do tempo e J é o número de parcelas necessárias à composição daquelas forças.

A solução desse sistema pode ser obtida com a superposição das soluções dos sistemas:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}_j(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{d}}_j(t) + \mathbf{K}\mathbf{d}_j(t) = \mathbf{f}_j f_j(t), \quad j = 1, 2, \dots, J \quad (7-5.15)$$

Em caso de função $f_j(t)$ periódica, esta pode ser decomposta em *série de Fourier* e, em caso de $f_j(t)$ aperiódica, ser decomposta em um espectro discreto de componentes harmônicos com base em *transformada de Fourier discreta*.

Para o caso elementar da função ($f_j(t) = \cos(\omega t)$), escreve-se:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}_j(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{d}}_j(t) + \mathbf{K}\mathbf{d}_j(t) = \mathbf{f}_j \cos(\omega t) = \mathbf{f}_j \operatorname{Re}(e^{i\omega t}) \quad (7-5.16)$$

Esse sistema, semelhantemente à [Equação 7-3.6](#), tem a solução em regime permanente:

$$\mathbf{d}_j(t) = \text{Re}(\mathbf{U}_j(i\omega) e^{i\omega t}) \quad (7-5.17)$$

onde $\mathbf{U}_j(i\omega)$ é o *vetor solução no domínio da frequência*, constituído de amplitudes complexas.

Com essa solução, sem indicação de parte real, por simplicidade, o sistema de equações diferenciais anterior recai no seguinte sistema de equações algébricas complexas:

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K}) \mathbf{U}_j(i\omega) e^{i\omega t} = \mathbf{f}_j e^{i\omega t} \rightarrow (-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K}) \mathbf{U}_j(i\omega) = \mathbf{f}_j \quad (7-5.18)$$

Assim, com a notação de *matriz de impedância*:

$$\mathbf{I}(i\omega) = -\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K} \quad (7-5.19)$$

obtem-se solução do sistema anterior:

$$\mathbf{U}_j(i\omega) = \mathbf{I}(i\omega)^{-1} \mathbf{f}_j \rightarrow \mathbf{U}_j(i\omega) = \mathbf{H}(i\omega) \mathbf{f}_j \quad (7-5.20)$$

em que $(\mathbf{H}(i\omega) = \mathbf{I}(i\omega)^{-1})$ é denominado *matriz de receptância*.

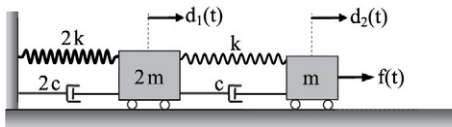
Logo, chega-se à solução no domínio do tempo:³⁵

$$\mathbf{d}_j(t) = \text{Re}(\mathbf{I}(i\omega)^{-1} \mathbf{f}_j e^{i\omega t}) \quad (7-5.21)$$

EXEMPLO 7-5.1

O oscilador duplo mostrado na [Figura E7-5.1a](#) tem o sistema de equações

$$\begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{d}_1 \\ \ddot{d}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 3c & -c \\ -c & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{d}_1 \\ \dot{d}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 3k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ f(t) \end{Bmatrix}$$



$$\begin{cases} k = 200 \text{ kN/m} \\ m = 800 \text{ kg} \\ c = 2 \text{ kN} \cdot \text{m/s} \\ f(t) = 6 \cos(30t) \text{ kN} \end{cases}$$

FIGURA E7-5.1a Oscilador duplo amortecido sob força harmônica.

Comparam-se as respostas desse oscilador obtidas através da presente análise no domínio da frequência e por *integração direta de Newmark*.

³⁵ Importa observar que, em caso de sistema não amortecido, a presente resolução recai na que foi apresentada na Seção 6-1, em que não há variável complexa.

A matriz de impedância e a matriz de receptância têm as seguintes formas:

$$\mathbf{I}(i\omega) = 10^4 \begin{bmatrix} -84 + 18i & -20 - 6i \\ -20 - 6i & -52 + 6i \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}(i\omega) = 10^{-6} \begin{bmatrix} -1,1814 + 0,3554i & 0,3769 + 0,3165i \\ 0,3769 + 0,3165i & -1,9860 - 0,3944i \end{bmatrix}$$

Com essa última matriz e o vetor de distribuição espacial de forças nodais externas, obtém-se o vetor solução no domínio da frequência:

$$\mathbf{U}(i\omega) = \begin{Bmatrix} 2,2612 \cdot 10^{-3} + 1,8991 \cdot 10^{-3}i \\ -0,01192 - 2,3662 \cdot 10^{-3}i \end{Bmatrix}$$

A [Figura E7-5.1b](#) apresenta os históricos do primeiro deslocamento e a que lhe é consecutiva apresenta os históricos do segundo deslocamento. Em linha contínua estão representadas as soluções com a *integração direta de Newmark*, que atendem a condições iniciais nulas. Em linha pontilhada estão representadas as soluções da análise no domínio da frequência que considera a força $f(t)$ de fato como periódica. Observa-se que a partir do terceiro segundo e meio, as representações gráficas estão praticamente coincidentes.

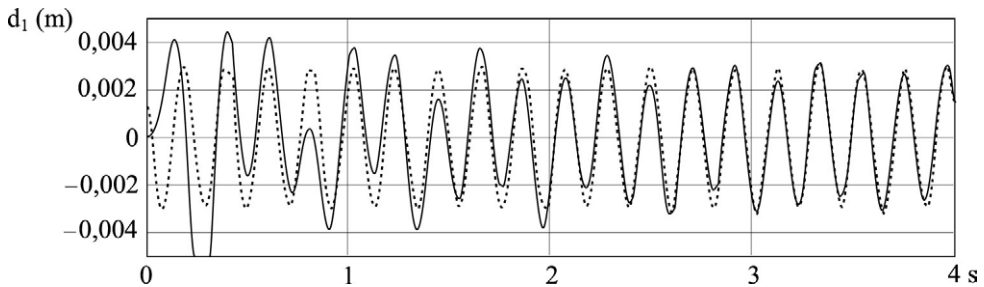


FIGURA E7-5.1b Históricos do primeiro deslocamento.

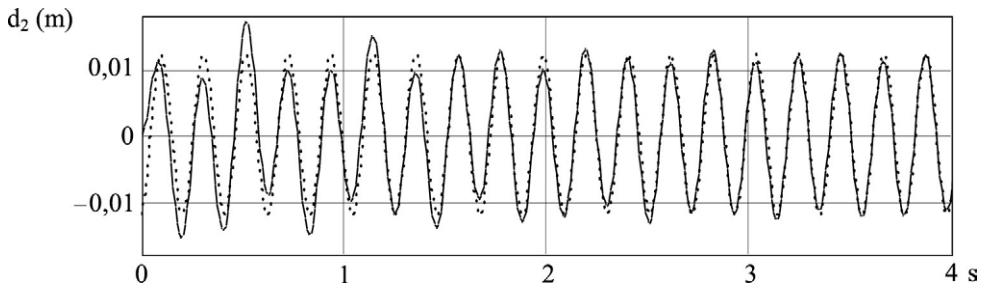


FIGURA E7-5.1c Históricos do segundo deslocamento.

EXEMPLO 7-5.2

Considera-se a viga biapoada do Exemplo 6-1.1, reproduzida na [Figura E7-5.2a](#). Compara-se o histórico da seção média obtido com o presente desenvolvimento de análise no domínio da frequência com o correspondente histórico determinado através das equações modais resolvidas no domínio do tempo.

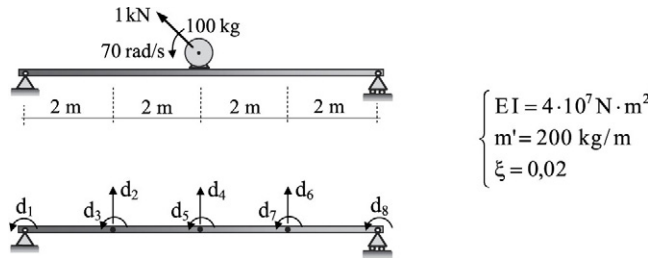


FIGURA E7-5.2a Viga biapoia de suporte a um motor desbalanceado.

As matrizes **K** e **M** foram apresentadas no Exemplo 6-1.1.

Com base no procedimento de superposição dos amortecimentos modais desenvolvido na Subseção 6-3.1.2 e com o estabelecimento do amortecimento ($\xi = 0,02$) para todos os modos naturais de vibração, obtém-se a matriz de amortecimento global:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1095,9 & -455,07 & -218,90 & -2,1792 & -13,867 & 8,5084 & -6,6791 & -1,1730 \\ . & 4538,9 & 50,437 & -2411,4 & 463,58 & 88,300 & -50,437 & -8,5084 \\ . & . & 2208,5 & -540,55 & -225,58 & 50,437 & -46,865 & -6,6791 \\ . & . & . & 4959,3 & \approx 0 & -2411,4 & 540,55 & 2,1792 \\ . & . & . & . & 2189,4 & -463,58 & -222,58 & -13,867 \\ . & . & . & . & . & 4538,9 & -50,437 & 455,07 \\ . & . & . & . & . & . & 2208,5 & -218,90 \\ \text{sim.} & . & . & . & . & . & . & 1095,9 \end{bmatrix}$$

A Equação 7-5.19 fornece a matriz de impedância, cujas três primeiras colunas estão apresentadas a seguir:

$$\mathbf{I}(\omega) = \begin{bmatrix} 7,993 \cdot 10^7 + 7,671i \cdot 10^4 & -6,012 \cdot 10^7 - 3,186i \cdot 10^4 & 4,006 \cdot 10^7 - 1,532i \cdot 10^4 & \\ -6,012 \cdot 10^7 - 3,186i \cdot 10^4 & 1,185 \cdot 10^8 + 3,177i \cdot 10^5 & 3,531i \cdot 10^3 & \\ 4,006 \cdot 10^7 - 1,532i \cdot 10^4 & 3,531i \cdot 10^3 & 1,599 \cdot 10^8 + 1,546i \cdot 10^5 & \\ -1,525 \cdot 10^2 & -6,025 \cdot 10^7 - 1,688i \cdot 10^5 & -6,012 \cdot 10^7 - 3,783i \cdot 10^4 & \dots \\ -9,707i \cdot 10^2 & 6,012 \cdot 10^7 + 3,245i \cdot 10^4 & 4,006 \cdot 10^7 - 1,579i \cdot 10^4 & \\ 5,956i \cdot 10^2 & 6,181i \cdot 10^3 & 3,53i \cdot 10^3 & \\ -4,675i \cdot 10^2 & -3,531i \cdot 10^3 & -3,281i \cdot 10^3 & \\ -8,211i \cdot 10 & -5,956i \cdot 10^2 & -4,675i \cdot 10^2 & \end{bmatrix}$$

A inversão dessa matriz é a matriz de receptância, com a qual, e com o vetor de distribuição espacial das forças nodais externas, obtém-se, através da Equação 7-5.20, o vetor solução no domínio da frequência:

$$\mathbf{U}(\omega) = \begin{bmatrix} 6,077 \cdot 10^{-4} + 1,640i \cdot 10^{-4} \\ 1,093 \cdot 10^{-3} + 2,959i \cdot 10^{-4} \\ 4,287 \cdot 10^{-4} + 1,168i \cdot 10^{-4} \\ 1,545 \cdot 10^{-3} + 4,199i \cdot 10^{-4} \\ 0 \\ 1,094 \cdot 10^{-3} + 2,958i \cdot 10^{-4} \\ -4,287 \cdot 10^{-4} - 1,168i \cdot 10^{-4} \\ -6,077 \cdot 10^{-4} - 1,640i \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}$$

Com esse vetor, a Equação 7-5.21 fornece a solução $\mathbf{d}(t)$.

A Figura E7-5.2b mostra os históricos do deslocamento da seção transversal média da viga, de zero a 2 s. Em linha contínua, está representada a solução obtida com a *superposição modal completa* em resolução no domínio do tempo, que atende a condições iniciais nulas. Em linha pontilhada, está representada a solução com a presente análise no domínio da frequência que considera a ação externa como periódica e, portanto, não atende àquelas condições. Observa-se grande proximidade de representações na proximidade de 2 s, o que significa início de resposta em regime permanente.

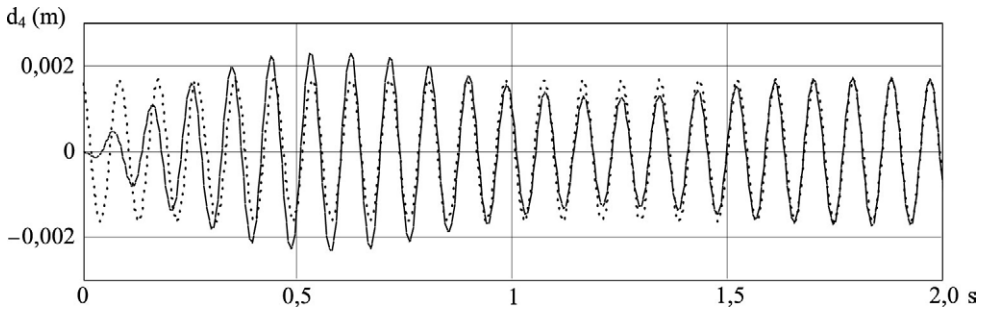


FIGURA E7-5.2b Históricos do deslocamento da seção média.

Considera-se, a seguir, o caso de função aperiódica $f_j(t)$. Com a aplicação da *transformada de Fourier* ao j -ésimo sistema expresso na Equação 7-5.15, escreve-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}_j(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{d}}_j(t) + \mathbf{K}\mathbf{d}_j(t)) &= \mathbf{T}(\mathbf{f}_j f_j(t)) \\ \rightarrow (-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K}) \mathbf{T}(\mathbf{d}_j(t)) &= \mathbf{f}_j \mathbf{T}(f_j(t)) \equiv \mathbf{f}_j F_j(i\omega) \rightarrow \mathbf{I}(i\omega) \mathbf{T}(\mathbf{d}_j(t)) = \mathbf{f}_j F_j(i\omega) \\ \rightarrow \mathbf{T}(\mathbf{d}_j(t)) &= \mathbf{I}(i\omega)^{-1} \mathbf{f}_j F_j(i\omega) \rightarrow \mathbf{T}(\mathbf{d}_j(t)) = \mathbf{H}(i\omega) \mathbf{f}_j F_j(i\omega) \end{aligned} \quad (7-5.22)$$

Logo, com a notação de vetor solução no domínio da frequência:

$$\mathbf{U}_j(i\omega) = \mathbf{H}(i\omega) \mathbf{f}_j F_j(i\omega) \quad (7-5.23)$$

tem-se o vetor solução no domínio do tempo

$$\mathbf{d}_j(t) = \mathcal{T}^{-1}(\mathbf{U}_j(i\omega)) \quad (7-5.24)$$

Em resolução numérica, considera-se que a função aperiódica $f_j(t)$ seja definida na duração de tempo ($T_0 = N\Delta t$), nos instantes t_0, t_1, \dots, t_{N-1} , de maneira a se ter a *transformada de Fourier discreta*:

$$F_j(i\omega_q) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} f_j(t_n) e^{-i2\pi q n/N}, \quad q=0, 1, 2, \dots, (N-1) \quad (7-5.25)$$

em que se utiliza a frequência discreta ($\omega_q = 2\pi q/T_0$).

Para cada frequência ω_q , escreve-se a matriz de impedância:

$$\mathbf{I}(i\omega_q) = -\omega_q^2 \mathbf{M} + i\omega_q \mathbf{C} + \mathbf{K} \quad (7-5.26)$$

que define a *matriz de receptância*:

$$\mathbf{H}(i\omega_q) = \mathbf{I}(i\omega_q)^{-1} \quad (7-5.27)$$

Além disso, em semelhança à [Equação 7-5.23](#), têm-se os vetores solução no domínio da frequência:

$$\mathbf{U}_j(i\omega_q) = \mathbf{H}(i\omega_q) \mathbf{f}_j F_j(i\omega_q), \quad q = 0, 1, 2, \dots (N-1) \quad (7-5.28)$$

cujo ℓ -ésimo termo se escreve:

$$U_{\ell(j)}(i\omega_q) = \sum_{k=1}^m H_{\ell k}(i\omega_q) f_{k(j)} F_j(i\omega_q), \quad q = 0, 1, 2, \dots (N-1) \quad (7-5.29)$$

onde m é o número de graus de liberdade.

Logo, obtém-se o ℓ -ésimo termo do vetor solução no domínio do tempo:

$$d_{\ell(j)}(t_n) = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \sum_{q=0}^{N-1} U_{\ell(j)}(i\omega_q) e^{i2\pi q n/N} \equiv \mathcal{T}\mathcal{D}^{-1}(U_{\ell(j)}(i\omega_q)), \quad n = 0, 1, 2, \dots (N-1) \quad (7-5.30)$$

Finalmente, com a superposição das soluções de deslocamento dos J sistemas de equações de movimento expressos na [Equação 7-5.14](#), obtém-se a solução completa:

$$d_{\ell}(t_n) = \sum_{j=1}^J d_{\ell(j)} \quad , \quad \ell = 0, 1, 2, \dots m \quad (7-5.31)$$

Em caso de um único vetor de distribuição espacial de forças nodais \mathbf{f} , a presente análise tem o algoritmo que se segue.

– Especificação de T_o , N , \mathbf{f} e de $\mathbf{f}(t_n)$, com n variando de 0 a $(N-1)$.

– Construção das matrizes \mathbf{K} , \mathbf{M} e \mathbf{C} .

$\mathbf{F}(i\omega_q) = \mathcal{T}\mathcal{D}(\mathbf{f}(t_n))$, $q = 0, 1, 2, \dots (N-1)$

→ $q = 0, 1, 2, \dots (N-1)$

$\omega_q = 2\pi q / T_o$

$\mathbf{I}(i\omega_q) = -\omega_q^2 \mathbf{M} + i\omega_q \mathbf{C} + \mathbf{K}$

$\mathbf{H}(i\omega_q) = \mathbf{I}(i\omega_q)^{-1}$

$\mathbf{U}(i\omega_q) = \mathbf{H}(i\omega_q) \mathbf{f} F(i\omega_q)$

→ $\ell = 1, 2, \dots m$

$d_{\ell}(t_n) = \mathcal{T}\mathcal{D}^{-1}(U_{\ell}(i\omega_q))$, $n = 0, 1, 2, \dots (N-1)$

ALGORITMO 7-5.1 Resolução direta no domínio da frequência com modelo de multigraus.

Nesta análise não há como se tirar partido das características de esparsidade das matrizes de rigidez e de massa e ocorre a inversão de uma matriz de impedância para cada uma das frequências discretas, o que requer processamento computacional excessivo, em caso de modelo de muitos graus de liberdade.³⁶ Também é necessário incluir uma extensão ΔT nas sequências de $f_j(t_n)$, além do que, o procedimento de consideração das condições iniciais apresentado na [Subseção 7-3.5](#) não se aplica.

EXEMPLO 7-5.3

O oscilador duplo do Exemplo 7-5.1 é agora considerado sob a força de impacto representada na [Figura E7-5.3a](#). Compara-se a resposta de deslocamento desse oscilador obtida através da presente análise no domínio da frequência, com a resposta obtida por *integração direta de Newmark*.

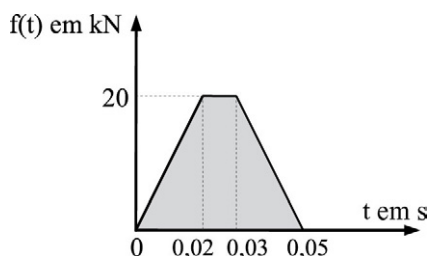


FIGURA E7-5.3a Força de impacto.

Adotam-se os parâmetros de discretização ($T_0 = 10$ s) e ($N = 2^{11}$), que corresponde à *frequência de Nyquist*:

$$\omega_{N/2} = \frac{\pi N}{T_0} = 643,4 \text{ rad/s}$$

A [Figura E7-5.3b](#) mostra o espectro de amplitudes da *transformada de Fourier discreta* da força externa, que evidencia adequada discretização.

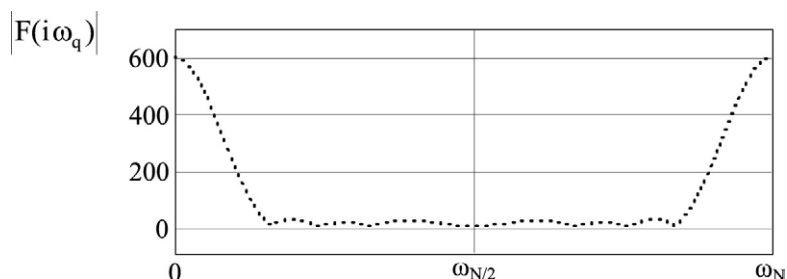


FIGURA E7-5.3b Espectro de amplitudes da *transformada de Fourier*.

³⁶ Clough & Penzien (1993) propuseram efetuar essa inversão apenas em reduzido número de valores de ω_q igualmente espaçados e utilizar um procedimento de interpolação para obter as respostas nos valores intermediários de frequências.

A [Figura E7-5.3c](#) apresenta os históricos do primeiro deslocamento do oscilador duplo e a que lhe é consecutiva mostra os históricos do correspondente segundo deslocamento. As representações em linha contínua dizem respeito à integração numérica direta e as representações em linha pontilhada, à da análise no domínio da frequência. Vê-se perfeita coincidência gráfica de representações, o que valida a forma de implementação dessa análise.

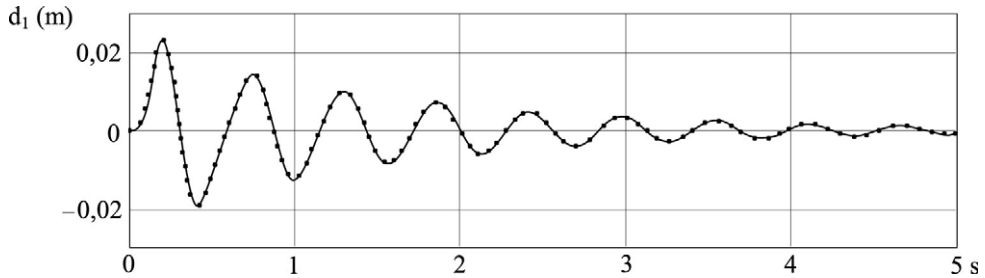


FIGURA E7-5.3c Históricos do primeiro deslocamento.

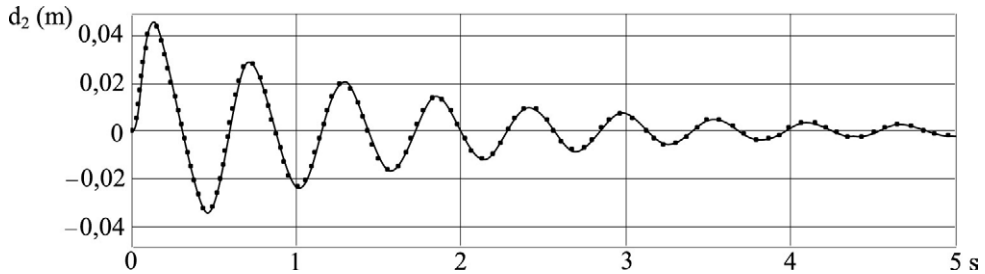


FIGURA E7-5.3d Históricos do segundo deslocamento.

Na formulação anterior foi adotada separação entre distribuições espaciais das forças externas e funções do tempo. No que se segue, estende-se a análise no domínio da frequência de modelo de m graus de liberdade para o caso em que não se considera essa separação. Para isso, escreve-se o vetor de forças externas sob a forma:

$$\mathbf{f}(t) = \sum_{j=1}^m \mathbf{I}_j f_j(t) \quad (7-5.32)$$

em que \mathbf{I}_j é um vetor em que o j -ésimo coeficiente é igual à unidade e os demais coeficientes são nulos. $f_j(t)$ é a função força aplicada ao j -ésimo grau de liberdade.

A partir da [Equação 7-5.24](#), escreve-se a solução de deslocamentos para o vetor de forças anterior:

$$\mathbf{d}(t) = \sum_{j=1}^m \mathcal{T}^{-1}(\mathbf{U}_j(i\omega)) = \mathcal{T}^{-1} \sum_{j=1}^m \mathbf{U}_j(i\omega) \quad (7-5.33)$$

E tendo-se em conta a [Equação 7-5.23](#), essa solução toma a forma:

$$\mathbf{d}(t) = \mathcal{T}^{-1} \sum_{j=1}^m (\mathbf{H}(i\omega) \mathbf{I}_j F_j(i\omega)) = \mathcal{T}^{-1} \left(\mathbf{H}(i\omega) \sum_{j=1}^m \mathbf{I}_j F_j(i\omega) \right) \quad (7-5.34)$$

Adota-se, agora, a notação de vetor das *transformadas de Fourier* das m forças nodais externas:

$$\mathbf{F}(i\omega) = \sum_{j=1}^m \mathbf{I}_j F_j(i\omega) \quad (7-5.35)$$

Logo, escreve-se a solução de deslocamentos sob a forma mais compacta:

$$\mathbf{d}(t) = \mathcal{T}^{-1}(\mathbf{U}(i\omega)) \quad (7-5.36)$$

em que se tem o vetor solução no domínio da frequência:

$$\mathbf{U}(i\omega) = \mathbf{H}(i\omega) \mathbf{F}(i\omega) \quad (7-5.37)$$

Para o caso de resolução discreta, escreve-se:

$$\mathbf{U}(i\omega_q) = \mathbf{H}(i\omega_q) \mathbf{F}(i\omega_q), \quad q = 0, 1, 2, \dots, (N-1) \quad (7-5.38)$$

em que a matriz de receptância $\mathbf{H}(i\omega_q)$ é calculada como expresso na [Equação 7-5.27](#) e em que se utiliza o j -ésimo coeficiente de $\mathbf{F}(i\omega_q)$, como consta na [Equação 7-5.25](#).

Assim, o ℓ -ésimo coeficiente da solução no domínio da frequência tem a forma:

$$U_\ell(i\omega_q) = \sum_{k=1}^m H_{\ell k}(i\omega_q) F_k(i\omega_q), \quad q = 0, 1, 2, \dots, (N-1) \quad (7-5.39)$$

onde o coeficiente $H_{\ell k}$ da matriz de receptância é a função que relaciona a resposta no domínio da frequência correspondente ao ℓ -ésimo grau de liberdade com a *transformada de Fourier* da força aplicada segundo o k -ésimo grau de liberdade.

Logo, o ℓ -ésimo coeficiente da solução no domínio da frequência toma a forma

$$d_\ell(t_n) = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \sum_{q=1}^{N-1} U_\ell(i\omega_q) e^{i2\pi q n/N} \equiv \mathbf{T} \mathbf{D}^{-1}(U_\ell(i\omega_q)), \quad n = 0, 1, 2, \dots, (N-1) \quad (7-5.40)$$

7-6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Uma questão que se coloca é: *Que análise utilizar, a do domínio do tempo ou a do domínio da frequência?*

Não é possível uma resposta geral e peremptória, porque essa escolha depende de cada caso em si, de facilidades do programa automático disponível e de predileção do analista, mas cabe reunir considerações quanto a essa questão.

Os principais argumentos apresentados a favor da análise no domínio da frequência são: expressar em seu desenvolvimento *standard* o conteúdo de frequência da ação externa³⁷ e ser a indicada em caso de propriedades dependentes da frequência, como com *amortecimento*

³⁷ Esse conteúdo é obtido com a *transformada de Fourier*, cujo espectro de amplitudes fornece uma indicação do comportamento dinâmico e do número de modos naturais de vibração a considerar em transformação modal de coordenadas.

estrutural e em interação solo-estrutura ou interação fluido-estrutura. Entretanto, o referido conteúdo pode ser obtido independentemente de se optar por análise no domínio da frequência, e as referidas interações fogem ao escopo deste livro. Já quanto ao amortecimento, seguem os comentários:

1. O fenômeno da dissipação de energia em vibração de estrutura é muito complexo, devido às suas diversas causas e porque depende do material, do nível de amplitude das oscilações, dos componentes não estruturais agregados à estrutura, além da presença humana e do fluido circundante.
2. O *amortecimento estrutural* é a idealização da dissipação de energia em atrito interno ao material que atua em comportamento elástico sob tensões cíclicas harmônicas simples. Esse atrito é um fenômeno microscópico, enquanto as equações de movimento das estruturas descrevem comportamento macroscópico. Além disso, qualquer medição experimental de amortecimento em uma estrutura inclui as diversas causas de dissipação de energia, e não apenas a dissipação devida àquele atrito.
3. Como experimentos físicos mostram que a energia dissipada em vibração harmônica praticamente independe da frequência forçante, a crítica recorrente ao *amortecimento viscoso* é ter expressão de dissipação de energia dependente dessa frequência. Já com o *amortecimento estrutural*, a correspondente expressão é independente dessa frequência, o que é argumentado a favor desse amortecimento.
4. Contudo, não há comprovação experimental de que o *amortecimento estrutural* possa ser utilizado em caso de ação externa aperiódica e em comportamento inelástico com um grau de liberdade. A questão é ainda mais controverso quanto ao estabelecimento de um único valor para esse amortecimento em caso de modelo de multigraus de liberdade, sob ações aperiódicas, em comportamento elástico ou não.
5. Embora o *amortecimento viscoso* (linear) tenha expressão matemática que não corresponde fisicamente ao conjunto das causas de dissipação de energia em estrutura, medições experimentais caracterizam um coeficiente viscoso equivalente ao fenômeno como um todo. Além do que, está disponível um grande número de resultados de medições experimentais desse amortecimento, que podem ser utilizados em equações de movimento de resolução muito mais simples do que no caso do *amortecimento estrutural*.

Assim, o *amortecimento estrutural* é raramente utilizado e, em caso de disponibilização de um valor desse amortecimento para uma dada estrutura, é prático utilizar a sua equivalência ao *amortecimento viscoso*, $\xi_{eq} = \eta/2$, e efetuar a análise no domínio do tempo.

Com *amortecimento viscoso*, a menos que se queira obter o conteúdo de frequência das ações externas, não há vantagem aparente de se utilizar análise no domínio da frequência, dado que:

1. A resolução numérica nesse domínio não é recursiva.
2. A análise no domínio da frequência requer grande cuidado na discretização da ação externa, para bem representar o conteúdo de frequência dessa ação. Requer também atenção para que não sejam introduzidas condições iniciais espúrias oriundas da periodização da *transformada de Fourier discreta*.

3. A forma *standard* dessa análise de oscilador simples não inclui o efeito de condições iniciais.
4. A formulação matricial dessa análise, em caso de oscilador simples viscoso, recai em resolução no domínio do tempo, não recursiva.
5. A simulação numérica mais geral e eficaz de não linearidade é através de *integração numérica direta* das equações de movimento em análise no domínio do tempo.³⁸

A análise dinâmica no domínio da frequência é a indicada em caso de propriedades físicas definidas em forma complexa. Neste capítulo, essa análise foi apresentada nas formas *standard* e matricial, com amplo detalhamento e investigação do controle das correspondentes aproximações.

A formulação matricial, aplicável a oscilador simples, reduz parte das desvantagens da formulação *standard*, mas não explicita o conteúdo de frequência da ação externa, que é uma vantagem da análise no domínio da frequência. Essa formulação, em caso de amortecimento viscoso, recai na tradicional análise no domínio do tempo.

Foi esclarecida a limitação de uso do *amortecimento estrutural* e apresentada a sua equivalência ao *amortecimento viscoso*, que possibilita análise no domínio do tempo, simples e de bons resultados.

Não se pode afirmar que, em caso de oscilador simples, a análise no domínio do tempo seja computacionalmente superior à do domínio da frequência, mas ficou evidente que essa última requer mais atenção de uso do que a primeira.

Foi também esclarecido que, em caso de modelo de múltiplos graus de liberdade e de *amortecimento proporcional*, a análise no domínio da frequência se aplica com eficiência (através de *transformadas de Fourier rápidas*) às equações modais. Mas ficou evidente que a resolução direta nesse domínio, em caso de elevado número de graus de liberdade, requer excessivo processamento computacional, o que inviabiliza essa resolução na prática.

7-7 EXERCÍCIOS PROPOSTOS

- 7-7.1** Determine a *transformada de Fourier contínua* da função representada na [Figura 7-7.1a](#) e represente as correspondentes parte real e parte imaginária, além do espectro de amplitudes.

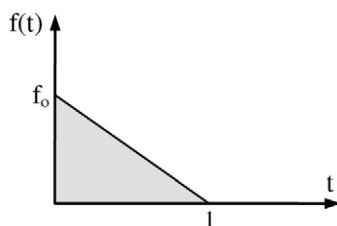


FIGURA 7-7.1a Função rampa descendente.

³⁸ A análise no domínio da frequência é um método de superposição e, portanto, não é própria para o tratamento de não linearidades. Contudo, são encontrados, na literatura, diversos procedimentos de simulação de comportamento não linear aplicáveis a casos particulares de modelos de reduzido número de graus de liberdade.

7-7.2 Para a discretização da função $(f(t) = 10^4(e^{-10t} - e^{-70t}))$ no caso de $(T_0 = 5s)$ e $(N = 2^9)$, obtenha as representações da parte real e da parte imaginária da *transformada de Fourier*, assim como do espectro de amplitudes dessa transformada.

7-7.3 A resolução do Exercício Proposto 3-9.10 fornece a seguinte solução analítica de deslocamento para o oscilador simples subamortecido sob a força $(f(t) = f_0 e^{-\alpha t})$:

$$u(t) = \frac{f_0}{m\omega_a} \frac{\omega_a e^{-\alpha t} + ((\alpha - \xi \omega_n) \sin(\omega_a t) - \omega_a \cos(\omega_a t)) e^{-\xi \omega_n t}}{\alpha^2 - 2\alpha \xi \omega_n + \xi^2 \omega_n^2 + \omega_a^2}$$

Para o oscilador simples de propriedades $(k = 7.10^4 \text{ N/m})$, $(m = 10^3 \text{ kg})$, $(\xi = 0,04)$ e submetido à força $(f(t) = 10^4(e^{-10t} - e^{-70t}))$ em newtons, determine os históricos de deslocamento com base na referida solução e com base no [Algoritmo 7-3.1](#) de resolução no domínio da frequência. Utilize:

- Discretização com $(T_0 = 10,24 \text{ s})$ e $(N = 2^{11})$. Confirme os históricos obtidos com o [Algoritmo 7-4.1](#), nos dez primeiros segundos.
- Discretização com $(T_0 = 4,094 \text{ s})$ e $(N = 2^{11})$. Obtenha os históricos nos dois primeiros segundos.
- A discretização anterior, juntamente com a correção de condições iniciais espúrias, através da [Equação 7-3.79](#). Faça a mesma representação de históricos que no caso anterior.

7-8 QUESTÕES PARA REFLEXÃO

- 7-8.1** Qual é a diferença fundamental entre *análise no domínio do tempo* e *análise no domínio da frequência*? Em que circunstâncias cada uma dessas análises se mostra indicada? Essa indicação é excludente?
- 7-8.2** Por que se diz que a análise no domínio da frequência se baseia em superposição? E os métodos de análise no domínio do tempo se baseiam em superposição ou não? Como exemplificar?
- 7-8.3** O que expressa uma *série de Fourier*? Qual é a utilidade dessa série em análise dinâmica de estruturas?
- 7-8.4** O que é o *par de transformadas de Fourier*? Qual é a utilidade dessas transformadas em análise dinâmica de estruturas?
- 7-8.5** O que são as *transformadas de Fourier discretas*? Por que utilizar essas transformadas em lugar das correspondentes transformadas contínuas? Quais são as peculiaridades dessas transformadas?
- 7-8.6** O que são as *transformadas de Fourier rápidas*? Qual é a importância dessas transformadas?
- 7-8.7** O que significa *conteúdo de frequência* de uma função aperiódica? Por que é útil conhecer esse conteúdo em caso de força externa aplicada a uma estrutura?
- 7-8.8** Como explicar o *amortecimento viscoso* e o *amortecimento estrutural*? Quais são as vantagens e desvantagens de cada um desses amortecimentos?

- 7-8.9** O que é uma *função complexa de resposta em frequência*? Qual é a diferença dessa função nos casos do *amortecimento viscoso* e do *amortecimento estrutural*?
- 7-8.10** Quando e por que utilizar *amortecimento viscoso equivalente* ao *amortecimento estrutural*? Em que se baseia essa equivalência?
- 7-8.11** O que é o *impulso unitário*? Qual é a relação entre a resposta no domínio do tempo ao impulso unitário centrado na origem e a função de transferência? Essa relação se aplica em que concepção de amortecimento?
- 7-8.12** Por que se adota uma extensão de tempo em definição da força externa em análise discreta *standard* no domínio da frequência? É possível prescindir dessa extensão no caso do oscilador simples? Como? E no caso de modelo de múltiplos graus de liberdade?
- 7-8.13** Como controlar as aproximações introduzidas com a discretização das *transformadas de Fourier* em análise dinâmica das estruturas?
- 7-8.14** O que é e o que expressa a *frequência de Nyquist*? Como utilizar essa frequência em análise dinâmica de uma estrutura?
- 7-8.15** Por que, em análise *standard* de oscilador simples no domínio da frequência, condições iniciais ao movimento não são incluídas? Como incluir, em análise nesse domínio, o efeito dessas condições? E no caso de modelo de múltiplos graus de liberdade, o que fazer?
- 7-8.16** Em que consiste a análise com a *transformada de Fourier implícita*? Quais são as vantagens e desvantagens dessa transformada?
- 7-8.17** Por que, com amortecimento viscoso, a formulação matricial da análise no domínio da frequência de oscilador simples recai em resolução discreta que pode ser obtida a partir da *integral de Duhamel*? Essa resolução se mostra vantajosa? Por quê?
- 7-8.18** Por que a resolução no domínio da frequência de modelo de múltiplos graus de liberdade, sem o uso de *transformação modal de coordenadas*, oferece dificuldade de processamento? E por que não ocorre essa dificuldade com essa transformação de coordenadas?



CAPÍTULO 8

Análise Sísmica

POR QUE E COMO EFETUAR UMA ANÁLISE SÍSMICA DE ESTRUTURA?

O sismo é uma ação dinâmica que tem grande poder destrutivo nos países vizinhos ao Brasil, ao longo da Cordilheira dos Andes, e em diversas outras regiões do Globo. Felizmente, no país, a sismicidade é muito reduzida em quase todo o território. Contudo, devido aos desafios da globalidade da formação do engenheiro, não se pode ignorar o sismo como uma importante ação a ser de conhecimento dos engenheiros civis projetistas nacionais. Além do que, mesmo no país, é necessário considerar essa ação em obras de grande magnitude, como instalações nucleares, hidroelétricas e sistemas de exploração de petróleo.

Pelo fato de os sismos mais intensos serem ações excepcionais de longo período de retorno e terem caráter aleatório, as estruturas sismorresistentes são usualmente projetadas com a capacidade de dissipação de energia em regime inelástico, com danos aceitáveis em função da importância das mesmas e com a condição de preservação de vidas. Entretanto, devido à complexidade de análise nesse regime e à impossibilidade de prever e quantificar com segurança os sismos futuros, análises determinísticas elásticas lineares são amplamente utilizadas a partir de dados de uma “média” de ações sísmicas passadas, considerando a amplificação sísmica do solo e o tipo e função social da edificação. Os resultados dos esforços internos, assim obtidos, são reduzidos por um coeficiente com o fito de transformá-los em prováveis resultados de análises não lineares físicas.

Os códigos normativos de projeto possibilitam análises determinísticas com forças estáticas horizontais equivalentes para as estruturas usuais em locais de sismos de pequena intensidade e recomendam análises dinâmicas em regiões de sismos de maior relevância.

Uma análise sísmica determinística pode ser realizada com a imposição de *acelerogramas sísmicos* à base da estrutura, para então se efetuar a resolução das equações de movimento. Pode também ser levada a efeito através de *espectros de resposta* obtidos a partir daqueles acelerogramas, com a obtenção de soluções máximas de equações modais, para posterior combinação dessas soluções em estimativas de respostas extremas da estrutura. O primeiro desses procedimentos é o mais geral e consistente. Contudo, o segundo procedimento é o mais utilizado em projeto das edificações usuais, devido à simplicidade, maior facilidade de definição da ação sísmica e por requerer processamento menos extenso.

Esse contexto de especificação da ação sísmica e do desenvolvimento das correspondentes análises merece grande detalhamento e é objeto de literatura especializada.¹ Entretanto, este capítulo apresenta uma abordagem sucinta, mas esclarecedora o suficiente para o entendimento da ação sísmica, dos códigos normativos de projeto e dos principais métodos de análise. Isso está apresentado na seguinte estruturação de seções:

- 8-1** Descrição do significado dos termos relevantes relativos a sismos.
- 8-2** Apresentação de esclarecimentos quanto à origem e caracterização das ações sísmicas.
- 8-3** Conceituação e obtenção dos *espectros de resposta do deslocamento relativo*, da *pseudovelocidade relativa* e da *pseudoaceleração absoluta*. Esses espectros são que expressam valores máximos devido à aplicação de acelerograma sísmico ao suporte de osciladores simples, com diferentes períodos e valores de amortecimento viscoso.
- 8-4** Apresentação de orientações de concepção de edifícios sismorresistentes e descrição das correspondentes análises através de *forças estáticas equivalentes*, de *espectros de resposta* e de *históricos de aceleração*.
- 8-5** Detalhamento da análise sísmica de estruturas submetidas a ações múltiplas nos apoios.
- 8-6** Sugestão de exercícios para resolução.
- 8-7** Proposição de questões para reflexão.

8-1 TERMINOLOGIA

A literatura de análise sísmica de estruturas tem termos próprios importantes de serem esclarecidos para contextualizar essa análise. Seguem os termos mais relevantes:

Acelerograma – Representação gráfica ou digitalizada da variação temporal da aceleração de um sismo, que depende da distância da estrutura ao epicentro e das características locais do solo.

Acelerômetro – Equipamento captador de sinais de aceleração, geralmente elétricos.

Distância epicentral – Distância entre o epicentro e a estação de medida sismológica na superfície terrestre.

Edificações sismorresistentes – Construções projetadas para resistir às ações sísmicas estabelecidas por códigos normativos, de maneira a preservar vidas humanas e com danos reparáveis.

Epicentro – Ponto na superfície terrestre diretamente acima do hipocentro.

Espectro de resposta – Representação gráfica ou analítica dos valores extremos de resposta de osciladores simples, com diferentes períodos e valores de amortecimento viscoso. Trata-se de espectros do *deslocamento relativo*, da *pseudovelocidade relativa* e da *pseudoaceleração absoluta*.

Espectro de resposta tripartido – Representação dos espectros do deslocamento relativo, da pseudovelocidade e da pseudoaceleração, em um único diagrama de escalas logarítmicas.

¹ Vide Chopra, A.K., 2007.

Espectro de projeto – Espectro de resposta construído com base em código normativo de projeto, que leva em consideração as características do solo, o tipo de estrutura (no que tange à geometria e à ductibilidade) e a importância desta para a sociedade.

Força basal – Força horizontal total na base de uma edificação, também denominada *corte basal*.

Força sísmica – Força sobre uma edificação, decorrente de uma ação sísmica.

Hipocentro – Ponto no interior da Terra em que se inicia uma liberação de energia sísmica.²

Intensidade – Indicação subjetiva, usualmente na *Escala Mercalli Modificada*, do efeito produzido por um sismo nos edifícios, objetos e pessoas, em determinado local.

Magnitude – Valor, usualmente na *Escala Richter*, relacionado com a energia liberada por um sismo.

Ondas sísmicas – Ondas elásticas geradas por sismos, que se propagam pelo interior e pela superfície da crosta terrestre, ocasionando vibrações nessa superfície.

Profundidade focal – Distância entre o hipocentro e o epicentro.

Rebote elástico – Teoria desenvolvida por Harry Fielding Reid, em 1908, de que as placas tectônicas se deslocam relativamente entre si, com acúmulo de energia elástica que, ao atingir o limite de resistência em certas regiões interplacas, provoca deslocamento brusco de uma placa em relação a outra, com a liberação de grande quantidade de energia e a geração de sismos.

Réplicas sismológicas – Sismos menores que ocorrem depois de um forte tremor de terra, devido ao ajuste das rochas que deram origem a esse tremor.

Shaking table – Equipamento de simulação de sismos em modelos reduzidos de laboratório.

Sismicidade – Nível de ocorrência de sismos, no espaço e no tempo, em uma determinada região.

Sismo – Vibração brusca e rápida da superfície terrestre, devido a movimentos subterrâneos como os de placas rochosas, atividade vulcânica, explosões e desmoronamento de solo. Um sismo sob o oceano pode causar *maremoto*, também denominado *tsunami*, que é uma grande onda ou sucessão de ondas que se desloca a grande velocidade.

Sismologia – Ramo da Geofísica que estuda os sismos e fenômenos correlatos.

Sismógrafo – Equipamento registrador de deslocamentos, também denominado sismômetro.

Terremoto – Sinônimo de sismo e de tremor de terra, preferencialmente em caso de grande intensidade.

Zona sísmica – Região geográfica com sismicidade semelhante.

8-2 AÇÃO SÍSMICA

A identificação das causas e a mensuração dos sismos pertencem à área de conhecimento denominada *Sismologia*. Contudo, para fundamentar o presente desenvolvimento de análise sísmica de estruturas, algumas informações básicas são apresentadas a seguir.

² Na crosta continental, a maior parte dos hipocentros ocorre entre 2 e 20 quilômetros de profundidade e, na crosta oceânica, em profundidades maiores.

Os sismos podem ser *naturais* ou *induzidos pela atividade humana*.

Os naturais ocorrem principalmente devido ao movimento relativo entre placas tectônicas (que são denominados *sismos interplacas*, os mais frequentes e os de maior magnitude) e em falhas entre blocos rochosos (que são chamados de *sismos intraplacas*).

Os sismos induzidos costumam ser provocados por mineração, explosão subterrânea e extração de água de aquífero, devido à acomodação de solo.

Uma das maneiras de avaliar sismos é pela quantidade de energia liberada, através da grandeza denomina *magnitude*. E entre as várias escalas dessa avaliação, a mais utilizada é a *Escala Richter*, definida sob a forma:

$$M = \log_{10} A \quad (8-2.1)$$

em que A é a amplitude máxima da onda sísmica, em microns, registrada por um sismógrafo *Wood-Anderson* de torção, situado a uma distância de 100km do epicentro.³ No caso de o sismógrafo não estar a essa distância, faz-se a correção:

$$M = \log_{10} A - \log_{10} A_0 \quad (8-2.2)$$

onde A_0 é um valor que depende da distância.

Uma correlação aproximada entre essa magnitude e a energia E, em joules, liberada por um sismo é expressa por:

$$\log_{10} E = 4,8 + 1,5M \quad (8-2.3)$$

Na referida escala, um sismo é potencialmente destrutivo a partir de 5 graus e, o de maior magnitude já registrado foi de 9,5 graus, que ocorreu em 22 de maio de 1960, no Chile.⁴

A magnitude de um sismo não fornece indicação dos efeitos causados nas edificações, que dependem do local afetado. Já a avaliação de um sismo por *intensidade* é uma medida qualitativa, função desses efeitos nas pessoas, estruturas, objetos e infraestrutura.⁵

A escala de intensidade mais utilizada é a *Mercalli Modificada* que vai de um a doze graus (representados em algarismos romanos para conotar subjetividade) e que, dependendo do veículo que a divulgue, é descrita em palavras distintas.⁶ Segue uma dessas descrições:

³ Essa é uma escala sem limite superior, proposta pelo sismólogo americano Charles Francis Richter (1900 -1985), juntamente com o sismólogo alemão Beno Gutenberg (1889 -1960), e que foi utilizada pela primeira vez em 1935. Um sismo de grau 7,0 libera cerca de 30 vezes a energia de um de grau 6,0. Um de grau 6 corresponde a cerca de 3,7 bombas de Hiroshima, e um de grau 8,9, a aproximadamente 108 400 dessas bombas.

⁴ Os terremotos mais letais registrados nos últimos anos foram:

- Irã, em 20/6/1990, de magnitude 7,4, com 50 000 mortos.
- Sumatra (ilha pertencente à Indonésia), em 26/12/2004, magnitude de 9,1, com 227 898 mortos.
- Paquistão, em 8/10/2005, magnitude de 7,6, com 86 000 mortos.
- Sichuan, China, em 12/5/2008, magnitude de 7,9, com 87 582 mortos.
- Haiti, em 12/1/2010, de magnitude 7,0, com 222 500 mortos.

⁵ Em edificações, inicialmente são afetadas a alvenaria e as vedações, com a formação de fissuras, trincas e/ou deslocamento de revestimento. Com o aumento das amplitudes das vibrações, ocorrem danos nos elementos estruturais.

⁶ Trata-se de modificação efetuada por Richter, na escala proposta pelo vulcanólogo italiano Giuseppe Mercalli (1850 -1914), em 1902, que já era uma alteração da *Escala de Rossi-Forel* desenvolvida em 1883.

1. Nenhuma vibração é perceptível por pessoas.
2. Algumas pessoas podem sentir movimento quando em repouso ou em andares superiores de prédios altos.
3. No interior de prédios, diversas pessoas sentem leve vibração; no exterior, contudo, nada sentem. Objetos pendurados balançam.
4. A maior parte das pessoas situadas no interior de prédios sente vibração. Louças balançam.
5. As pessoas sentem vibração, independentemente de suas localizações. Portas fazem barulho, pratos quebram, quadros mexem, objetos pequenos se deslocam e árvores oscilam.
6. As pessoas caminham com dificuldade. Os objetos e quadros costumam cair, o revestimento dos muros pode rachar. Há deslocamento de mobílias, quebra de louças e vidraças rachadas.
7. As pessoas têm dificuldade de se manter em pé, os motoristas sentem seus veículos sacudirem, alguns prédios e casas desmoronam. Sinos de igrejas tocam.
8. Motoristas têm dificuldade em conduzir seus veículos. Grandes estruturas, como chaminés e prédios, costumam desabar. Galhos e troncos quebram. Solos úmidos sofrem rachaduras. Estruturas de tijolo, casas frágeis, obras de irrigação e diques sofrem graves danos.
9. Ocorrem rachaduras no solo. Algumas tubulações subterrâneas se partem.
10. Parte dos prédios e de suas fundações são destruídas, assim como algumas pontes. As barragens são significativamente danificadas. Os trilhos ferroviários se entortam. Aparecem muitas rachaduras espalhadas no solo.
11. Grande parte das construções desaba, as pontes e as canalizações subterrâneas são destruídas.
12. Quase tudo é destruído. O solo fica ondulado. Rochas costumam se deslocar.

A avaliação da magnitude e da intensidade de sismos não tem utilidade prática no projeto de estruturas. Para isso, os sismos são registrados sob a forma de acelerogramas, segundo as translações nas direções Norte-Sul, Leste-Oeste e vertical.⁷ Além disso, a caracterização de um sismo, para efeito de projeto, está relacionada com o solo de fundação, local, tipo e importância da edificação, e os parâmetros mais importantes nessa caracterização são a aceleração máxima e o conteúdo de frequências.

Apesar de intensa pesquisa dos mecanismos de geração dos sismos naturais, não é possível prevê-los e quantificá-los com segurança. É factível, contudo, definir as regiões suscetíveis a sismos com prováveis acelerações máximas e conteúdos de frequências. Assim, os países sujeitos a sismos disponibilizam códigos normativos que quantificam as ações sísmicas em seus territórios e apresentam critérios para o projeto de edificações sismorresistentes.

Como o Brasil está situado no interior da *Placa Sul-Americana* sem falha geológica relevante, a sismicidade tem nível muito reduzido em quase todo o seu território, e não há registro de tsunamis.

⁷ O sismo de *Long Beach* foi o primeiro a ter acelerogramas registrados, em 1933. Embora possam ser registrados históricos de velocidade e de deslocamento, é mais prático obter esses históricos com a integração de acelerogramas.

A norma NBR-15421 (2006), destinada ao projeto das estruturas civis usuais resistentes a sismos, divide o país em zonas sísmicas, como mostra o mapa da aceleração característica de projeto na [Figura 8-2.1](#).⁸ Essas zonas são em número de cinco, numeradas de 0 a 4, com acelerações sísmicas horizontais características de projeto, em percentuais da aceleração da gravidade e normalizadas em relação ao terreno da classe B (rocha).⁹ Para as estruturas localizadas nas zonas 1 a 3, os valores de aceleração devem ser obtidos por interpolação. Já o conteúdo de frequência é caracterizado através de *espectros de resposta de projeto*, cujo conceito será apresentado na próxima seção.

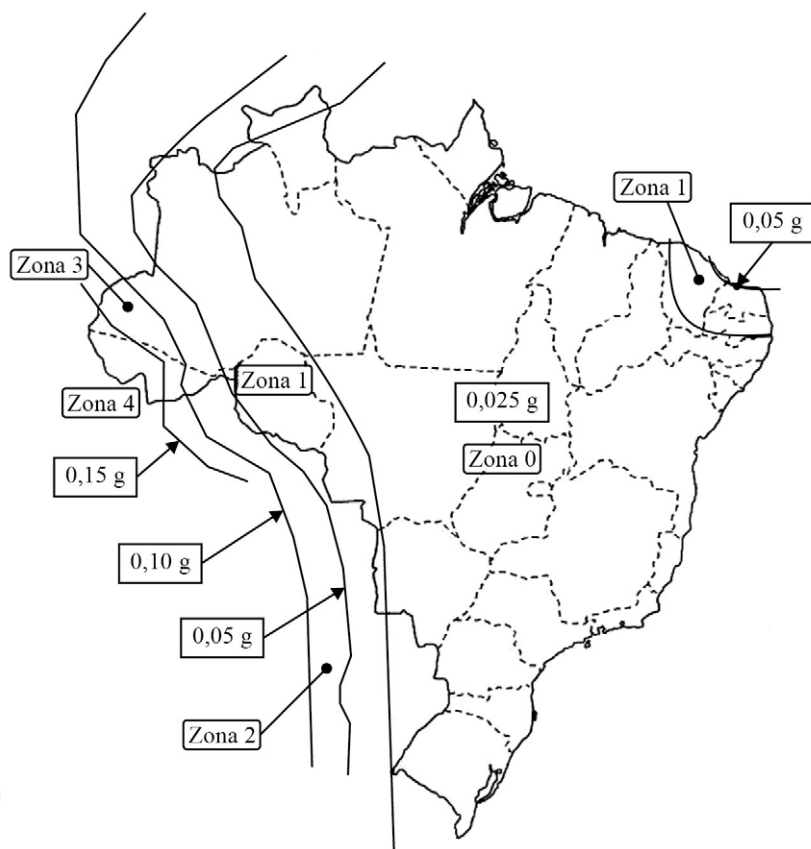


FIGURA 8-2.1 Mapeamento da aceleração sísmica horizontal característica de projeto, a_g .*

* Mapeamento reproduzido de NBR 15421, com autorização da Diretoria de Relações Externas da ABNT.

A citada norma não estabelece requisito de resistência sísmica às estruturas localizadas na zona 0. Para as estruturas situadas na zona 1, apresenta procedimento simplificado de aplicação de forças estáticas horizontais em todos os pisos do edifício e em cada uma de duas direções horizontais ortogonais, iguais a 1% do peso da edificação acima de cada piso. Para as edificações

⁸ ABNT NBR 15421:2006, *Projeto de Estruturas Resistentes a Sismos*.

⁹ Essas são acelerações máximas de referência que têm 10% de probabilidade de serem superadas em 50 anos, o que corresponde ao período de retorno de 475 anos.

localizadas nas demais zonas sísmicas, essa norma estabelece critérios para análise com forças horizontais equivalentes (que levam em consideração a aceleração sísmica e o efeito da amplificação desta no solo), como também orienta a utilização de métodos de análise dinâmica.

Usualmente, os códigos normativos de projeto especificam uma ação sísmica horizontal translacional a ser considerada em duas direções ortogonais da estrutura, assim como definem a ação vertical como parte daquela ação. Aos efeitos sísmicos devem ser somados os efeitos das forças gravitacionais e das demais ações que atuam sobre a estrutura.

Um importante acelerograma é o do componente Norte-Sul do sismo *El Centro*, mostrado na Figura 8-2.2 e ocorrido em 18 de maio de 1940, no *Imperial Valley*, Califórnia. Esse acelerograma tem magnitude 6,7, duração de 30 s, aceleração de pico de 0,319 g (3,13 m/s²).¹⁰

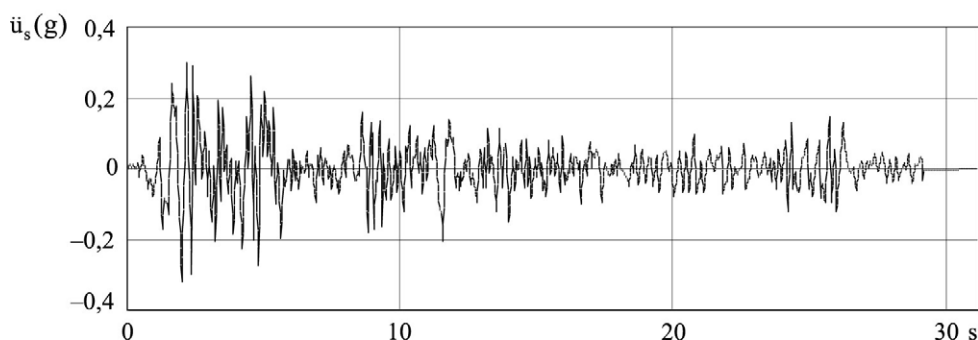


FIGURA 8-2.2 Acelerograma, sismo *El Centro* (1940).

Os valores de um acelerograma são registrados em iguais intervalos de tempo. Com base em aceleração linear em cada um desses intervalos, é cúbica a lei de deslocamentos no mesmo intervalo, que, com a notação da Figura 8-2.3, se escreve:

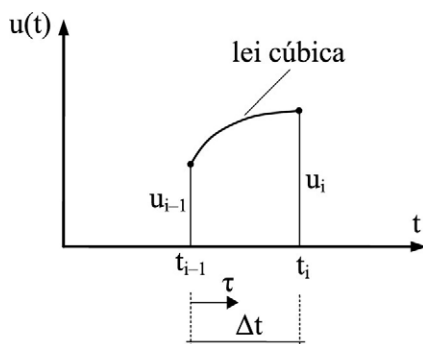


FIGURA 8-2.3 Deslocamento em um espaçamento de tempo.

¹⁰ É um acelerograma muito representativo, dado ao seu elevado pico de aceleração e porque em sismos intensos (que podem perdurar por até um minuto) a duração da parte mais intensa não costuma ultrapassar 30 s. Há diversas digitalizações desse acelerograma. Utilizou-se neste livro a disponibilizada em www.vibrationdata.com/elcentro.htm, que tem 1 558 pontos espaçados de 0,02 s. Atualmente, têm sido adotados pontos espaçados de 0,005 s. Vale comparar a aceleração de pico desse acelerograma com a aceleração sísmica horizontal da maior parte do território brasileiro estabelecida pela NBR 15421, que é de 0,025 g. Identifica-se a baixa sismicidade desse território.

$$u(\tau) = a\tau^3 + b\tau^2 + c\tau + d \quad (8-2.4)$$

Da expressão anterior obtém-se:

$$\begin{cases} \dot{u}(\tau) = 3a\tau^2 + 2b\tau + c \\ \ddot{u}(\tau) = 6a\tau + 2b \end{cases} \quad (8-2.5)$$

Com ($\tau = 0$), tem-se:

$$\begin{cases} u_{i-1} = d \rightarrow d = u_{i-1} \\ \dot{u}_{i-1} = c \rightarrow c = \dot{u}_{i-1} \\ \ddot{u}_{i-1} = 2b \rightarrow b = \ddot{u}_{i-1}/2 \end{cases} \quad (8-2.6)$$

E com ($\tau = \Delta t$), obtém-se:

$$\ddot{u}_i = 6a \Delta t + 2\ddot{u}_{i-1}/2 \rightarrow a = \frac{1}{6\Delta t}(\ddot{u}_i - \ddot{u}_{i-1}) \quad (8-2.7)$$

Logo, chega-se às seguintes leis de velocidade e de deslocamento:

$$\begin{cases} \dot{u}(\tau) = \frac{1}{2\Delta t}(\ddot{u}_i - \ddot{u}_{i-1}) \tau^2 + \ddot{u}_{i-1}\tau + \dot{u}_{i-1} \\ u(\tau) = \frac{1}{6\Delta t}(\ddot{u}_i - \ddot{u}_{i-1}) \tau^3 + \frac{\ddot{u}_{i-1}}{2} \tau^2 + \dot{u}_{i-1}\tau + u_{i-1} \end{cases} \quad (8-2.8)$$

Fazendo ($\tau = \Delta t$) nessas duas últimas expressões, obtém-se:

$$\begin{cases} \dot{u}_i = \frac{\Delta t}{2}(\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i-1}) + \dot{u}_{i-1} \\ u_i = \frac{\Delta t^2}{6}(\ddot{u}_i + 2\ddot{u}_{i-1}) + \Delta t\dot{u}_{i-1} + u_{i-1} \end{cases} \quad (8-2.9)$$

que com ($i = 1, 2, \dots$) fornecem os históricos de velocidade e de deslocamento.

Integrações numéricas costumam acarretar aproximações. E os históricos anteriores podem ser obtidos de forma mais simples, diretamente da consideração de aceleração linear em cada espaçamento de tempo, com as seguintes expressões:

$$\begin{cases} \ddot{u}_i = \frac{\dot{u}_i - \dot{u}_{i-1}}{\Delta t} \rightarrow \dot{u}_i = \ddot{u}_i \Delta t + \dot{u}_{i-1} \\ \dot{u}_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta t} \rightarrow u_i = \dot{u}_i \Delta t + u_{i-1} \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (8-2.10)$$

As Figuras 8-2.4 e 8-2.5 mostram os históricos de velocidade e de deslocamento obtidos a partir do acelerograma do sismo *El Centro* apresentado anteriormente.¹¹

¹¹ Na determinação do histórico de deslocamento foi imposta a condição de deslocamento final nulo, para compensar a acumulação das aproximações numéricas ao longo da integração na variável tempo.

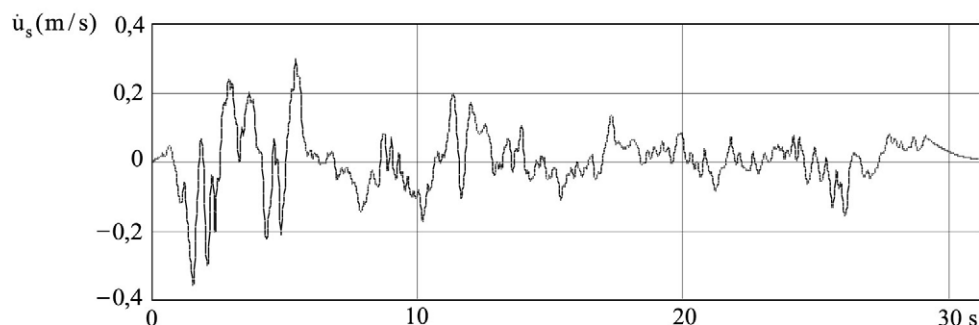


FIGURA 8-2.4 Histórico de velocidade, sismo *El Centro* (1940).

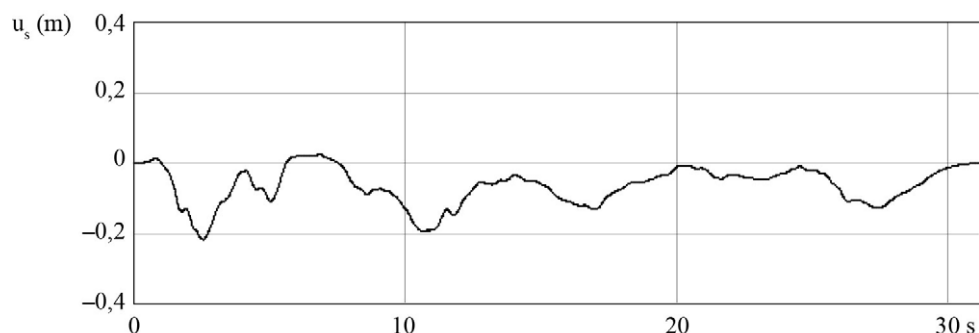


FIGURA 8-2.5 Histórico de deslocamento, sismo *El Centro* (1940).

O efeito de um sismo em uma estrutura depende do conteúdo de frequência do acelerograma sísmico e de propriedades da estrutura, como distribuições de rigidez e de massa, assim com de sua ductilidade.¹² Uma estrutura mais rígida do que outra não significa necessariamente que tenha melhor comportamento sísmico.

Como ilustração, a [Figura 8-2.6](#) apresenta o espectro de amplitudes da *transformada de Fourier* do acelerograma do sismo *EL Centro* que foi representado na [Figura 8-2.2](#).

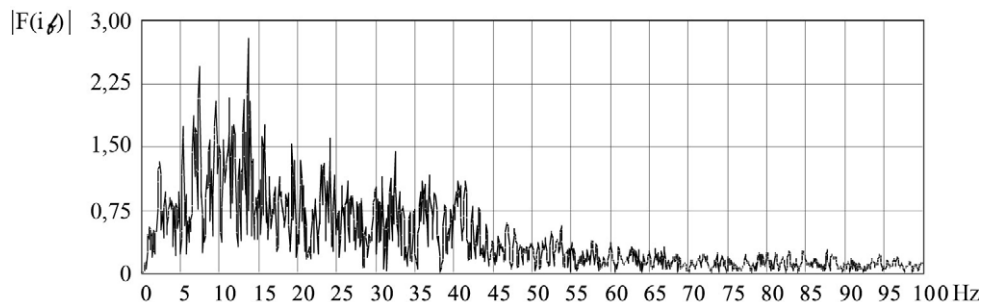


FIGURA 8-2.6 Espectro de amplitudes da *transformada de Fourier*, sismo *El Centro* (1940).

¹² As estruturas em concreto armado têm mais ductilidade do que as em aço, e as estruturas hiperestáticas, mais ductilidade do que as isostáticas.

Nesse espectro, as amplitudes maiores do que $0,75 |F(i_f)|$ estão entre as frequências 2 a 42 Hz, que correspondem a períodos entre 0,5 e 0,024 s. Assim, uma estrutura de período fundamental de 1 s é menos sensível a esse sismo do que outra de período fundamental de 0,1 s, que é mais rígida.¹³

Em projeto de uma estrutura, a ação sísmica pode ser caracterizada por acelerogramas (registrados ou artificiais) ou por *espectros de respostas* que serão apresentados na próxima seção.¹⁴ Acelerogramas são essenciais em análise de estruturas com ações múltiplas em apoios, e espectros de resposta são utilizados em análise de edificações de base rígida. Além disso, na análise pode ser utilizado: um método estático (que considera forças estáticas equivalentes à ação sísmica), o *método de superposição modal* (com integrações numéricas das equações modais ou com o uso de espectro de resposta em cada uma dessas equações) ou o *método de integração direta* das equações de movimento (com a utilização de acelerogramas).

8-3 ESPECTROS DE RESPOSTA

Espectros de resposta são representações (gráficas ou analíticas), sem consideração de sinal, de valores de pico de respostas de osciladores simples com diferentes períodos e amortecimentos. Em análise sísmica são utilizados os espectros de deslocamento, de velocidade e de aceleração, devidos à aceleração da base.¹⁵

Do ponto de vista de projeto, históricos de resposta não são realmente importantes, desde que possam ser determinadas diretamente estimativas de valores extremos de resposta, como de deslocamentos e esforços internos, por exemplo. Essas estimativas podem ser obtidas, de forma prática, com espectros de resposta. Além do que, em procedimento aproximado de análise, esses espectros são úteis em determinação de forças estáticas a serem aplicadas lateralmente à estrutura.

Na Seção 3-8 foi obtida a equação de movimento do oscilador simples excitado por aceleração da base. Adota-se agora para esse oscilador, como mostra a [Figura 8-3.1](#), a notação $u_s(t)$ para o deslocamento horizontal da base (em que o índice s é alusivo a sismo), $w(t)$ para o deslocamento da massa em relação à base e $u(t)$ para o deslocamento absoluto da massa.¹⁶

¹³ Os edifícios mais flexíveis são os mais suscetíveis ao efeito do vento. No caso de sismos, a situação se inverte, os edifícios mais rígidos são os mais sensíveis.

¹⁴ Em análise dinâmica probabilística a ação sísmica é caracterizada através de densidades espectrais de potência da aceleração.

¹⁵ Esses espectros foram concebidos por Maurice Anthony Biot (1905-1985), em 1933, mas a sua ampla divulgação deve-se a George William Housner (1910-2008), a partir de 1941. Espectros de resposta costumam também ser utilizados em análise do efeito de forças de impacto, como de explosões.

¹⁶ O deslocamento total é útil para prever uma separação entre edifícios, que evite o choque entre os mesmos, e é necessário no caso de estruturas que suportam equipamentos sensíveis a deslocamentos.

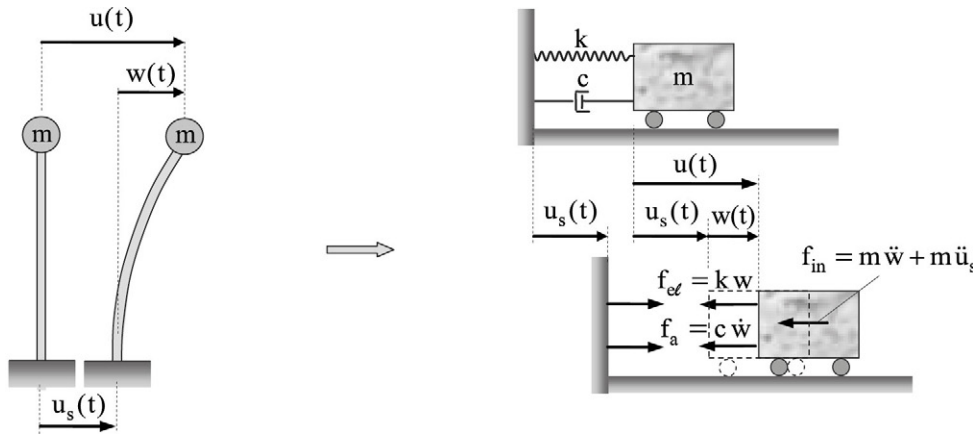


FIGURA 8-3.1 Idealização de coluna como oscilador simples com movimento da base.

Com a relação entre deslocamentos:

$$u(t) = w(t) + u_s(t) \quad (8-3.1)$$

escreve-se a equação de movimento em termos do deslocamento relativo:

$$m\ddot{w}(t) + c\dot{w}(t) + kw(t) = -m\ddot{u}_s(t) \quad (8-3.2)$$

em que $\ddot{u}_s(t)$ é suposto definido por um acelerograma. Assim, $-m\ddot{u}_s(t)$ é a força equivalente à ação sísmica.

Com a divisão de ambos os membros da equação anterior pela massa, obtém-se a nova forma de equação de movimento:

$$\ddot{w}(t) + 2\xi\omega_n\dot{w}(t) + \omega_n^2w(t) = -\ddot{u}_s(t) \quad (8-3.3)$$

A equação anterior pode ser resolvida no domínio do tempo, através de um dos métodos apresentados no Capítulo 3, ou no domínio da frequência, como foi apresentado no Capítulo 7. Os espectros de resposta (elástica) são construídos com a identificação do valor extremo dessa equação para osciladores de diferentes períodos naturais e amortecimentos.¹⁷

Como exemplificação, considera-se o oscilador simples de período natural de um segundo, razão de amortecimento de 0,05, sob a ação do acelerograma do sismo *El Centro* apresentado anteriormente. Para esse oscilador obteve-se o histórico de deslocamento relativo mostrado na Figura 8-3.2.¹⁸ Nesse histórico está indicado o deslocamento relativo máximo em valor absoluto, 0,113 m. Esse é o *deslocamento relativo espectral* que recebe a notação:

$$S_d(T_n, \xi) = w_{\max.} \quad (8-3.4)$$

em que está indicado ser função do período natural e do amortecimento.

¹⁷ A literatura apresenta adaptações desses espectros ao comportamento inelástico, o que tem caráter aproximativo, principalmente quando esses espectros são utilizados com o método de superposição modal, em que é implícita a validade do princípio da superposição dos efeitos.

¹⁸ Vê-se que esse histórico é muito mais regular do que o da aceleração sísmica de base que lhe deu origem.

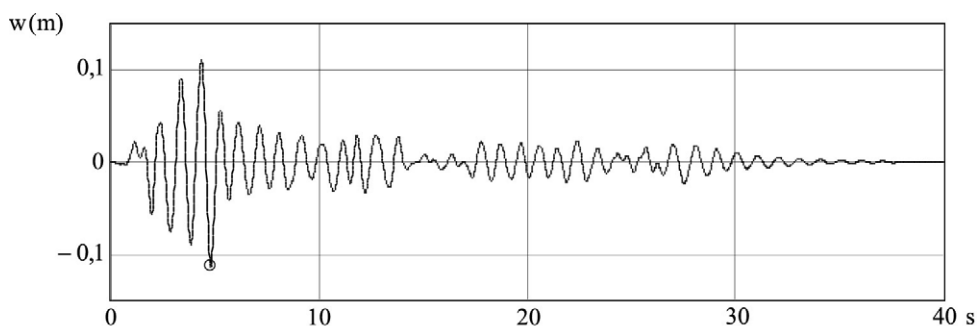


FIGURA 8-3.2 Histórico de deslocamento do oscilador de ($T_n = 1s$) e ($\xi = 0,05$), sismo *El Centro*.

A representação gráfica do deslocamento relativo espectral *versus* período natural ou frequência natural, para um dado amortecimento, é denominada *espectro de resposta do deslocamento (relativo)*. No caso do sismo *El Centro*, esse espectro é ilustrado na Figura 8-3.3, com as razões de amortecimento 0,02, 0,05, 0,1 e 0,2. Observa-se a tendência de crescimento desse deslocamento com o aumento do período natural, crescimento este que é mais intenso à medida que se reduz o amortecimento.

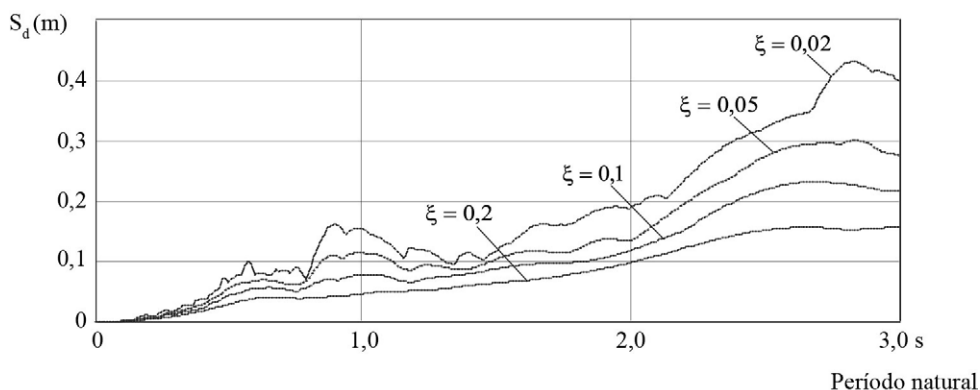


FIGURA 8-3.3 Espectros de resposta do deslocamento relativo, sismo *El Centro*.

O deslocamento relativo espectral é útil em obtenção da força elástica:¹⁹

$$f_b = k S_d(T_n, \xi) \quad (8-3.5)$$

sem informação quanto ao instante em que ocorre essa força.

Outra importante resposta máxima é a *pseudovelocidade relativa espectral* definida como:²⁰

$$S_v(T_n, \xi) = \omega_n S_d(T_n, \xi) \quad (8-3.6)$$

¹⁹ Essa força será utilizada na Subseção 8-4.1, em determinação de força estática equivalente.

²⁰ Presentemente, *pseudo* tem o significado de *aproximado*.

A representação gráfica de S_v versus período (ou frequência) natural é denominada *espectro de resposta da pseudovelocidade (relativa)* e é ilustrada na [Figura 8-3.4](#), para o caso do citado acelerograma e das razões de amortecimento 0,02, 0,05, 0,1 e 0,2.

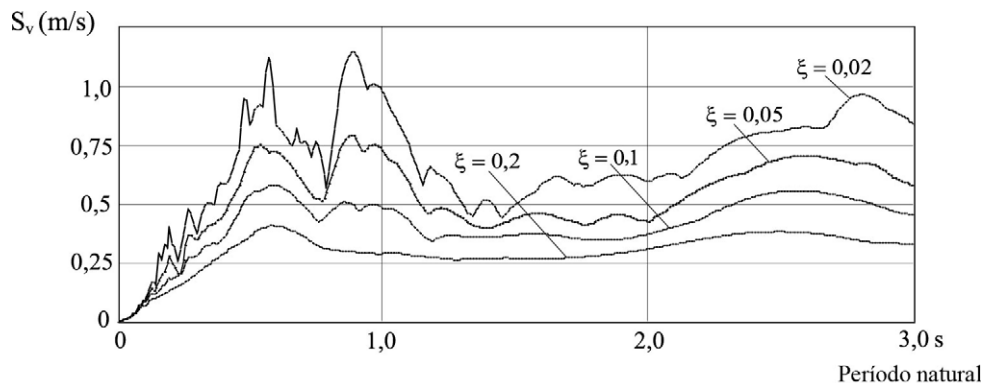


FIGURA 8-3.4 Espectros de resposta da pseudovelocidade relativa, sismo *El Centro*.

A pseudovelocidade relativa espectral é diferente da velocidade relativa máxima (exata) que ocorre em um instante distinto que o do deslocamento relativo espectral e que, para ser determinada, requer a obtenção do histórico dessa velocidade. Contudo, como a diferença é pequena e a expressão anterior facilita a determinação de uma velocidade espectral, é rotineiro o uso da pseudovelocidade relativa espectral.

Para evidenciar essa diferença, considera-se o caso da razão de amortecimento de 0,05 e o acelerograma do sismo *El Centro*. Na [Figura 8-3.5](#) está mostrado, em traço contínuo, o espectro de resposta da pseudovelocidade relativa e está representado, em linha pontilhada, o espectro de resposta da verdadeira velocidade relativa. Observa-se pequena diferença entre esses dois espectros, que é pouco relevante, principalmente devido à incerteza na definição da excitação sísmica.

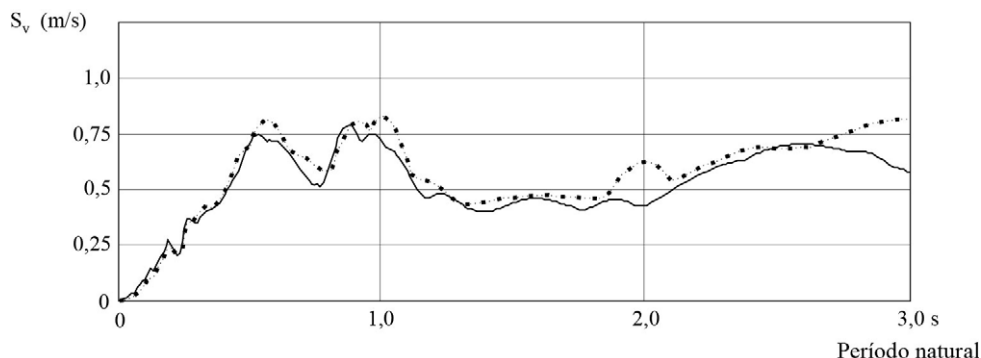


FIGURA 8-3.5 Espectros de resposta da verdadeira velocidade e da pseudovelocidade do sismo *El Centro*, $\xi = 0,05$.

A pseudovelocidade relativa é útil em determinação da energia potencial de deformação elástica linear de pico, que tem a expressão:

$$E_{pe} = \frac{1}{2} k S_d^2 = \frac{1}{2} k \frac{S_v^2}{\omega_n^2} \rightarrow E_{pe} = \frac{1}{2} m S_v^2 \quad (8-3.7)$$

Obtém-se, agora, a aceleração absoluta espectral para o caso não amortecido. Para isso, substitui-se o deslocamento relativo ($w = u - u_s$) na equação de equilíbrio do oscilador simples sem amortecimento ($\ddot{w} + \omega_n^2 w = -\ddot{u}_s$), em obtenção da equação ($\ddot{u} + \omega_n^2 w = 0$). Essa equação fornece o valor máximo:

$$\ddot{u}_{m\acute{a}x.} = \omega_n^2 |w_{m\acute{a}x.}| \quad (8-3.8)$$

que é denominado *pseudoaceleração absoluta espectral*. Essa aceleração máxima praticamente coincide com a aceleração absoluta máxima em caso de amortecimento pequeno, como os que ocorrem nas estruturas.

Para comprovar esse fato, considera-se o caso da razão de amortecimento de 0,05 e o mesmo acelerograma do sismo *El Centro*. A Figura 8-3.6 mostra coincidência gráfica do espectro da pseudoaceleração, representado em traço contínuo, com o espectro da verdadeira aceleração, representado em linha pontilhada.

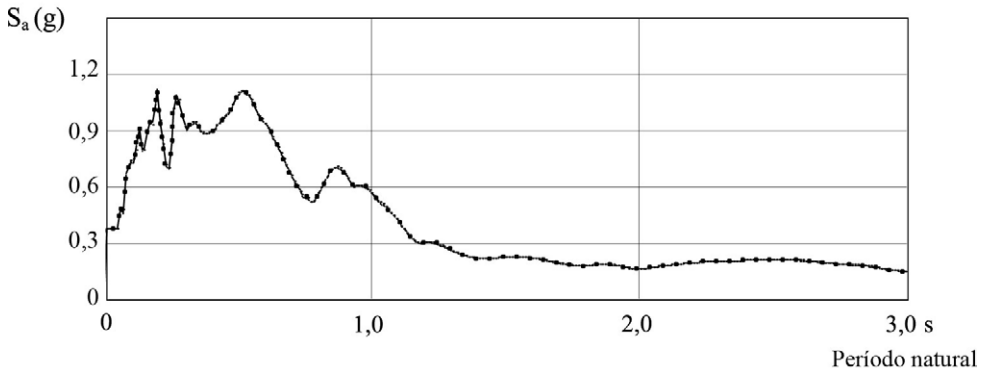


FIGURA 8-3.6 Espectros de resposta da aceleração verdadeira e da pseudoaceleração do sismo *El Centro*, $\xi = 0,05$.

Essa coincidência justifica utilizar a pseudoaceleração espectral, quando então se tem a seguinte relação entre espectros:

$$S_a(T_n, \xi) = \omega_n^2 S_d(T_n, \xi) = \omega_n S_v(T_n, \xi) \quad (8-3.9)$$

A representação gráfica de S_a versus período (ou frequência) natural é denominada *espectro de resposta da pseudoaceleração absoluta*. Esse espectro é mostrado na Figura 8-3.7 em termos de unidades da aceleração da gravidade, para o caso do sismo *El Centro* (1940) e com as razões de amortecimento 0,02, 0,05, 0,1 e 0,2.

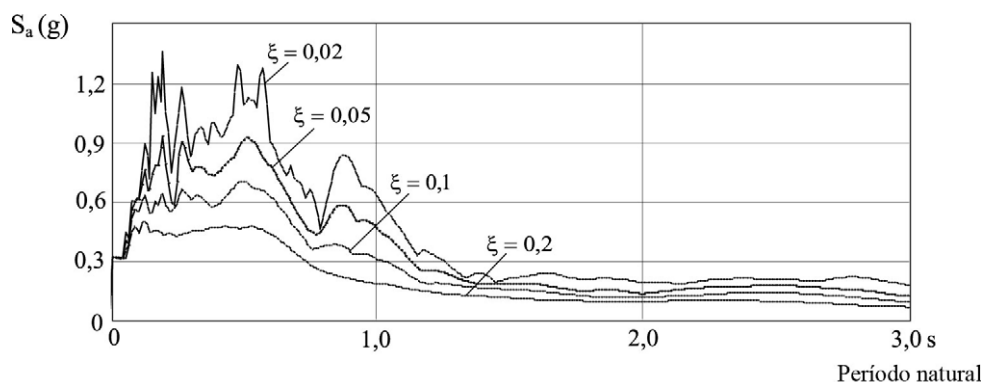


FIGURA 8-3.7 Espectros de resposta da pseudoaceleração absoluta, sismo *El Centro*.

Embora as respostas espectrais do deslocamento relativo, da pseudovelocidade relativa e da pseudoaceleração absoluta se relacionem entre si através da frequência natural, essas respostas fornecem uma indicação do conteúdo de frequências da excitação sísmica. Observa-se que os deslocamentos de um oscilador são particularmente sensíveis aos movimentos de baixa frequência, as velocidades são sensíveis aos de média frequência e as acelerações, aos de alta frequência.

Newmark representou os três descritos espectros, em um único diagrama de escalas logarítmicas, denominado *espectro de resposta tripartido*.²¹ Esse espectro está ilustrado na Figura 8-3.8 para o caso do sismo *El Centro* (1940), em que os traços contínuos de cima para baixo dizem respeito às razões de amortecimento 0, 0,02, 0,05, 0,1 e 0,2.²² Nas abscissas estão marcados os períodos em segundos, nas ordenadas estão assinaladas as velocidades espectrais em centímetros por segundo, nas diagonais a 45° estão registrados os pseudodeslocamentos espectrais em centímetros e nas diagonais a -45° estão indicadas as pseudoacelerações espectrais em termos da gravidade.

Os espectros de resposta anteriores têm alterações bruscas, o que não é conveniente em códigos normativos de projeto. Além do que esses espectros foram obtidos com osciladores de comportamento linear, enquanto as estruturas são usualmente concebidas para atingir comportamento não linear, quando da ocorrência de sismos intensos. Por essa razão, aqueles códigos apresentam espectros suavizados e especificam um fator de ductilidade que expresse capacidade de deformação plástica, na busca de transformar a resposta elástica linear em resposta não linear, em caráter aproximativo. Também, a utilização de espectros de resposta de um sismo já ocorrido não incorpora o caráter aleatório de sismos futuros, além de não considerar as características do solo local, do tipo de estrutura e da importância desta para a sociedade.

²¹ Newmark, N.M., 1959, *A Method of Computation for Structural Dynamics*, Proceedings of ASCE, vol. 85, EM3, pp. 67-94. É clássica a apresentação do espectro de resposta tripartido em livros que tratam de análise sísmica, contudo, esse espectro não apresenta atualmente utilidade prática em projeto.

²² Figura reproduzida do livro *Dynamics of Structures*, 2010, ISTE and John Wiley & Sons, com autorização do autor Patrick Paultre.

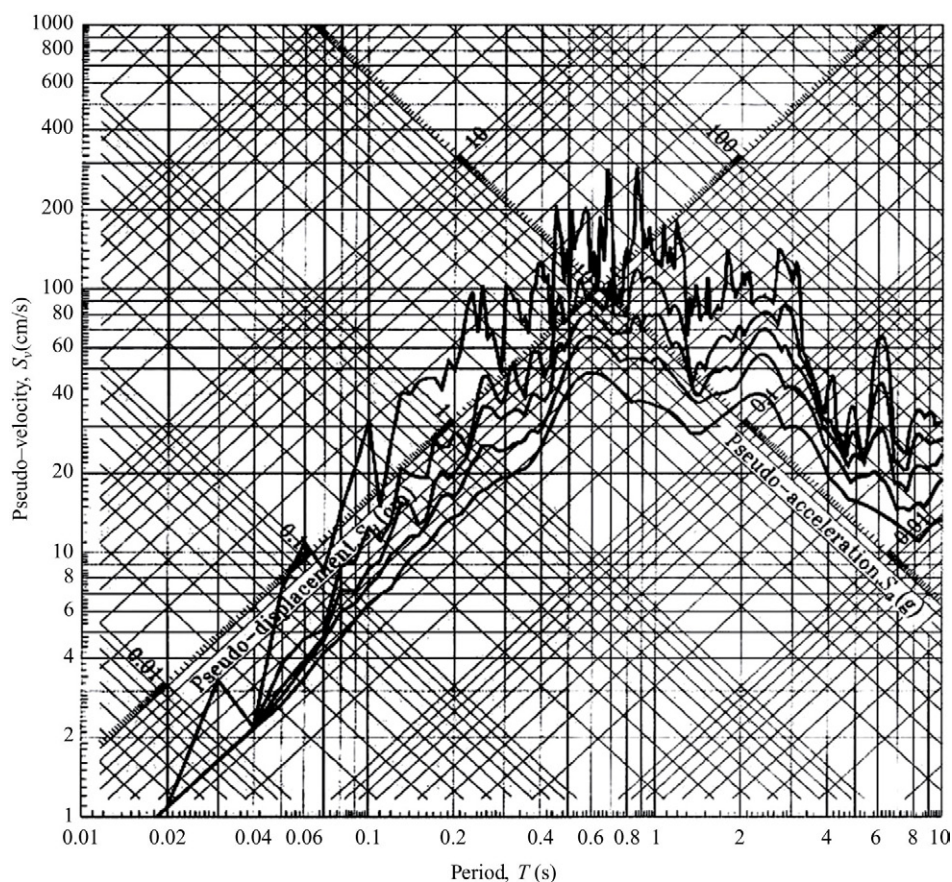


FIGURA 8-3.8 Espectro de resposta tripartido, sismo *El Centro*.

Para resolver tais questões, os códigos normativos apresentam critérios para a construção de *espectros de resposta de projeto* que expressam, através de trechos lineares e curvos suavizados, uma “média” de vários sismos, com a consideração probabilística da sísmica local e das referidas características. Costumam apresentar critérios apenas para espectros de resposta da pseudoaceleração, uma vez que a pseudovelocidade espectral pode ser obtida com a divisão dessa aceleração pela frequência natural angular, e o deslocamento espectral obtido com a divisão dessa aceleração por essa frequência ao quadrado.

Como exemplificação inicialmente de espectro de projeto, considera-se a NBR-15421. A partir da aceleração sísmica horizontal característica de projeto mapeada na [Figura 8-2.1](#), a_{gs} e da classe do terreno (rocha sã, rocha, solo muito rígido, solo rígido ou solo mole), são estabelecidos os fatores de amplificação sísmica C_a e C_v . Com esses fatores são definidas as acelerações espectrais horizontais ($a_{gs0} = C_a a_g$) e ($a_{gs1} = C_v a_g$) que consideram a amplificação sísmica no solo, para a construção do espectro da pseudoaceleração que é mostrado na [Figura 8-3.9](#).

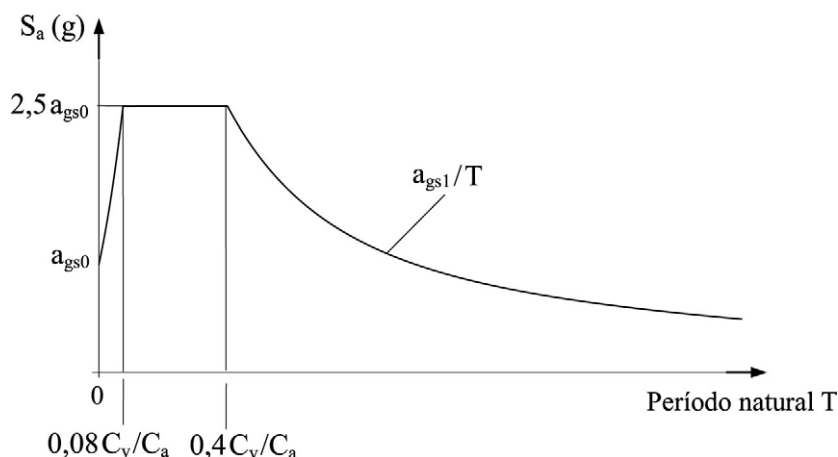


FIGURA 8-3.9 Espectro de resposta de projeto, NBR-15421.

Como segunda exemplificação, a Figura 8-3.10 mostra espectros de projeto da Norma Argentina CIRSOC 103, quanto à ação sísmica horizontal para a zona sísmica 1 e o amortecimento de 5%.²³

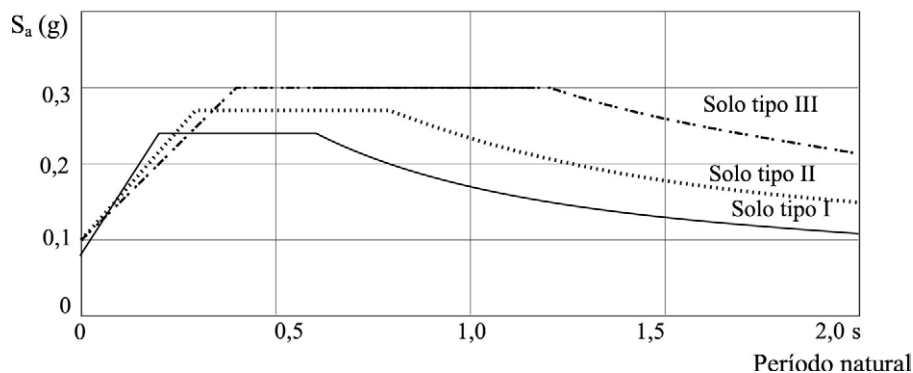


FIGURA 8-3.10 Espectros de resposta de projeto, CIRSOC 103.

Resultados de medições de amortecimento de estruturas sob a ação sísmica apresentam grande variabilidade. Os códigos normativos de projeto recomendam amortecimento viscoso de ($\xi = 0,05$) para as estruturas sem isoladores de vibração e com boa capacidade de dissipação de energia, e costumam orientar a adoção de um menor valor em caso dessa capacidade ser reduzida.

²³ Normas Argentinas para Construcciones Sismorresistentes, CIRSOC 103, www.inpres.gov.ar.

8-4 ESTRUTURAS DE EDIFÍCIOS

As edificações consideradas *sismorresistentes* devem resistir, com danos limitados, aos sismos em qualquer direção e como ações excepcionais.²⁴ O projeto dessas construções requer concepção arquitetônica-estrutural com redundância de estabilidade, com ductilidade e capacidade de dissipação de energia. O projeto deve ser elaborado com base em análise numérica que simule, em caso de ocorrência do sismo previsto mais desfavorável, comportamento estrutural que garanta a preservação de vidas humanas e danos reparáveis.

Para isso, as edificações sismorresistentes devem ter claras trajetórias de transmissão das forças sísmicas entre os componentes estruturais. Essas edificações costumam ser concebidas com base rígida (em radier ou como resultado do contraventamento das fundações) ou sobre múltiplos apoios sem contraventamento. O primeiro caso tem a vantagem de assegurar excitação uniforme em toda a estrutura e é abordado na presente seção. O segundo caso é o de estruturas de grandes vãos, com apoios muito afastados entre si, como pontes e grandes estruturas de cobertura. A correspondente análise será detalhada na próxima seção.

Além de base rígida, é recomendável que os edifícios de andares múltiplos tenham:

1. Distribuição regular dos componentes em planta, preferencialmente em malha ortogonal;
2. Uniformidade estrutural ao longo da altura;
3. Componentes verticais mais rígidos situados próximos à periferia da edificação;
4. Resistência a esforços de torção;
5. Ductilidade e capacidade de dissipação de energia em duas direções ortogonais e na direção vertical.

É indicado também que os referidos edifícios sejam concebidos com:

1. Lajes rígidas em seus planos, para bem distribuir os esforços horizontais entre os componentes verticais resistentes;
2. Rigidez e resistência semelhantes em duas direções ortogonais principais;
3. Simetrias horizontais ou proximidade dos centros de massa e de rigidez, em cada andar.

Em análise determinística, a ação sísmica é considerada a partir de acelerogramas impostos à base da edificação ou levada em conta, de forma aproximada através de espectros de resposta. Em locais de reduzida sismicidade e com esses espectros, os códigos normativos apresentam critérios para a determinação de forças horizontais estáticas equivalentes em cada piso da edificação, como descrito na próxima subseção. Para casos de sismicidade mais relevante, orientam a utilização de análises dinâmicas, como as descritas na subseção posterior.

²⁴ Construções essenciais, como hospitais, pontes importantes e usinas nucleares devem ser integralmente preservadas. Atualmente tem sido muito utilizados isoladores de vibração que costumam reduzir o efeito dos sismos sobre as estruturas em até 75%. O exemplo de isolamento de maior destaque é o do *Yokohama Landmark Tower* (prédio de 296 m de altura, o mais elevado do Japão), em que uma base isoladora composta de roletes e molas foi combinada com o efeito equilibrador de um pêndulo.

8-4.1 Análise estática equivalente

Pelo fato de uma análise dinâmica consistente requerer muito mais processamento do que uma estática, é prática, para edificações de respostas que possam ser bem caracterizadas pelo primeiro modo natural de vibração que se situem em regiões de baixa sismicidade, substituir essa análise por uma pseudoestática. Isso porque, com idealização de um grau de liberdade, uma força horizontal na base da edificação pode ser estimada a partir da pseudoaceleração absoluta espectral, que foi apresentada na seção anterior.

Para isto, com base nas Equações 8-3.5 e 8-3.8, tem-se a força elástica do oscilador simples:

$$f_b = kS_a / \omega_n^2 \rightarrow \boxed{f_b = m S_a} \quad (8-4.1)$$

em que o valor de S_a é identificado em um espectro de resposta da pseudoaceleração absoluta, tendo-se o período fundamental do edifício e a correspondente razão de amortecimento.²⁵ Essa é a chamada *força basal* ou *corte basal*, que pode ser escrita sob a forma:

$$f_b = WS_a C/g \quad (8-4.2)$$

Nessa expressão, W é o peso da edificação (com a inclusão de um percentual das forças verticais acidentais) e C é um fator de correção que, entre outras influências, costuma levar em conta a importância da edificação, a amplificação sísmica no solo e a utilização de espectro de resposta elástico em projeto de estrutura de comportamento não linear. Além disso, aquele fator considera o número de pisos da edificação, uma vez que, com poucos pisos, a massa efetiva do primeiro modo natural de vibração é menor do que a massa total.²⁶

Na NBR-15421, a força basal é chamada de *força horizontal total* na base da estrutura e é expressa sob a forma:

$$\boxed{H = C_s W} \quad (8-4.3)$$

em que C_s , denominado *coeficiente de resposta sísmica*, é um coeficiente que engloba o referido fator, a pseudoaceleração espectral e a aceleração da gravidade.

Essa força deve ser distribuída entre as várias elevações da edificação, com a seguinte parcela em cada elevação x de laje:

$$F_x = C_{vx} H \quad (8-4.4)$$

onde se tem o coeficiente:

$$C_{vx} = \frac{w_x h_x^k}{\sum_{i=1}^n w_i h_i^k} \quad (8-4.5)$$

²⁵ O período fundamental pode ser obtido através de um problema de autovalor ou por fórmulas aproximadas contidas no código normativo de projeto.

²⁶ Com o aumento do período fundamental, reduz-se a pseudoaceleração e, consequentemente, a força basal. Esse fato é utilizado em dimensionamento de sistema de isolamento na base, de maneira a permitir deslocamentos horizontais, com o consequente aumento do período fundamental.

Nesse coeficiente, w_i e w_x são as parcelas do peso efetivo total que correspondem às elevações i e x , respectivamente; h_i e h_x são as alturas entre a base e as elevações i e x , respectivamente; n é o número total de andares da edificação e k é um expoente de distribuição relacionado com o período fundamental, T_1 .²⁷

Esse expoente pode assumir os seguintes valores:

- $k = 1$, para estruturas de período menor do que 0,5s;²⁸
- $k = (T_1 + 1,5)/2$, para estruturas de período entre 0,5s e 2,5s;
- $k = 2$, para estruturas de período maior do que 2,5s.

No caso particular de edificações situadas na zona sísmica 1, a NBR-15421 apresenta a expressão anterior simplificada para a forma:

$$F_x = 0,01w_x \quad (8-4.6)$$

8-4.2 Análise dinâmica

Em análise dinâmica de estruturas de edifícios de andares múltiplos de base rígida podem ser concebidos modelos com diferentes graus de refinamento.²⁹ Esses modelos costumam ter as massas concentradas nos diversos níveis da edificação e se dividem nas duas seguintes categorias:

1. *Modelo shear building*, em que os pisos são supostos indeformáveis e as colunas, inextensíveis;
2. *Modelo tridimensional*, em que se pode incluir a rigidez de todos os componentes da estrutura.

Esses modelos estão ilustrados na [Figura 8-4.1](#). O primeiro, denominado *shear building*, é clássico, simples e bem mais rígido do que a estrutura real, devido à consideração de pisos indeformáveis e colunas inextensíveis. Em caso de estrutura com dois planos de simetria, esse modelo pode ser plano, com apenas um grau de liberdade de translação em cada nível da edificação, como mostrado na parte esquerda da figura. Assim, esse modelo equivale a uma coluna de trechos de rigidez igual à soma das rigidezes à flexão dos pilares do correspondente nível da edificação. Quando não há planos de simetria, o modelo deve ter, em cada nível da edificação, duas translações horizontais ortogonais, além da rotação em torno de um eixo vertical, o que permite levar em conta as rigidezes transversais e de torção.

O modelo tridimensional é o mais elaborado e o indicado em caso de estrutura que apresente irregularidades acentuadas de rigidez. Pode considerar acelerações sísmicas nas três direções principais ortogonais da estrutura e incluir, através de discretizações em elementos finitos, a rigidez de flexão das lajes. Em caso de as lajes serem consideradas indeformáveis

²⁷ A força F_x correspondente a cada elevação da edificação deve ser distribuída entre os diversos componentes estruturais verticais simorresistentes, através dos diafragmas horizontais que simulam as lajes, e deve ser considerado um momento de torção em cada elevação, em caso de excentricidade do centro de massa em relação ao centro de rigidez.

²⁸ Vale observar que a distribuição é linear, crescente com a altura.

²⁹ A NBR 15421 admite a idealização das lajes como rígidas e como flexíveis em seus próprios planos, em procedimento de análise com a representação da ação sísmica através de forças horizontais estáticas equivalentes.

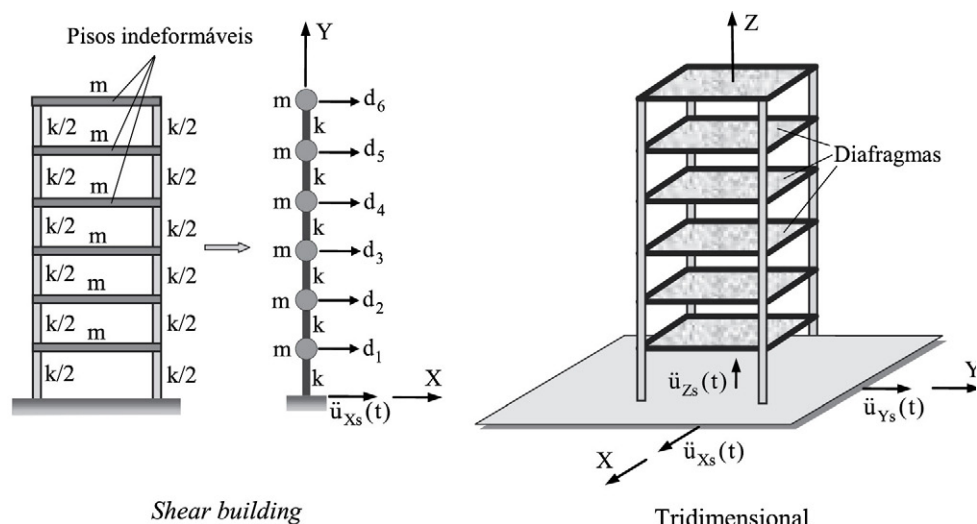


FIGURA 8-4.1 Idealizações de edifícios de andares múltiplos.

em seus planos, o que recebe o nome de *hipótese do diafragma*, a laje de ordem i é suposta com três deslocamentos de corpo rígido, d_X^i , d_Y^i e r_Z^i , considerados no centro de massa da laje, por simplicidade.³⁰ Esses deslocamentos estão ilustrados na Figura 8-4.2, juntamente com os deslocamentos dos tipos r_{Xk} , r_{Yk} e d_{Zk} , que são utilizados na discretização da laje em elementos finitos de placa, na idealização das vigas como elementos de grelha e na idealização dos pilares como elementos de pórtico espacial.³¹

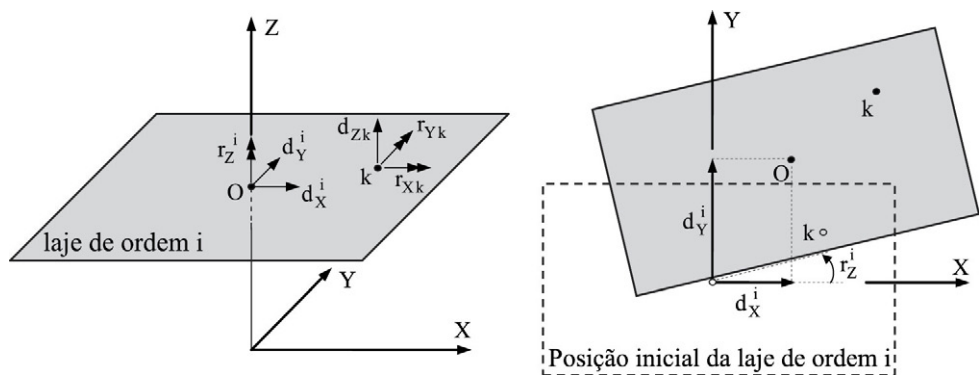


FIGURA 8-4.2 Deslocamentos em modelo tridimensional de edifício de andares múltiplos.

Com essa idealização, um edifício de N andares, com p pontos de discretização em cada laje, tem $(3p + 3)N$ graus de liberdade, o que pode implicar diversos milhares de equações de equilíbrio.

³⁰ Com essa coincidência, o momento de inércia rotacional de uma laje retangular $a \times b$, em relação ao eixo Z que lhe é perpendicular no centro de massa, é $(I_0 = m(a^2 + b^2)/12)$, onde m é a massa uniforme por unidade de área da laje.

³¹ Vide Soriano, 1995, Seção 3-4.

Para o desenvolvimento a seguir, supõe-se que tenham sido construídas as matrizes globais **K**, **M** e **C** do descrito modelo tridimensional. Com as acelerações sísmicas $\ddot{u}_{xs}(t)$, $\ddot{u}_{ys}(t)$ e $\ddot{u}_{zs}(t)$ (de forma análoga à Equação 8-3.2, mas sem o sinal negativo do termo do segundo membro, por ser irrelevante), escreve-se o sistema global das equações de movimento:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{d}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{d}(t) = \mathbf{M}\mathbf{I}_X\ddot{u}_{xs}(t) + \mathbf{M}\mathbf{I}_Y\ddot{u}_{ys}(t) + \mathbf{M}\mathbf{I}_Z\ddot{u}_{zs}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (8-4.7)$$

O vetor **d** contém todos os deslocamentos não restringidos do modelo, sendo que os deslocamentos das lajes como diafragmas são relativos à base rígida. Além disso,

$$\mathbf{I}_X = \begin{bmatrix} \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots \end{bmatrix}^T \quad (8-4.8)$$

é um *vetor de influência* com valores unitários nas posições correspondentes às numerações dos deslocamentos na direção X e com valores nulos nas demais posições. Consequentemente, $\mathbf{M}\mathbf{I}_X$ é um vetor coluna com as massas associadas à aceleração sísmica nessa direção. Os vetores \mathbf{I}_Y e \mathbf{I}_Z são semelhantes ao vetor \mathbf{I}_X .

O sistema global anterior pode ser resolvido com um dos métodos de integração numérica apresentados nas Seções 6-4 e 6-5, em obtenção do histórico de resposta de qualquer grandeza que seja de interesse, como deslocamento ou esforço interno, por exemplo.

Tratando-se de comportamento linear e amortecimento proporcional, aquele sistema pode também ser resolvido com o método de superposição modal que foi detalhado na Seção 6-2. Para isso, utiliza-se a transformação de coordenadas expressa na Equação 6-2.16, de maneira a obter p equações modais desacopladas, que no caso de apenas a aceleração $\ddot{u}_{xs}(t)$ se escrevem:

$$\ddot{d}_j(t) + 2\omega_j\xi_j\dot{d}_j(t) + \omega_j^2 d_j(t) = \phi_j^T \mathbf{M}\mathbf{I}_X \ddot{u}_{xs}(t) = \phi_j \ddot{u}_{xs}(t) \quad (8-4.9)$$

com $(j = 1, 2, \dots, p)$. Nessa expressão:

$$\phi_j = \phi_j^T \mathbf{M}\mathbf{I}_X \quad (8-4.10)$$

é o denominado fator de participação modal.

A qualidade de uma transformação modal depende inicialmente da representação do vetor de participações modais no subespaço definido pelos modos naturais de vibração retidos em Φ_p . Para avaliar essa transformação, escreve-se, com base na Equação 6-2.35, a norma de erro de truncamento modal:

$$\|e\| = \frac{(\mathbf{M}\mathbf{I}_X)^T (\mathbf{M}\mathbf{I}_X - \mathbf{M}\Phi_p\Phi_p^T \mathbf{M}\mathbf{I}_X)}{(\mathbf{M}\mathbf{I}_X)^T (\mathbf{M}\mathbf{I}_X)} \quad (8-4.11)$$

Um valor muito pequeno dessa norma expressa adequada representação do referido vetor.

A qualidade da transformação modal depende também da correlação das frequências dos modos retidos em Φ_p com o conteúdo de frequência da excitação sísmica. Contudo, para simplificar a questão, os códigos normativos costumam estabelecer que seja incluído, no conjunto das equações modais, pelo menos 90% de participação da massa total da edificação, m_t , em

cada uma das direções ortogonais consideradas na análise. Isto é, requerem que a *razão de participação de massa*:

$$r_m = \left(\sum_{j=1}^p \beta_j^2 \right) / m_t \quad (8-4.12)$$

seja maior ou igual a 0,9.³²

As equações modais anteriores podem ser resolvidas com um dos métodos desenvolvidos no Capítulo 3 ou através do domínio da frequência, como foi apresentado no Capítulo 7. As soluções dessas equações são posteriormente transformadas às coordenadas geométricas iniciais, em obtenção de históricos de resposta. Contudo, em projeto há interesse em valores máximos e não em históricos de resposta completos. Utiliza-se, então, o *método baseado em espectro de resposta* detalhado a seguir, em que são obtidas estimativas de valores extremos para as grandezas de interesse.

Uma vez que se disponha do espectro de resposta da pseudoaceleração absoluta e com base na frequência ω_j e na razão de amortecimento ξ_j , ambos da j -ésima equação modal, identifica-se o valor da pseudoaceleração absoluta espectral $S_{a(j)}$. E com esse valor, obtém-se o deslocamento relativo espectral:

$$S_{d(j)} = \frac{S_{a(j)}}{\omega_j^2} \quad (8-4.13)$$

Logo, chega-se à parcela do vetor de deslocamentos físicos correspondente ao máximo deslocamento da referida equação modal:

$$\mathbf{d}_{(j)} = \boldsymbol{\varphi}_j \mathbf{S}_{d(j)} \quad (8-4.14)$$

Nesse vetor consta o termo correspondente ao i -ésimo grau de liberdade, que se escreve:

$$d_{i(j)} = \varphi_{ij} \mathbf{S}_{d(j)} \quad (8-4.15)$$

onde φ_{ij} denota o i -ésimo coeficiente do modo natural de vibração $\boldsymbol{\varphi}_j$.

Assim, com $(j = 1, 2, \dots, p)$ são obtidas as parcelas de deslocamento correspondentes às diversas equações modais, parcelas estas que têm o sinal algébrico de $\varphi_{ij}\mathbf{f}_j$, uma vez que $S_{d(j)}$ não tem sinal, por definição. Essas parcelas são referentes a distintos instantes e, consequentemente, é necessária uma estratégia para combiná-las de maneira a obter uma estimativa de deslocamento máximo. Para isso, têm-se diversos procedimentos, entre os quais se destacam os descritos a seguir:

1. Procedimento da soma dos valores absolutos:

$$d_i \cong \sum_{j=1}^p |d_{i(j)}| \quad (8-4.16)$$

³² Com a consideração de todos os modos naturais de vibração na transformação modal, essa razão é igual à unidade.

Esse procedimento fornece resultados muito conservadores e, portanto, é pouco utilizado.

2. Procedimento da raiz quadrada da soma dos quadrados, SRSS – *Square Root of the Sum of the Squares*, também denominado *ponderação quadrática*, em que se determina:

$$d_i \cong \sqrt{\sum_{j=1}^p d_{i(j)}^2} \quad (8-4.17)$$

Esse procedimento é baseado na teoria de vibração aleatória e fornece melhores resultados do que o anterior. Subestima, contudo, valores extremos quando da ocorrência de frequências naturais próximas uma das outras, como em caso de $\omega_{j+1}/\omega_j < 1,4$.

3. Procedimento da combinação quadrática completa, CQC – *Complete Quadratic Combination*, em que se calcula:³³

$$d_i \cong \sqrt{\sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^p d_{i(j)} \rho_{jk} d_{i(k)}} \quad (8-4.18)$$

Esse procedimento é também baseado na teoria de vibração aleatória, mas diferentemente do anterior, leva em consideração a correlação entre o j-ésimo e o k-ésimo modos naturais de vibração, através do fator ρ_{jk} . Entre outras formas apresentadas na literatura para esse *coeficiente de correlação*, tem-se:³⁴

$$\rho_{jk} = \frac{8\sqrt{\xi_j \xi_k} (\xi_j + r_{jk} \xi_k) r_{jk}^{3/2}}{(1 - r_{jk}^2)^2 + 4\xi_j \xi_k r_{jk} (1 + r_{jk}^2) + 4(\xi_j^2 + \xi_k^2) r_{jk}^2} \quad (8-4.19)$$

em que r_{jk} é a razão entre frequências naturais:

$$r_{jk} = \frac{\omega_j}{\omega_k} \quad (8-4.20)$$

Com o mesmo amortecimento em todos os modos naturais de vibração, o coeficiente anterior simplifica-se para a forma:

$$\rho_{jk} = \frac{8\xi^2 (1 + r_{jk}) r_{jk}^{3/2}}{(1 - r_{jk}^2)^2 + 4\xi^2 r_{jk} (1 + r_{jk}^2)} \quad (8-4.21)$$

A Figura 8-4.3 mostra a representação desse coeficiente para os valores de razões de amortecimento 0,01, 0,03 e 0,05. Vê-se que esse coeficiente decresce rapidamente à medida que as frequências ω_j e ω_k se afastam entre si, principalmente com a redução do amortecimento.

³³ Wilson, E.L., Kiureghian, D.A., Bayo, E.P., 1981, *A Replacement for the SRSS Method in Seismic Analysis*, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, vol. 9, pp. 187-192.

³⁴ Der Kiureghian, A., 1980, *Structural Response to Stationary Excitation*, American Society of the Engineering Mechanics Division, vol. 106, EM6.

Coefficiente de correlação

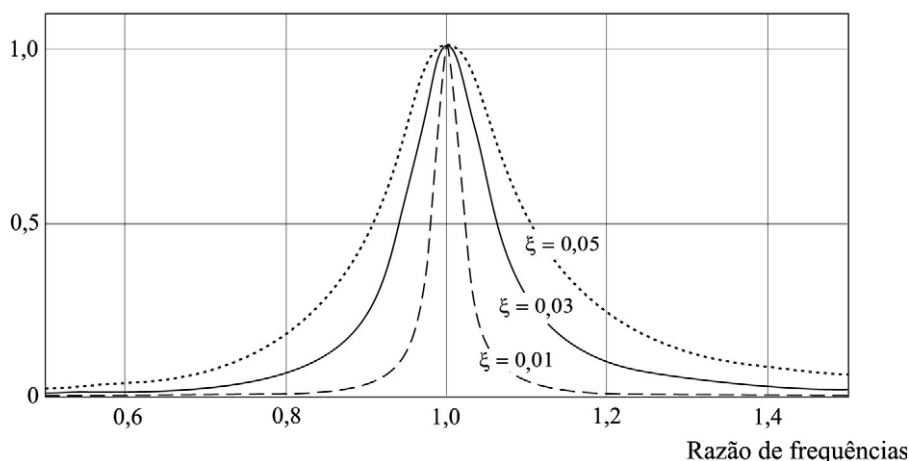


FIGURA 8-4.3 Coeficiente de correlação entre modos de vibração.

Como ($\rho_{jk} = k$) no caso de ($j = k$), escreve-se a estimativa da Equação 8-4.18 sob a nova forma:

$$d_i \cong \sqrt{\sum_{j=1}^p d_{i(j)}^2 + \sum_{j=1}^p \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^p d_{i(j)} \rho_{jk} d_{i(k)}} \quad (8-4.22)$$

Essa expressão evidencia que com frequências bem separadas (de reduzidos coeficientes de correlação), a estimativa de resultado com o procedimento CQC se aproxima da estimativa do resultado com o procedimento SRSS. E em caso de amortecimento nulo para todos os modos, o procedimento CQC recai no de SRSS.

Em resumo, o procedimento SRSS fornece bons resultados em caso de frequências naturais bem separadas, e o procedimento CQC é indicado em caso de ocorrência de frequências agrupadas.³⁵ Os valores máximos de velocidades e de acelerações nodais podem ser estimados de forma análoga ao adotado para os deslocamentos.

Como os deslocamentos máximos estimados com qualquer um dos procedimentos anteriores baseiam-se em distintos instantes, os esforços internos não podem ser determinados a partir dessas estimativas. Para obter cada um desses esforços interno, deve-se determinar a parcela correspondente ao vetor de deslocamentos pertinente à j -ésima equação modal ($\mathbf{d}(j)$) que foi expresso na Equação 8-4.14) e combinar as parcelas obtidas com base nas diversas equações modais, através de um dos procedimentos de estimativa de máximo.

Segue algoritmo de estimativa do i -ésimo deslocamento máximo em caso de aceleração sísmica na direção X e com o procedimento SRSS.

³⁵ Entre outros procedimentos de combinação de resultados modais, o U.S. Nuclear Regulatory Guide 1.92 apresenta o *NRG ten-percent method* e o *NRG Double-sum method*.

– Especificações da razão de amortecimento, do número p de modos de vibração, do espectro de resposta da pseudoaceleração e da ordem i do deslocamento máximo procurado.
 – Construção das matrizes \mathbf{K} , \mathbf{M} e do vetor de influência \mathbf{I}_x .
 – A resolução do problema de autovalor $\mathbf{K}\Phi_p = \mathbf{M}\Phi_p\Omega_p$ fornece Φ_p e Ω_p .

$\rightarrow j = 1 \rightarrow p$
 $\phi_j = \Phi_j^T \mathbf{M} \mathbf{I}_x$, $\omega_j = \sqrt{\lambda_j}$
 – Com $T_j = 2\pi/\omega_j$ e ξ , identifica-se $S_{a(j)}$ no espectro de resposta.
 $S_{d(j)} = S_{a(j)} / \omega_j^2$, $d_{i(j)} = \phi_{i(j)} \phi_j S_{d(j)}$

$$d_i = \sqrt{\sum_{j=1}^p d_{i(j)}^2}$$

ALGORITMO 8-4.1 Estimativa de deslocamento máximo com base em espectro de resposta.

O presente método será utilizado no próximo exemplo, em comparação com o método de integração direta das equações de movimento. Será verificado que o método baseado em espectro de resposta fornece resultados com diferenças significativas em relação a resultados dessa integração. Contudo, essa estimativa é corriqueiramente utilizada em projeto, devido às razões:

1. Trata-se de método muito simples, de reduzido processamento.
2. Fornece diretamente valores máximos de deslocamentos e de esforços internos, evitando o fornecimento de uma enorme quantidade de resultados não relevantes.
3. Pode adotar um espectro de resposta suavizado que seja o resultado de uma média de vários sismos, que leve em consideração as características do solo local, da ductilidade da estrutura e da importância desta.
4. Não requer a construção da matriz de amortecimento, por ter o *amortecimento proporcional* como pré-requisito.

Como desvantagens do uso de espectros de resposta, têm-se:

1. Os valores máximos calculados têm caráter muito aproximativo, não têm sinais algébricos e não ocorrem no mesmo instante de tempo.
2. Os espectros de resposta só se aplicam ao caso de transformação modal que desacople as equações de movimento e, portanto, requerem *amortecimento proporcional* e comportamento linear.
3. Esses espectros não podem ser utilizados em caso de ações múltiplas em apoios, isto é, quando a base não é rígida.

Já a integração direta das equações de movimento e a integração das equações modais, em determinação de históricos de resposta, apresentam as seguintes características:

1. Têm extenso processamento, principalmente em caso de integração direta.

2. Fornecem grande quantidade de resultados, entre os quais é necessário identificar os que sejam relevantes.
3. Os códigos normativos de projeto requerem análises com vários acelerogramas para garantir que o conteúdo de frequência da estrutura seja plenamente excitado.
4. Não linearidades e partes da estrutura com amortecimentos distintos podem ser consideradas através de integração direta.
5. Permitem a verificação de dimensionamento em função do tempo.

EXEMPLO 8-4.1

Para cotejar resultados de análise dinâmica e com análise estática equivalente, em idealizações unidimensionais de edifícios de base rígida, consideram-se os dois modelos representados na [Figura E8-4.1a](#) em que ($k = 10^9 \text{ N/m}$) e ($m = 10^7 \text{ kg}$). O primeiro tem seis níveis, e o segundo, doze níveis, ambos com a razão de amortecimento de 0,05 e sob a atuação do sismo *El Centro* de acelerograma apresentado na [Figura 8-2.2](#).

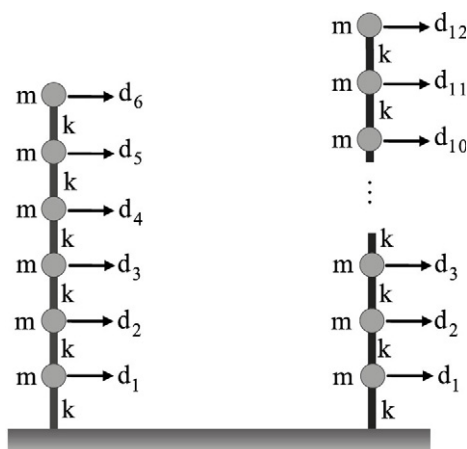


FIGURA E8-4.1a Modelos unidimensionais.

As montagens das matrizes **K** e **M** seguem o padrão apresentado no Exemplo 5-5.2.

Para que todos os modos naturais de vibração tivessem o especificado amortecimento, foi adotado o procedimento de superposição dos amortecimentos modais, apresentado na Subseção 6-3.1.2.

Nas integrações numéricas foi adotado o espaçamento ($\Delta t = 0,02 \text{ s}$), que é o da digitalização do referido acelerograma.

Nas resoluções das equações modais foi utilizado o procedimento de resolução direta por segmentos lineares da ação, apresentado na Subseção 3-7.2.

Na construção do espectro de resposta de deslocamento foram considerados períodos naturais a cada 0,01s, e foi utilizada interpolação linear quando da utilização desse espectro.

Na resolução com base em espectro de resposta, foi adotado o procedimento SRSS, uma vez que as frequências naturais se mostraram bem afastadas entre si.

O primeiro modelo apresentou os seguintes períodos naturais: 2,61s ; 0,89s ; 0,55s ; 0,42s ; 0,35s ; 0,32s.

Com esse modelo foram obtidos os seguintes resultados para o deslocamento do nível superior:

Integração direta de Newmark: $d_6 = 0,3852\text{m}$

Integração direta de Wilson $\theta = 1,4$: $d_6 = 0,3869\text{m}$

Superposição modal – com 1 modo: $d_6 = 0,3667\text{m}$

com 2 modos: $d_6 = 0,3803\text{m}$

com 3 modos: $d_6 = 0,3857\text{m}$

Espectro de resposta – com 1 modo: $d_6 = 0,3655\text{m}$ e $r_m = 0,870$

com 2 modos: $d_6 = 0,3679\text{m}$ e $r_m = 0,959$

com 3 modos: $d_6 = 0,3680\text{m}$ e $r_m = 0,986$

com 6 modos: $d_6 = 0,3681\text{m}$ e $r_m = 1$

Tendo-se como referência o resultado da *integração direta de Newmark*, que é muito próximo do resultado de Wilson- θ , verifica-se que:

- No *método de superposição*, os modos de vibração superiores ao primeiro têm 4,8% de influência, que é aproximadamente a mesma diferença de resultado da análise baseado em espectro de resposta com apenas um modo natural de vibração. Isso era de se esperar, uma vez que não se aplica o procedimento de combinação de máximos.
 - O atendimento do critério de razão de participação de massa igual ou superior a 0,9, que se cumpriu com a inclusão do segundo modo de vibração, correspondeu a um erro de cerca de 4,5%.
 - O uso de um maior número de modos no método baseado em espectro de resposta não melhorou significativamente o resultado.
- O segundo modelo apresentou os seguintes períodos naturais: 5,0s ; 1,68s ; 1,02s ; 0,74s ; 0,59s ; 0,49s ; 0,43s ; 0,39s ; 0,36s ; 0,34s ; 0,32s ; 0,32s.

Com esse modelo foram obtidos os seguintes resultados para o deslocamento do nível superior:

Integração direta de Newmark: $d_{12} = 0,3437\text{m}$

Integração direta de Wilson $\theta = 1,4$: $d_{12} = 0,3446\text{m}$

Superposição modal – com 1 modo: $d_{12} = 0,3234\text{m}$

com 2 modos: $d_{12} = 0,3252\text{m}$

com 12 modos: $d_{12} = 0,3410\text{m}$

Espectro de resposta – com 1 modo: $d_{12} = 0,3232\text{m}$ e $r_m = 0,842$

com 2 modos: $d_{12} = 0,3269\text{m}$ e $r_m = 0,934$

com 3 modos: $d_{12} = 0,3279\text{m}$ e $r_m = 0,965$

com 12 modos: $d_{12} = 0,3282\text{m}$ e $r_m = 1$

Tendo-se como referência o resultado da *integração direta de Newmark*, que é bastante próximo do resultado da *integração direta de Wilson θ* , verifica-se que:

- No *método de superposição*, os modos de vibração superiores ao primeiro têm 5,9% de influência, que é praticamente a mesma diferença de resultado no caso da análise baseada em espectro de resposta com um modo de vibração.
- O atendimento do critério de razão de participação de massa correspondeu a um erro de 4,9%.
- Também nesse modelo, o uso de maior número de modos no método por espectro de resposta não melhorou relevantemente o resultado.

Em resumo, os resultados anteriores mostraram que:

- Os resultados das *integrações diretas de Newmark e de Wilson θ* foram praticamente coincidentes.
- O *método por espectro de resposta* não apresentou melhoria de resultados após o atendimento do critério de razão de participação de massa.

Para uma análise estática equivalente, com base na Equação 8-4.1, tem-se a força basal ($f_b = m_t \omega_1^2 S_d$), onde m_t é a massa total do modelo. Assim, para o primeiro modelo obtém-se:

$$\begin{aligned} T_1 &= 2,6063 \text{ s}, & \omega_1 &= 2,4107 \text{ rad/s} & \rightarrow & S_d = 0,29091 \\ \rightarrow & f_b &= 6 \cdot 10^7 \cdot 2,4107^2 \cdot 0,29091 &= 10,144 \cdot 10^7 \text{ N} \end{aligned}$$

Na distribuição dessa força entre os diversos níveis do modelo, foram consideradas as Equações 8-4.4 e 8-4.5 e arbitrou-se o valor de 3,5m para a distância entre os diversos níveis do modelo. Com isso, chegou-se ao seguinte vetor de forças estáticas horizontais:

$$\mathbf{f}^T = 10^7 \begin{bmatrix} 0,28817 & 0,99786 & 1,8366 & 2,4879 & 2,6232 & 1,9098 \end{bmatrix} \text{ N}$$

Logo, com a resolução do sistema ($\mathbf{Kd} = \mathbf{f}$), foram obtidos os deslocamentos dos diversos níveis do modelo:

$$\mathbf{d}^T = \begin{bmatrix} 0,1014 & 0,1838 & 0,2400 & 0,2711 & 0,2840 & 0,2868 \end{bmatrix} \text{m}$$

O deslocamento obtido para o sexto nível tem uma diferença de 34% em relação ao resultado pela *integração direta de Newmark*, o que evidencia o caráter aproximativo da análise estática equivalente e o que pode ser “compensado” através de um coeficiente de majoração.

8-5 ESTRUTURAS COM AÇÕES MÚLTIPLAS NOS APOIOS

A idealização de base rígida pode ser utilizada em edificação de fundações contraventadas com idêntica prescrição de acelerações sísmicas. Em pontes e estruturas de grandes vãos, cujas fundações são muito afastadas entre si e não contraventadas, os apoios são susceptíveis de serem excitados independentemente um dos outros, a partir de acelerogramas fora de fase e dependentes do tempo de propagação das ondas sísmicas de um apoio a outro.

Para desenvolvimento de formulação com excitação múltipla dos apoios de uma estrutura, considera-se o sistema das equações de movimento na seguinte forma repartida, que inclui os graus de liberdade dos apoios:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{aa} & \mathbf{M}_{ab} \\ \mathbf{M}_{ab}^T & \mathbf{M}_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{d}}_a \\ \ddot{\mathbf{d}}_b \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{aa} & \mathbf{C}_{ab} \\ \mathbf{C}_{ab}^T & \mathbf{C}_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{d}}_a \\ \dot{\mathbf{d}}_b \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa} & \mathbf{K}_{ab} \\ \mathbf{K}_{ab}^T & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_a \\ \mathbf{d}_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_b \end{Bmatrix} \quad (8-5.1)$$

Nesse sistema, o índice “a” se refere aos graus de liberdade da superestrutura, em um referencial absoluto, e o índice “b” é alusivo aos graus de liberdade da base da estrutura.

Desse sistema tem-se:

$$\mathbf{M}_{aa}\ddot{\mathbf{d}}_a + \mathbf{M}_{ab}\ddot{\mathbf{d}}_b + \mathbf{C}_{aa}\dot{\mathbf{d}}_a + \mathbf{C}_{ab}\dot{\mathbf{d}}_b + \mathbf{K}_{aa}\mathbf{d}_a + \mathbf{K}_{ab}\mathbf{d}_b = \mathbf{0} \quad (8-5.2)$$

que fornece:

$$\mathbf{M}_{aa}\ddot{\mathbf{d}}_a(t) + \mathbf{C}_{aa}\dot{\mathbf{d}}_a(t) + \mathbf{K}_{aa}\mathbf{d}_a(t) = \mathbf{f}_a(t) \quad (8-5.3)$$

em que:

$$\mathbf{f}_a(t) = -\mathbf{M}_{ab}\ddot{\mathbf{d}}_b(t) - \mathbf{C}_{ab}\dot{\mathbf{d}}_b(t) - \mathbf{K}_{ab}\mathbf{d}_b(t) \quad (8-5.4)$$

é o vetor de forças nodais equivalentes às ações nos apoios. Assim, uma vez que se tenham os acelerogramas referentes aos apoios, $\ddot{\mathbf{d}}_b$, por integração desses acelerogramas podem ser obtidos $\dot{\mathbf{d}}_b$ e \mathbf{d}_b , para posterior integração do sistema de equações diferenciais expresso na Equação 8-5.3.

Em caso de matriz de massa diagonal e como a construção da matriz de amortecimento \mathbf{C}_{ab} tem aproximações aos mecanismos de dissipação de energia, o vetor de forças nodais anterior simplifica-se para a forma:

$$\mathbf{f}_a(t) = -\mathbf{K}_{ab}\mathbf{d}_b(t) \quad (8-5.5)$$

Contudo, o uso desse vetor requer a obtenção de históricos de deslocamento dos apoios, por integração de acelerogramas, o que implica aproximações numéricas. Além do que, como em cada espaçamento de digitalização de acelerograma, a lei de aceleração é considerada linear, que é correspondente a uma lei cúbica de deslocamentos, é necessário um maior número de pontos de integração com essa última lei para igualdade acurácia quanto ao uso de acelerograma. Por essas razões, é mais indicado proceder como desenvolvido a seguir.

Os deslocamentos do sistema de equações de movimento expresso na Equação 8-5.1 podem ser repartidos sob a forma:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{d}_a \\ \mathbf{d}_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_e \\ \mathbf{d}_b \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \rightarrow \mathbf{d}_a = \mathbf{d}_e + \mathbf{d} \quad (8-5.6)$$

onde \mathbf{d}_e é o vetor devido à aplicação estática dos deslocamentos contidos em \mathbf{d}_b , em cada instante de tempo, denominado *vetor de deslocamentos quase-estáticos*. Assim, esses são deslocamentos relativos à base e obtidos a partir do sistema de equações algébricas lineares:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa} & \mathbf{K}_{ab} \\ \mathbf{K}_{ab}^T & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_e \\ \mathbf{d}_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_{be} \end{Bmatrix} \quad (8-5.7)$$

onde \mathbf{f}_{be} é o vetor de forças nodais correspondentes aos deslocamentos dos apoios, função do tempo e que não carece de determinação.

Do sistema anterior, tem-se:

$$\mathbf{K}_{aa} \mathbf{d}_e(t) + \mathbf{K}_{ab} \mathbf{d}_b(t) = \mathbf{0} \quad (8-5.8)$$

$$\rightarrow \mathbf{d}_e(t) = -\mathbf{K}_{aa}^{-1} \mathbf{K}_{ab} \mathbf{d}_b(t) = \mathbf{K} \mathbf{d}_b(t) \quad (8-5.9)$$

onde se adota a notação:

$$\mathbf{K} = -\mathbf{K}_{aa}^{-1} \mathbf{K}_{ab} \quad (8-5.10)$$

Essa é uma matriz de influência dos deslocamentos dos apoios sobre os graus de liberdade da superestrutura, independente do tempo.

Com a substituição da Equação 8-5.6 na Equação 8-5.2, obtém-se:

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}_{aa}(\ddot{\mathbf{d}}_e + \ddot{\mathbf{d}}) + \mathbf{M}_{ab}\ddot{\mathbf{d}}_b + \mathbf{C}_{aa}(\dot{\mathbf{d}}_e + \dot{\mathbf{d}}) + \mathbf{C}_{ab}\dot{\mathbf{d}}_b + \mathbf{K}_{aa}(\mathbf{d}_e + \mathbf{d}) + \mathbf{K}_{ab}\mathbf{d}_b = \mathbf{0} \\ \rightarrow & \mathbf{M}_{aa}\ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{C}_{aa}\dot{\mathbf{d}} + \mathbf{K}_{aa}\mathbf{d} = -(\mathbf{M}_{aa}\ddot{\mathbf{d}}_e + \mathbf{M}_{ab}\ddot{\mathbf{d}}_b) - (\mathbf{C}_{aa}\dot{\mathbf{d}}_e + \mathbf{C}_{ab}\dot{\mathbf{d}}_b) - (\mathbf{K}_{aa}\mathbf{d}_e + \mathbf{K}_{ab}\mathbf{d}_b) \end{aligned} \quad (8-5.11)$$

Logo, com a consideração da Equação 8-5.8, essa última expressão simplifica-se para a forma:

$$\mathbf{M}_{aa}\ddot{\mathbf{d}}(t) + \mathbf{C}_{aa}\dot{\mathbf{d}}(t) + \mathbf{K}_{aa}\mathbf{d}(t) = \mathbf{f}'(t) \quad (8-5.12)$$

onde

$$\mathbf{f}'(t) = -(\mathbf{M}_{aa}\ddot{\mathbf{d}}_e(t) + \mathbf{M}_{ab}\ddot{\mathbf{d}}_b(t)) - (\mathbf{C}_{aa}\dot{\mathbf{d}}_e(t) + \mathbf{C}_{ab}\dot{\mathbf{d}}_b(t)) \quad (8-5.13)$$

é um novo vetor de forças nodais equivalentes às excitações dos apoios. Além disso, tendo-se em conta a Equação 8-5.9, esse vetor se escreve:

$$\mathbf{f}'(t) = -(\mathbf{M}_{aa} \mathbf{K} + \mathbf{M}_{ab})\ddot{\mathbf{d}}_b(t) - (\mathbf{C}_{aa} \mathbf{K} + \mathbf{C}_{ab})\dot{\mathbf{d}}_b(t) \quad (8-5.14)$$

O uso desse vetor em lugar do que está expresso na Equação 8-5.5 tem a vantagem de requerer a integração de cada acelerograma apenas uma única vez, em determinação de histórico de velocidade. Além do que, como as forças de amortecimento são pequenas em relação às de inércia, é prático cancelar o último termo da expressão anterior para escrever:

$$\mathbf{f}'(t) = -(\mathbf{M}_{aa} \mathbf{K} + \mathbf{M}_{ab}) \ddot{\mathbf{d}}_b(t) \quad (8-5.15)$$

em que são suficientes os acelerogramas referentes aos apoios.

Finalmente, em caso de matriz de massa diagonal, esse vetor simplifica-se para a seguinte forma:

$$\mathbf{f}'(t) = -\mathbf{M}_{aa} \mathbf{K} \ddot{\mathbf{d}}_b(t) \quad (8-5.16)$$

Vale observar que, em caso de base rígida com aceleração sísmica apenas na direção X , a matriz \mathbf{K} se reduz ao *vetor de influência* \mathbf{I}_x expresso na Equação 8-4.8, que tem valores unitários nas posições correspondentes às numerações dos deslocamentos translacionais na referida direção e valores nulos nas demais posições.

Na aplicação desse procedimento, é mais eficiente computacionalmente evitar a inversão de matriz que ocorre na Equação 8-5.10. Para isso, escreve-se:

$$\mathbf{K}_{aa} \mathbf{K} = -\mathbf{K}_{ab} \quad (8-5.17)$$

Sendo n_a o número de graus de liberdade e n_b o número de deslocamentos dos apoios, a expressão anterior representa n_b sistemas de equações algébricas lineares de mesma matriz dos coeficientes. Logo, a matriz \mathbf{K} pode ser obtida por resoluções simultâneas dos vetores independentes, com aproveitamento das características de esparsidade da matriz dos coeficientes.

Este capítulo apresentou os esclarecimentos básicos para a compreensão das ações sísmicas, dos códigos normativos de projeto sismorresistente e dos métodos de análise sísmica. Encerram-se, assim, os métodos de análise dinâmica deste livro. O próximo capítulo complementa a Seção 5-5, no que concerne à obtenção automática de frequências e aos modos naturais de vibração, principalmente em modelos de elevado número de graus de liberdade.

8-6 EXERCÍCIOS PROPOSTOS

- 8-6.1** Um edifício, a ser construído no país em região de aceleração sísmica característica de projeto de 0,1g, foi idealizado como oscilador simples de frequência natural de 13 rad/s. Como o solo local da edificação é muito rígido, da Tabela 3 da NBR-15421 foram retirados os fatores de amplificação sísmica: ($C_a = 1,2$) e ($C_v = 1,7$). Com base no espectro de resposta de projeto apresentado na [Figura 8-3.9](#), pede-se o deslocamento relativo máximo.
- 8-6.2** Com o acelerograma do sismo *El Centro* disponibilizado em www.vibrationdata.com/elcentro.htm e com a razão de amortecimento ($\xi = 0,04$), obtenha os espectros de resposta do deslocamento relativo, da pseudovelocidade relativa e da pseudoaceleração absoluta.

- 8-6.3** O referido acelerograma do *El Centro* é aplicado à base de um oscilador com as propriedades: ($k = 50 \text{ kN/m}$), ($m = 1266,5 \text{ kg}$) e ($\xi = 0,05$). Pede-se a representação, em um mesmo gráfico, dos históricos do deslocamento relativo obtido em resolução direta por segmentos lineares da ação externa e obtido em análise no domínio da frequência. Idem para as *integrações de Newmark* e de *Wilson* $\theta = 1,4$.

8.7 QUESTÕES PARA REFLEXÃO

- 8-7.1** Quais são as causas dos sismos?
- 8-7.2** O que significam *magnitude* e *intensidade*, de um sismo? Quais são as principais escalas dessas avaliações? Qual é razão de escalas com características distintas?
- 8-7.3** Como são caracterizados os sismos para o projeto de estruturas?
- 8-7.4** Por que uma estrutura rígida não é necessariamente mais adequada do ponto de vista de comportamento sísmico do que outra menos rígida?
- 8-7.5** Quais são as diretrizes que a se ter em conta na concepção estrutural de edifícios sismorresistentes?
- 8-7.6** O que é a *hipótese do diafragma* em edifício de andares múltiplos? Qual é a simplificação introduzida por essa hipótese em análise sísmica desse tipo de estrutura?
- 8-7.7** Por que utilizar a concepção de base rígida em edifício de andares múltiplos?
- 8-7.8** O que e quais são os *espectros de resposta* definidos para análise sísmica de estruturas? Quais são as relações entre esses espectros? Por que se adota a palavra *pseudo* nos nomes de dois desses espectros?
- 8-7.9** O que é o *espectro de resposta tripartite*? Por que esse espectro caiu em desuso?
- 8-7.10** O que é um *espectro de projeto*? Por que foi criado esse espectro conceitual?
- 8-7.11** Por que os códigos normativos de projeto costumam apresentar critérios apenas para a construção de espectros de resposta da pseudoaceleração?
- 8-7.12** Qual é a base teórica para a estimativa de *forças estáticas equivalentes* a ações sísmicas em regiões de baixa sismicidade?
- 8-7.13** Quando e como efetuar uma análise sísmica com base em espectro de resposta? Quais são as vantagens e desvantagens dessa análise?
- 8-7.14** Quais são os principais procedimentos de combinação de resultados modais em análise baseada em espectro de resposta? Quais são as vantagens e desvantagens de cada um desses procedimentos?
- 8-7.15** Por que, em análise baseada em espectro de resposta, os esforços internos não devem ser obtidos a partir das estimativas dos deslocamentos máximos? Então, como estimar esses esforços?
- 8-7.16** Quando e como efetuar uma análise sísmica com ações múltiplas nos apoios? Quais são as vantagens e desvantagens dessa análise?



CAPÍTULO 9

Resolução Numérica do Problema de Autovalor

POR QUE ESTUDAR A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE AUTOVALOR?

Com o exposto em capítulos anteriores, ficou esclarecida a grande importância do conhecimento das frequências e dos modos naturais de vibração de modelo discreto de estrutura. Essas frequências foram comparadas com o conteúdo de frequência da ação externa, e esses modos foram utilizados no *método de superposição modal*.

Frequências e modos de vibração são obtidos através da resolução de um *problema de autovalor*, também denominado *problema de valores próprios*. E como foi resumidamente descrito, essa resolução, em forma básica, recai em uma equação polinomial que, excetuados casos muito particulares, não tem solução analítica fechada. Assim, a menos desses casos, os métodos de resolução do problema de autovalor são iterativos, no entendimento de que as soluções numéricas são obtidas por aproximações sucessivas. Contudo, esses métodos, em grande parte, não permitem o aproveitamento das características de esparsidade das matrizes de rigidez e de massa, e demandam excessivo número de operações numéricas, sendo indicados apenas para problema de autovalor de reduzida dimensão.

Em análise de modelo de elevado número de graus de liberdade, são úteis usualmente apenas os primeiros pares de autovalores e autovetores. E o melhor método para se obterem esses autopares é o *de iteração por subespaço*. Além disso, em superposição de respostas dinâmicas individuais, não é imperativo utilizar base definida por modos naturais de vibração. Por vezes, é mais eficaz utilizar os chamados *vetores de Ritz* ou os *vetores de Lanczos*. Assim, o objetivo principal deste capítulo é apresentar o *método de iteração por subespaço* e a geração desses vetores, os quais são comumente disponíveis nos programas comerciais de análise dinâmica. Além disso, na parte final do capítulo, argumenta-se que a realização do projeto de modernas estruturas se deve, em grande parte, ao desenvolvimento dos métodos de análise e à eficiência da microcomputação.

Nesse contexto, o presente capítulo tem a seguinte estruturação de seções:

- 9-1** Apresentação das principais propriedades do problema de autovalor de matrizes de coeficientes reais e simétricas.

- 9-2 Definição e detalhamento do *quociente de Rayleigh* e da correspondente forma generalizada denominada *análise de Rayleigh-Ritz*, necessária ao *método de iteração por subespaço*.
- 9-3 Desenvolvimento do *método de Jacobi generalizado* de resolução completa da forma generalizada simétrica do problema de autovalor, necessária ao *método de iteração por subespaço*.
- 9-4 Apresentação da propriedade da *sequência de Sturm*, adotada em verificação da obtenção dos primeiros pares de autovalores e autovetores com o *método de iteração por subespaço*.
- 9-5 Desenvolvimento do *método de iteração inversa*, fundamental ao *método de iteração por subespaço*.
- 9-6 Descrição do *método de iteração por subespaço*.
- 9-7 Apresentação dos *vetores de Ritz* e *vetores de Lanczos*, em determinação de resposta dinâmica.
- 9-8 Argumentação quanto à eficiência do atual processamento dos microcomputadores em análise de estruturas.
- 9-9 Sugestão de exercícios para resolução.
- 9-10 Proposição de questões para reflexão.

A compreensão das Seções 9-1 a 9-5 é fundamental para o pleno entendimento do *método de iteração por subespaço* descrito na Seção 9-6, mas não é essencial para o desenvolvimento de programa automático do mesmo. Assim, como o estudo dessas seções requer bastante tempo e dedicação a quem se inicia ao assunto, o leitor interessado unicamente em elaborar a referida programação poderá ater-se apenas ao entendimento dos algoritmos daquele método e dos algoritmos do *método de Jacobi*, tema da Seção 9-3. Alternativamente, ao leitor interessado unicamente em utilizar programas comerciais de análise de estruturas é importante a compreensão do *método de iteração por subespaço*, principalmente no que concerne à formação dos vetores de partida e à verificação da obtenção dos autopares desejados, além da compreensão da geração dos *vetores de Ritz* e *vetores de Lanczos*, tema da Seção 9-7.

9-1 PROPRIEDADES FUNDAMENTAIS

O problema de autovalor de um modelo de n graus de liberdade tem a forma generalizada simétrica obtida na Seção 5-5, que se repete:

$$\mathbf{K}\Phi = \mathbf{M}\Phi\Omega \quad (9-1.1)$$

onde \mathbf{K} é a *matriz de rigidez restringida*, \mathbf{M} é a *matriz de massa*, Φ é a *matriz modal* normalizada em relação à matriz de massa e Ω é a *matriz espectral*.¹ As colunas de Ω são os

¹ Os autovalores são também denominados *valores próprios*, e os correspondentes autovetores, chamados de *vetores próprios*. No caso de matriz de rigidez não restringida, têm-se autovalores nulos em número igual ao dos modos de corpo rígido do correspondente modelo. Esses modos são as soluções não triviais de $(\mathbf{K}\Phi = \mathbf{0})$.

autovetores, modos naturais de vibração, e os coeficientes diagonais de $\mathbf{\Omega}$ são os autovalores, quadrados das frequências naturais de vibração.

Como foi exposto no Capítulo 6, usualmente basta determinar os p primeiros autopares, sendo $p \ll n$, quando então se diz resolução parcial do problema de autovalor que passa a ser escrito com a notação:²

$$\mathbf{K}\Phi_p = \mathbf{M}\Phi_p\mathbf{\Omega}_p \quad (9-1.2)$$

Contudo, antes de buscar a resolução deste problema é necessário o conhecimento de propriedades fundamentais da seguinte *forma reduzida* ou *standard* do problema de autovalor:

$$\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \lambda\hat{\mathbf{x}} \quad (9-1.3a)$$

$$\rightarrow (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\hat{\mathbf{x}} = 0 \quad (9-1.3b)$$

em que \mathbf{A} é uma matriz de ordem $n \times n$, simétrica e de coeficientes reais, \mathbf{I} é uma matriz identidade, $\hat{\mathbf{x}}$ é um autovetor e λ , o autovalor associando ao mesmo.

A expressão anterior tem a forma expandida:

$$\begin{bmatrix} A_{11} - \lambda & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} - \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{x}_1 \\ \vdots \\ \hat{x}_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (9-1.4)$$

que é um sistema de equações algébricas lineares homogêneas. Portanto, só há solução não trivial em caso de matriz dos coeficientes singular, o que implica a *equação característica*

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) \equiv b_n\lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + b_1\lambda + b_0 = 0 \quad (9-1.5)$$

onde b_i são escalares dependentes dos coeficientes daquela matriz. A resolução dessa equação, a menos de casos muito particulares de baixa ordem, requer o uso de método iterativo.³

As n raízes do correspondente polinômio característico são os autovalores da matriz \mathbf{A} , considerados em ordem crescente de magnitude, $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \lambda_j \leq \cdots \lambda_n$.

Esses autovalores conduzem à seguinte classificação da matriz \mathbf{A} :

$$\text{Se } \lambda_j, \text{ com } j=1, 2, \dots, n, \quad \begin{cases} > 0 \rightarrow \text{matriz positiva-definida} \\ \geq 0 \rightarrow \text{matriz positiva semidefinida} \\ < 0 \rightarrow \text{matriz negativa-definida} \\ \leq 0 \rightarrow \text{matriz negativa semidefinida} \end{cases}$$

² Em instabilidade elástica clássica, tem-se a forma generalizada ($\mathbf{K}_G\phi = \lambda\mathbf{K}\phi$), em que \mathbf{K}_G é a matriz de rigidez geométrica, \mathbf{K} é a matriz de rigidez clássica, ϕ é um modo de instabilidade elástica, e o autovalor λ é o fator que deve multiplicar o vetor de forças nodais para que se tenha instabilidade.

³ A direta determinação das soluções da equação característica requer grande número de operações numéricas e é muito sensível a erros de aproximação, sendo indicada, portanto, apenas para problema de autovalor de reduzida dimensão.

Para cada autovalor λ_j , tem-se o sistema de equações algébricas:

$$(\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I}) \hat{\mathbf{x}}_j = \mathbf{0} \quad (9-1.6)$$

Em caso da matriz $(\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I})$ ter posto $(n-1)$, basta arbitrar um dos coeficientes do autovetor $\hat{\mathbf{x}}_j$ para que os demais coeficientes desse vetor sejam determináveis. Assim, o autovalor λ_j está associado a um autovetor, o par autovalor-autovetor é denominado *autopar* e denotado por $(\lambda_j, \hat{\mathbf{x}}_j)$.⁴

Contudo, como qualquer múltiplo escalar de $\hat{\mathbf{x}}_j$ é também solução do sistema anterior, qualquer múltiplo escalar de um autovetor tem o mesmo significado matemático e define a mesma direção no espaço n -dimensional. Assim, para se ter solução única, normaliza-se o autovetor. E entre os diversos procedimentos de normalização, pode-se utilizar a condição do *comprimento Euclidiano* (raiz quadrada da soma dos quadrados dos seus coeficientes) ser igual à unidade:

$$\mathbf{x}_j = \frac{\hat{\mathbf{x}}_j}{(\hat{\mathbf{x}}_j^T \hat{\mathbf{x}}_j)^{1/2}} \rightarrow \mathbf{x}_j = \frac{\hat{\mathbf{x}}_j}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \hat{x}_{ij}^2}} \quad (9-1.7)$$

onde \hat{x}_{ij} é o i -ésimo coeficiente do autovetor não normalizado $\hat{\mathbf{x}}_j$.

Para a resolução do sistema de equações algébricas representado pela Equação 9-1.6 em caso de a matriz dos coeficientes $(\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I})$ ter posto $(n-m)$, sendo m um número inteiro maior do que a unidade, é necessário arbitrar m coeficientes do vetor $\hat{\mathbf{x}}_j$, e diz-se que o autovalor λ_j tem *grau de multiplicidade* m . Assim, os correspondentes autovetores não são determinados de forma única com um procedimento de normalização, e qualquer combinação linear desses vetores é também um autovetor associado a λ_j . Contudo, como aqueles coeficientes podem ser escolhidos de maneira a se ter m autovetores linearmente independentes (no presente caso de matriz simétrica), esses autovetores definem de forma única um subespaço m -dimensional em que qualquer vetor é também autovetor da matriz \mathbf{A} .

Com o agrupamento dos autovetores normalizados na chamada *matriz modal*:

$$\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \cdots \ \mathbf{x}_n] \quad (9-1.8a)$$

e dos autovalores na denominada *matriz espectral*:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (9-1.8b)$$

o problema de autovalor *standard* se apresenta com a forma:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{X}\mathbf{\Lambda} \quad (9-1.9)$$

O determinante dessa forma matricial fornece:

$$\det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{X} = \det \mathbf{X} \cdot \det \mathbf{\Lambda} \rightarrow \det \mathbf{A} = \prod_{j=1}^n \lambda_j \quad (9-1.10)$$

⁴ Com aritmética complexa e no caso de a matriz \mathbf{A} ser simétrica e real, pode-se provar que esse par é sempre real. Além disso, pode-se demonstrar que, no presente caso de matriz simétrica, os n autovetores são linearmente independentes entre si.

Isto é, o determinante da matriz \mathbf{A} é igual ao produto de seus autovalores.⁵ Consequentemente, toda matriz (simétrica) positiva semidefinida tem necessariamente determinante nulo, que é o caso de matriz de rigidez não restringida.

A matriz modal de matriz simétrica é ortogonal. Isso pode ser provado com a transposição da Equação 9-1.9, $\mathbf{X}^T \mathbf{A}^T = \mathbf{A} \mathbf{X}^T$, e a pré e pós-multiplicação desse resultado por \mathbf{X}^{-T} , em obtenção de:⁶

$$\mathbf{X}^{-T} \mathbf{X}^T \mathbf{A}^T \mathbf{X}^{-T} = \mathbf{X}^{-T} \mathbf{A} \mathbf{X}^T \mathbf{X}^{-T} \rightarrow \mathbf{A}^T \mathbf{X}^{-T} = \mathbf{X}^{-T} \mathbf{A} \quad (9-1.11)$$

Assim, por se tratar de matriz simétrica ($\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}^T$), e como a matriz modal \mathbf{X} é única, as Equações 9-1.9 e 9-1.11 fornecem:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}^{-T} \rightarrow \mathbf{X}^T = \mathbf{X}^{-1} \quad (9-1.12)$$

que é a definição de matriz ortogonal.⁷ Logo, $(\mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_j = \delta_{ij})$ e portanto, os autovetores de matriz simétrica são mutuamente ortogonais.

Com essa propriedade e com base na Equação 9-1.9, obtém-se:

$$\mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{X}^T \mathbf{X} \mathbf{\Lambda} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{\Lambda} \\ \mathbf{x}_j^T \mathbf{A} \mathbf{x}_i = \delta_{ij} \lambda_j \end{cases} \quad (9-1.13)$$

e se diz que os autovetores estão *ortonormalizados*.⁸

Também com base na Equação 9-1.9, obtém-se:

$$\mathbf{A} = \mathbf{X} \mathbf{\Lambda} \mathbf{X}^{-1} = \mathbf{X} \mathbf{\Lambda} \mathbf{X}^T \rightarrow \mathbf{A} = \sum_{j=1}^n \lambda_j \mathbf{x}_j \mathbf{x}_j^T \quad (9-1.14)$$

o que é denominado *decomposição espectral* da matriz \mathbf{A} .⁹

Pelo fato de os n autovetores \mathbf{x}_j serem linearmente independentes, eles formam uma base completa no espaço n -dimensional e, portanto, qualquer vetor \mathbf{x}' de ordem n pode ser expresso pela combinação linear:

$$\mathbf{x}' = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{x}_j \quad (9-1.15)$$

onde α_j são escalares.

⁵ Essa conclusão se aplica também a matrizes quadradas não simétricas.

⁶ Como os autovetores de qualquer matriz simétrica são linearmente independentes, a matriz modal sempre admite inversa.

⁷ O determinante de uma matriz ortogonal é igual a 1 ou a -1, e o primeiro caso é de matriz de rotação.

⁸ Todo autovetor de *comprimento euclidiano* unitário satisfaz à Equação 9-1.13, mas nem todo vetor que satisfaz a essas expressões é autovetor de uma matriz simétrica. Contudo, no caso de n vetores linearmente independentes satisfazerem a tal equação, trata-se dos autovetores de uma matriz simétrica de ordem $n \times n$.

⁹ Essa decomposição evidencia que a representação computacional da matriz \mathbf{A} com um determinado número de algarismos significativos afeta primordialmente a representação do primeiro autotar, o que se relaciona com o condicionamento da matriz expresso pela razão λ_n/λ_1 , chamada de *número de condicionamento*.

Considera-se, agora, a matriz transformada

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \alpha \mathbf{I} \quad (9-1.16a)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \alpha \mathbf{I} \quad (9-1.16b)$$

onde α é um escalar. Com a substituição dessa nova expressão de matriz na Equação 9-1.9, obtém-se:

$$(\mathbf{A}' + \alpha \mathbf{I})\mathbf{X} = \mathbf{X}\Lambda \rightarrow \mathbf{A}'\mathbf{X} = \mathbf{X}(\Lambda - \alpha \mathbf{I}) \quad (9-1.17)$$

Isto é, a matriz \mathbf{A}' tem os mesmos autovetores que a matriz original \mathbf{A} e tem os autovalores:

$$\Lambda' = \Lambda - \alpha \mathbf{I} \rightarrow \lambda'_j = \lambda_j - \alpha \quad (9-1.18)$$

Diz-se, então, *deslocamento da origem do espectro dos autovalores* ou *deslocamento espectral*, e como ilustra a Figura 9-1.1, com $\alpha < 0$ ocorre deslocamento para a esquerda, e com $\alpha > 0$, para a direita.¹⁰

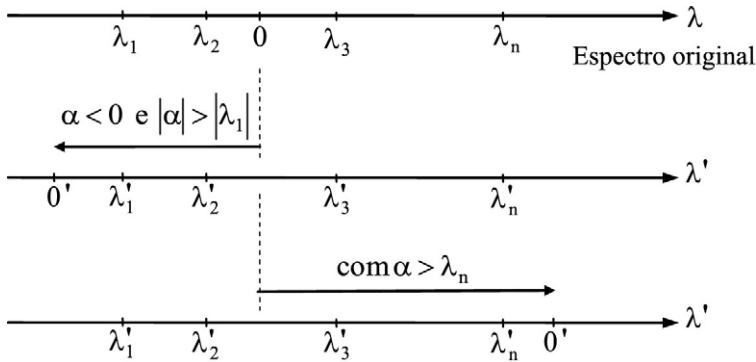


FIGURA 9-1.1 Deslocamento espectral.

Considera-se, agora, a forma generalizada do problema de autovalor ($\mathbf{K}\Phi = \mathbf{M}\Phi\Omega$), e de maneira semelhante à Equação 9-1.16a define-se a seguinte matriz:

$$\mathbf{K}' = \mathbf{K} - \alpha \mathbf{M} \quad (9-1.19)$$

Com isso, chega-se ao novo problema de autovalor:

$$(\mathbf{K}' + \alpha \mathbf{M})\Phi = \mathbf{M}\Phi\Omega \rightarrow \mathbf{K}'\Phi = \mathbf{M}\Phi(\Omega - \alpha \mathbf{I}) \rightarrow \mathbf{K}'\Phi = \mathbf{M}\Phi\Omega' \quad (9-1.20)$$

em que:

$$\Omega' = \Omega - \alpha \mathbf{I} \rightarrow \lambda'_j = \lambda_j - \alpha = \omega_j^2 - \alpha \rightarrow \omega_j^2 = \lambda'_j + \alpha \quad (9-1.21)$$

Logo, escolhido α como um escalar positivo, a Equação 9-1.19 expressa um deslocamento da origem dos autovalores do problema de autovalor generalizado para a direita.

¹⁰ Deslocamento da origem dos autovalores é útil para obter matriz não singular a partir de uma matriz singular e para acelerar convergência em métodos em que esta dependa do afastamento entre autovalores.

A seguir, considera-se uma matriz quadrada não singular \mathbf{T} , de mesma ordem que a matriz \mathbf{A} , para escrever a partir do problema de autovalor reduzido expresso na Equação 9-1.9:

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{X}\Lambda \rightarrow (\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T})(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{X}) = (\mathbf{T}^{-1}\mathbf{X})\Lambda$$

que com as notações:

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} \quad (9-1.22a)$$

e

$$\mathbf{X}^* = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{X} \quad (9-1.22b)$$

fornece o novo problema de autovalor de forma reduzida:

$$\mathbf{A}^*\mathbf{X}^* = \mathbf{X}^*\Lambda \quad (9-1.23)$$

A transformação expressa na Equação 9-1.22a é dita *similar* porque resulta em uma matriz de mesmos autovalores que a matriz original \mathbf{A} , e de autovetores obtidos a partir de Equação 9-1.22b: ¹¹

$$\mathbf{X} = \mathbf{T}\mathbf{X}^* \quad (9-1.24)$$

Em caso da matriz \mathbf{T} ser ortogonal, Equação 9-1.22a se particulariza na expressão:

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{T}^T\mathbf{A}\mathbf{T} \quad (9-1.25)$$

que é denominada transformação similar ortogonal ou transformação congruente. ¹²

Na sequência, a partir da forma generalizada ($\mathbf{K}\Phi = \mathbf{M}\Phi\Omega$) e de maneira a conservar simetria, obtém-se uma correspondente forma reduzida de problema de autovalor. ¹³ Portanto, considera-se, inicialmente, o caso de matriz de massa diagonal de coeficientes positivos para escrever a partir daquela forma:

$$\mathbf{K}\mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{M}^{1/2}\Phi = \mathbf{M}^{1/2}\mathbf{M}^{1/2}\Phi\Omega \rightarrow (\mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{K}\mathbf{M}^{-1/2})(\mathbf{M}^{1/2}\Phi) = (\mathbf{M}^{1/2}\Phi)\Omega$$

Logo, com as notações:

$$\mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{K}\mathbf{M}^{-1/2} \quad (9-1.26a)$$

e

$$\mathbf{X} = \mathbf{M}^{1/2}\Phi \quad (9-1.26b)$$

obtém-se a forma reduzida:

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{X}\Omega \quad (9-1.27)$$

¹¹ Os chamados *métodos de transformação* de resolução do problema de autovalor são baseados em sucessões de transformações similares que fornecem matrizes transformadas cujos autovalores sejam facilmente obtidos. Tais métodos são indicados para problemas de autovalor de reduzidas dimensões e foram muito utilizados no passado.

¹² Um caso particular é a transformação congruente expressa na Equação 1-5.13a em que se tem a diagonalização da matriz \mathbf{A} em sua matriz espectral.

¹³ Uma das vantagens dessa obtenção é que as propriedades do problema de autovalor generalizado podem ser comprovadas a partir da correspondente forma reduzida.

em que a matriz \mathbf{A} é simétrica, de mesma esparsidade que a matriz \mathbf{K} . Essa forma tem os mesmos autovalores que a forma generalizada original, cuja matriz modal se escreve a partir da Equação 9-1.26b:

$$\Phi = \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{X} \quad (9-1.28)$$

Considera-se, agora, matriz de rigidez positiva-definida para se ter em aritmética real a fatoração:

$$\mathbf{K} = \mathbf{U}^T \mathbf{U} \quad (9-1.29)$$

onde \mathbf{U} é uma matriz triangular superior de coeficiente diagonais positivos, denominada *fator de Cholesky*.¹⁴ Com a substituição dessa fatoração na referida forma generalizada, obtém-se:

$$\mathbf{U}^T \mathbf{U} \Phi = \mathbf{M} \Phi \Omega \rightarrow \mathbf{U} \Phi = (\mathbf{U}^{-T} \mathbf{M} \mathbf{U}^{-1})(\mathbf{U} \Phi) \Omega$$

Logo, com as seguintes notações:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{U}^{-T} \mathbf{M} \mathbf{U}^{-1} \quad (9-1.30a)$$

e

$$\mathbf{X}' = \mathbf{U} \Phi \quad (9-1.30b)$$

chega-se à nova forma reduzida:¹⁵

$$\mathbf{A}' \mathbf{X}' = \mathbf{X}' \Omega^{-1} \quad (9-1.31)$$

Essa matriz \mathbf{A}' é simétrica, denominada *matriz dinâmica*, tem autovalores recíprocos aos da forma generalizada original e matriz modal obtida a partir da Equação 9-1.30b:

$$\Phi = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{X}' \quad (9-1.32)$$

E para desenvolver redução semelhante à anterior, em caso de matriz de massa positiva-definida, considera-se a fatoração:¹⁶

$$\mathbf{M} = \mathbf{U}^{*T} \mathbf{U}^* \quad (9-1.33)$$

onde \mathbf{U}^* é também um *fator de Cholesky*, matriz triangular superior de coeficientes diagonais positivos.

Com essa fatoração, a referida forma generalizada fornece:

$$\mathbf{K} \Phi = \mathbf{U}^{*T} \mathbf{U}^* \Phi \Omega \rightarrow (\mathbf{U}^{*-T} \mathbf{K} \mathbf{U}^{*-1})(\mathbf{U}^* \Phi) = (\mathbf{U}^* \Phi) \Omega$$

que com as notações:

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{U}^{*-T} \mathbf{K} \mathbf{U}^{*-1} \quad (9-1.34a)$$

¹⁴ Nome em referência ao cartógrafo militar francês André-Louis Cholesky (1975-1918).

¹⁵ Essa redução fornece uma matriz \mathbf{A}' simétrica cheia, e, por essa razão, não é indicada em caso de grande número de graus de liberdade.

¹⁶ Com o uso de matriz de massa consistente de barras e elementos finitos, a matriz de massa do modelo estrutural é positiva-definida.

e

$$\mathbf{X}^* = \mathbf{U}^* \Phi \quad (9-1.34b)$$

se transforma em:¹⁷

$$\mathbf{A}^* \mathbf{X}^* = \mathbf{X}^* \Omega \quad (9-1.35)$$

Nessa última forma reduzida, a matriz \mathbf{A}^* é também simétrica, tem os mesmos autovalores que a forma generalizada original cuja matriz modal é obtida a partir da Equação 9-1.34b:

$$\Phi = \mathbf{U}^{*-1} \mathbf{X}^* \quad (9-1.36)$$

Além disso, como com a normalização de comprimento euclidiano unitário a matriz modal \mathbf{X}^* é ortogonal, a Equação 9-1.35 permite escrever ($\mathbf{X}^{*T} \mathbf{A}^* \mathbf{X}^* = \Omega$), que fornece com base nas notações da Equação 9-1.34:

$$(\Phi^T \mathbf{U}^{*T}) (\mathbf{U}^{*-T} \mathbf{K} \mathbf{U}^{*-1}) (\mathbf{U}^* \Phi) = \Omega \rightarrow \Phi^T \mathbf{K} \Phi = \Omega \quad (9-1.37)$$

Esse resultado expressa a diagonalização da matriz \mathbf{K} na correspondente matriz espectral, através de uma transformação congruente. Além disso, com a substituição de ($\mathbf{K} \Phi = \mathbf{M} \Phi \Omega$) nessa última equação, obtém-se:

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi \Omega = \Omega \rightarrow \Phi^T \mathbf{M} \Phi = \mathbf{I} \quad (9-1.38)$$

que expressa a diagonalização da matriz \mathbf{M} em uma matriz identidade. A obtenção dessa normalização foi apresentada na Seção 5-5 e os modos de vibração são referidos como *M-ortonormalizados*.

Pode-se verificar que as Equações 9-1.37 e 9-1.38 se aplicam também a uma matriz \mathbf{K} singular, isto é, que contém deslocamentos de corpo rígido.

EXEMPLO 9-1.1

Para comprovar numericamente algumas das propriedades apresentadas, considera-se a treliça da Figura E9-1.1, com barras de área de seção transversal de 15 cm², módulo de elasticidade de 205 GPa e peso específico de 77 kN/m³.

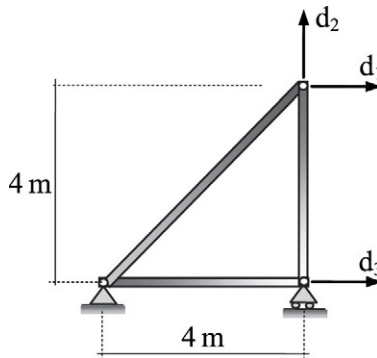


FIGURA E9-1.1 Treliça plana.

¹⁷ Essa redução será utilizada posteriormente para estender, à forma generalizada, propriedades da forma reduzida do problema de autovalor.

Para essa treliça e com base no apresentado no Capítulo 5, chega-se às seguintes matrizes de rigidez e de massa discreta, nas unidades N, kg e m:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2,7179 \cdot 10^7 & 2,7179 \cdot 10^7 & 0 \\ 2,7179 \cdot 10^7 & 10,405 \cdot 10^7 & 0 \\ 0 & 0 & 7,6875 \cdot 10^7 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 56,848 & 0 & 0 \\ 0 & 56,848 & 0 \\ 0 & 0 & 47,095 \end{bmatrix}$$

Essas matrizes formam o problema de autovalor ($\mathbf{K}\Phi = \mathbf{M}\Phi\Omega$) e, para obter a forma reduzida ($\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{X}\Omega$), utiliza-se a Equação 9-1.26a:

$$\mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{K} \mathbf{M}^{-1/2} = \begin{bmatrix} 4,7810 \cdot 10^5 & 4,7810 \cdot 10^5 & 0 \\ 4,7810 \cdot 10^5 & 1,8303 \cdot 10^6 & 0 \\ 0 & 0 & 1,6324 \cdot 10^6 \end{bmatrix}$$

A resolução do problema autovalor ($\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{X}\Omega$) fornece a matriz espectral:

$$\Omega = \begin{bmatrix} 3,2614 \cdot 10^5 & 0 & 0 \\ 0 & 1,6323 \cdot 10^6 & 0 \\ 0 & 0 & 1,9823 \cdot 10^6 \end{bmatrix}$$

que corresponde à matriz modal normalizada quanto ao *comprimento euclidiano* unitário:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -0,953 \, 02 & 0 & -0,302 \, 91 \\ 0,302 \, 91 & 0 & -0,953 \, 02 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

É imediato verificar que essa matriz verifica a propriedade expressa na Equação 9-1.13:

$$\mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 3,2614 \cdot 10^5 & 0 & \approx 0 \\ 0 & 1,6323 \cdot 10^6 & 0 \\ \approx 0 & 0 & 1,9823 \cdot 10^6 \end{bmatrix} = \Omega$$

Além disso, com base na Equação 9-1.28 obtém-se a matriz modal do problema de autovalor generalizado original ($\mathbf{K}\Phi = \mathbf{M}\Phi\Omega$):

$$\Phi = \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{X} = \begin{bmatrix} -0,126 \, 39 & 0 & -0,040 \, 17 \\ 0,040 \, 17 & 0 & -0,012 \, 64 \\ 0 & 0,14572 & 0 \end{bmatrix}$$

Também é imediato verificar que essa matriz modal verifica as propriedades expressas nas Equações 9-1.37 e 9-1.38:

$$\Phi^T \mathbf{K} \Phi = \begin{bmatrix} 3,2614 \cdot 10^5 & \approx 0 & 0 \\ 0 & 1,6323 \cdot 10^6 & 0 \\ 0 & 0 & 1,9823 \cdot 10^6 \end{bmatrix},$$

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, uma vez que a matriz modal da forma reduzida seja normalizada quanto ao *comprimento euclidiano* unitário, a correspondente matriz modal da forma generalizada do problema de autovalor é normalizada quanto à matriz de massa.

9-2 QUOCIENTE DE RAYLEIGH E ANÁLISE DE RAYLEIGH-RITZ

O *quociente de Rayleigh* fornece uma estimativa da frequência fundamental de um modelo de sistema mecânico, sem a necessidade de resolução de problema de autovalor. Além disso, tem importância por constituir a base para a formulação da *análise de Rayleigh-Ritz*, que, por sua vez, é fundamental ao *método de iteração por subespaço*. A seguir, esse quociente é apresentado em forma reduzida e, posteriormente, em forma generalizada.

Com a pré-multiplicação do problema de autovalor expresso na Equação 9-1.3a por $\hat{\mathbf{x}}^T$, obtém-se:

$$\hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} = \lambda \hat{\mathbf{x}}^T \hat{\mathbf{x}} \rightarrow \lambda = \frac{\hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}}{\hat{\mathbf{x}}^T \hat{\mathbf{x}}} \quad (9-2.1)$$

À semelhança da expressão anterior, define-se o *quociente de Rayleigh* como:

$$\rho(\mathbf{x}') = \frac{\mathbf{x}'^T \mathbf{A} \mathbf{x}'}{\mathbf{x}'^T \mathbf{x}'} \quad (9-2.2)$$

onde \mathbf{A} é uma matriz simétrica positiva-definida de ordem $n \times n$ e \mathbf{x}' é um vetor não nulo de ordem n .

Como os autovetores \mathbf{x}_j dessa matriz formam uma base completa no espaço n -dimensional, escreve-se a combinação linear:

$$\mathbf{x}' = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{x}_j \quad (9-2.3)$$

Com a substituição dessa combinação na equação que lhe precede, obtém-se:

$$\rho(\mathbf{x}') = \frac{\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{x}_j^T \right) \mathbf{A} \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{x}_i \right)}{\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{x}_j^T \right) \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{x}_i \right)} = \frac{\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{x}_j^T \right) \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i \mathbf{x}_i \right)}{\sum_{j=1}^n \alpha_j^2} = \frac{\sum_{j=1}^n \alpha_j^2 \lambda_j}{\sum_{j=1}^n \alpha_j^2} \quad (9-2.4)$$

Essa expressão evidencia que, em caso de $(\mathbf{x}' = \alpha_j \mathbf{x}_j)$, o *quociente de Rayleigh* fornece o autovalor λ_j .

Além disso, como $(\lambda_1 \neq 0)$, tem-se da expressão anterior:

$$\rho(\mathbf{x}') = \frac{\alpha_1^2 + \sum_{j=2}^n \alpha_j^2 \lambda_j / \lambda_1}{\sum_{j=1}^n \alpha_j^2} \lambda_1 \quad (9-2.5)$$

De maneira semelhante, como ($\lambda_n \neq 0$), tem-se:

$$\rho(\mathbf{x}') = \frac{\alpha_n^2 + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j^2 \lambda_j / \lambda_n}{\sum_{j=1}^n \alpha_j^2} \lambda_n \quad (9-2.6)$$

Logo, com a ordenação de autovalores $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$, as duas últimas equações evidenciam que, em caso de \mathbf{x}' ser um vetor qualquer, tem-se a propriedade:

$$\lambda_1 \leq \rho(\mathbf{x}') \leq \lambda_n \quad (9-2.7)$$

Isto é, o menor autovalor da matriz \mathbf{A} é o limite inferior do *quociente de Rayleigh*, o que ocorre quando o vetor \mathbf{x}' é o primeiro autovetor dessa matriz; e o maior autovalor da mesma matriz é o limite superior desse quociente, o que acontece em caso de \mathbf{x}' ser o último autovetor.

Considera-se, agora, um vetor \mathbf{x}' ortogonal aos primeiros $(i-1)$ autovetores da matriz \mathbf{A} , de maneira a se ter a combinação linear:

$$\mathbf{x}' = \sum_{j=i}^n \alpha_j \mathbf{x}_j \quad (9-2.8)$$

Logo, como ($\lambda_i \neq 0$), tem-se da Equação 9-2.4:

$$\rho(\mathbf{x}') = \frac{\alpha_i^2 + \sum_{j=i+1}^n \alpha_j^2 \lambda_j / \lambda_i}{\sum_{j=i}^n \alpha_j^2} \lambda_i \quad (9-2.9)$$

Assim, o mínimo valor do *quociente de Rayleigh* é igual ao autovalor λ_i , o que ocorre quando \mathbf{x}' for igual ao i -ésimo autovetor da matriz \mathbf{A} .

Alternativamente, em caso do vetor \mathbf{x}' ser ortogonal a $(i-1)$ vetores quaisquer \mathbf{y}_j , isto é, $(\mathbf{x}'^T \mathbf{y}_j = 0)$, com $(j = 1, 2, \dots, i-1)$, tem-se:

$$\lambda_i = \text{maior dos mínimos de } \rho(\mathbf{x}') \quad (9-2.10)$$

para $(i = 2, 3, \dots, n)$, o que é denominado *teorema do maior dos mínimos do quociente de Rayleigh*.

Para ilustrar esse teorema, considera-se o espaço tridimensional, que os três autovalores sejam distintos e que $(\mathbf{x}'^T \mathbf{y}_1 = 0)$, como ilustra a Figura 9-2.1. É fácil identificar que, ao se alterar o vetor \mathbf{y}_1 nesse espaço, têm-se as seguintes condições de mínimo:

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x}') &= \lambda_2 \quad \text{quando} \quad \mathbf{y}_1 = \alpha'_1 \mathbf{x}_1 \quad \text{e} \quad \mathbf{x}' = \alpha'_2 \mathbf{x}_2 \\ \rho(\mathbf{x}') &= \lambda_1 \quad \text{quando} \quad \mathbf{y}_1 = \alpha'_2 \mathbf{x}_2 \quad \text{e} \quad \mathbf{x}' = \alpha'_1 \mathbf{x}_1 \\ \rho(\mathbf{x}') &= \lambda_1 \quad \text{quando} \quad \mathbf{y}_1 = \alpha'_3 \mathbf{x}_3 \quad \text{e} \quad \mathbf{x}' = \alpha'_1 \mathbf{x}_1 \end{aligned}$$

Ou seja, sendo \mathbf{y}_1 um vetor qualquer, o máximo dos mínimos de $\rho(\mathbf{x}')$ é igual ao autovalor λ_2 . Com a condição adicional de $(\mathbf{x}'^T \mathbf{y}_2 = 0)$, em que \mathbf{y}_2 é qualquer vetor diferente de múltiplo escalar de \mathbf{y}_1 , o máximo dos mínimos de $\rho(\mathbf{x}')$ é igual ao autovalor λ_3 .

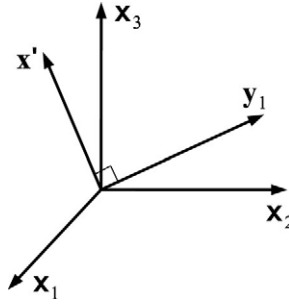


FIGURA 9-2.1 Representação de vetores no espaço tridimensional.

Considera-se, agora, uma aproximação ao i -ésimo autovetor da matriz \mathbf{A} , sob a forma:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}_i + \varepsilon \mathbf{y} \quad (9-2.11)$$

onde $0 < |\varepsilon| < 1$. Com a substituição dessa aproximação no *quociente de Rayleigh* expresso na Equação 9-2.2, obtém-se:

$$\rho(\mathbf{x}_i + \varepsilon \mathbf{y}) = \frac{(\mathbf{x}_i + \varepsilon \mathbf{y})^T \mathbf{A}(\mathbf{x}_i + \varepsilon \mathbf{y})}{(\mathbf{x}_i + \varepsilon \mathbf{y})^T (\mathbf{x}_i + \varepsilon \mathbf{y})} = \frac{\mathbf{x}_i^T \mathbf{A} \mathbf{x}_i + 2\varepsilon \mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{x}_i + \varepsilon^2 \mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{y}}{\mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_i + 2\varepsilon \mathbf{y}^T \mathbf{x}_i + \varepsilon^2 \mathbf{y}^T \mathbf{y}} \quad (9-2.12)$$

Além disso, como $\varepsilon \mathbf{y}$ é a diferença do vetor \mathbf{x}' em relação ao autovetor \mathbf{x}_i , pode-se escrever o vetor \mathbf{y} como a combinação linear dos demais autovetores da matriz \mathbf{A} :

$$\mathbf{y} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \alpha_j \mathbf{x}_j \quad (9-2.13)$$

o que, com a condição de normalização dos autovetores contida na Equação 9-1.13, fornece:

$$\mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{x}_i = 0 \quad (9-2.14)$$

Logo, com essas duas últimas expressões, a Equação 9-2.12 se reduz a:

$$\rho(\mathbf{x}_i + \varepsilon \mathbf{y}) = \frac{\lambda_i + \varepsilon^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \alpha_j^2 \lambda_j}{1 + \varepsilon^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \alpha_j^2} \quad (9-2.15)$$

Com a expansão do denominador dessa expressão em série binomial, obtém-se:

$$\rho(\mathbf{x}_i + \varepsilon \mathbf{y}) = \left(\lambda_i + \varepsilon^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \alpha_j^2 \lambda_j \right) \left(1 - \varepsilon^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \alpha_j^2 + \varepsilon^4 \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \alpha_j^2 \right)^2 + \dots \right)$$

$$\rightarrow \rho(\mathbf{x}_i + \varepsilon \mathbf{y}) = \lambda_i + \varepsilon^2 \left(\sum_{j=1, j \neq i}^n \alpha_j^2 \lambda_j - \lambda_i \sum_{j=1, j \neq i}^n \alpha_j^2 \right) + \text{termos com potências em } \varepsilon \text{ superiores a } 2$$

$$\rightarrow \boxed{\rho(\mathbf{x}_i + \varepsilon \mathbf{y}) \equiv \lambda_i + O(\varepsilon^2)}$$
 (9-2.16)

Nessa equação, $O(\varepsilon^2)$ expressa ordem ε^2 de aproximação ao autovalor λ_i . Isto é, utilizando no *quociente de Rayleigh* um vetor de aproximação ε ao autovetor \mathbf{x}_i , esse quociente fornece uma aproximação de ordem ε^2 ao autovalor λ_i , o que é denominado *propriedade de estacionariedade do quociente de Rayleigh*.

A seguir, para obter o *quociente de Rayleigh* no caso do problema de autovalor ($\mathbf{K}\Phi = \mathbf{M}\Phi\Omega$), considera-se matriz de massa positiva-definida para que seja possível a fatoração de Cholesky ($\mathbf{M} = \mathbf{U}^{*T}\mathbf{U}^*$). Com isso, obtém-se a forma reduzida expressa na Equação 9-1.35 que se repete, $\mathbf{A}^*\mathbf{X}^* = \mathbf{X}^*\Omega$, em que ($\mathbf{A}^* = \mathbf{U}^{*-T}\mathbf{K}\mathbf{U}^{*-1}$) e ($\mathbf{X}^* = \mathbf{U}^*\Phi$). E para essa última forma tem-se o quociente:

$$\rho(\mathbf{x}^*) = \frac{\mathbf{x}^{*T}\mathbf{A}^*\mathbf{x}^*}{\mathbf{x}^{*T}\mathbf{x}^*} = \frac{\mathbf{x}^{*T}(\mathbf{U}^{*-T}\mathbf{K}\mathbf{U}^{*-1})\mathbf{x}^*}{\mathbf{x}^{*T}\mathbf{x}^*}$$
 (9-2.17)

em que \mathbf{x}^* é um vetor não nulo no espaço n-dimensional em que são definidas as matrizes \mathbf{K} e \mathbf{M} .

Além disso, a exemplo da Equação 9-1.34b, escreve-se:

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{U}^*\varphi^*$$
 (9-2.18)

$$\rightarrow \varphi^* = \mathbf{U}^{*-1}\mathbf{x}^*$$
 (9-2.19)

Logo, com a substituição da Equação 9-2.18 na expressão que lhe precede, obtém-se o *quociente de Rayleigh* na forma generalizada, razão entre duas formas quadráticas:

$$\boxed{\rho(\mathbf{x}^*) = \rho(\varphi^*) = \frac{\varphi^{*T}\mathbf{K}\varphi^*}{\varphi^{*T}\mathbf{M}\varphi^*}}$$
 (9-2.20)

Nessa expressão, \mathbf{M} é uma matriz positiva-definida e φ^* um vetor não nulo.

Além disso, de maneira análoga ao desenvolvido para obter a propriedade expressa na Equação 9-2.7, chega-se à seguinte propriedade do referido quociente:

$$\boxed{\lambda_1 = \omega_1^2 \leq \rho(\varphi^*) \leq \lambda_n = \omega_n^2}$$
 (9-2.21)

e

$$\boxed{\lambda_j = \omega_j^2 = \rho(\varphi_j)}$$
 (9-2.22)

EXEMPLO 9-2.1

Para verificar numericamente a propriedade expressa na Equação 9-2.21, considera-se o sistema de quatro graus de liberdade representado na Figura E9-2.1, com ($k_1 = 2$), ($k_2 = k_3 = k_4 = 1$), ($m_1 = 2$), ($m_2 = m_3 = m_4 = 1$).

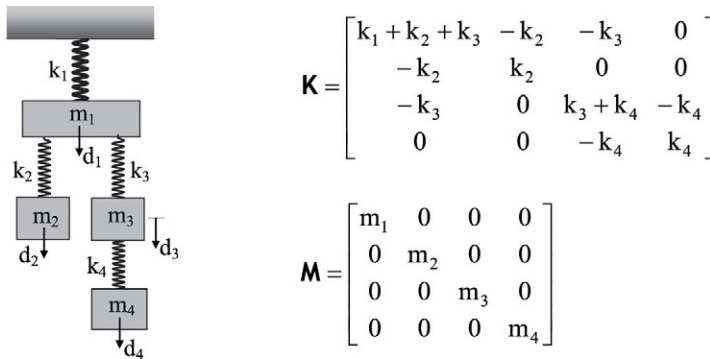


FIGURA E9-2.1 Sistema massa-mola de quatro graus de liberdade.

Com os valores especificados, chega-se às seguintes matrizes de rigidez e de massa:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

do problema de autovalor ($\mathbf{K}\Phi = \mathbf{M}\Phi\Omega$), que resolvido com o *método de Jacobi* da próxima seção, forneceu os autovalores ($\lambda_1 = 0,23729$), ($\lambda_2 = 0,68455$), ($\lambda_3 = 2,0$) e ($\lambda_4 = 3,07816$).

Com o arbítrio dos três seguintes vetores do espaço quadridimensional:

$$\Phi_1^* = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \Phi_2^* = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \Phi_3^* = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

são obtidos os seguintes *quocientes de Rayleigh*:

$$\rho(\Phi_1^*) = \frac{\Phi_1^{*T} \mathbf{K} \Phi_1^*}{\Phi_1^{*T} \mathbf{M} \Phi_1^*} = 0,4 \quad \rho(\Phi_2^*) = \frac{\Phi_2^{*T} \mathbf{K} \Phi_2^*}{\Phi_2^{*T} \mathbf{M} \Phi_2^*} = 1,667 \quad \text{e}$$

$$\rho(\Phi_3^*) = \frac{\Phi_3^{*T} \mathbf{K} \Phi_3^*}{\Phi_3^{*T} \mathbf{M} \Phi_3^*} = 1,0$$

Esses resultados verificam a referida propriedade, uma vez que se tem:

$$\lambda_1 < \rho(\Phi_1^*) < \rho(\Phi_3^*) < \rho(\Phi_2^*) < \lambda_2$$

EXEMPLO 9-2.2

Foi demonstrado que, com a utilização de um autovetor no *quociente de Rayleigh*, se obtém o correspondente autovalor. A seguir, comprova-se essa propriedade a partir do *princípio de conservação de energia*.

A energia cinética e a energia potencial de deformação elástica têm, respectivamente, as formas ($E_c = \dot{\mathbf{d}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{d}}/2$) e ($E_{pe} = \mathbf{d}^T \mathbf{K} \mathbf{d}/2$).

Em caso de vibração livre não amortecida, tem-se a solução harmônica:

$$\mathbf{d} = \boldsymbol{\varphi}_j \cos(\omega_j t - \phi_j) \rightarrow \dot{\mathbf{d}} = -\boldsymbol{\varphi}_j \omega_j \sin(\omega_j t - \phi_j)$$

Logo, escrevem-se os valores máximos das referidas energias:

$$\begin{cases} E_{c/máx.} = \boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_j \omega_j^2 / 2 \\ E_{pe/máx.} = \boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}_j / 2 \end{cases}$$

Assim, com a condição de ($E_{c/máx.} = E_{pe/máx.}$), obtém-se o *quociente de Rayleigh*:

$$\omega_j^2 = \lambda_j = \frac{\boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}_j}{\boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_j}$$

Essa propriedade é muito utilizada em obtenção de estimativa para a frequência fundamental de modelo de multigráus de liberdade, no denominado *método de Rayleigh*. Para isso, arbitra-se uma aproximação ao primeiro modo de vibração, e a expressão anterior fornece, com melhor acurácia, a correspondente frequência.¹⁸

Em retorno ao estudo do *quociente de Rayleigh*, considera-se o caso em que um vetor \mathbf{x}^* seja ortogonal aos primeiros ($i-1$) autovetores \mathbf{x}_j^* da matriz \mathbf{A}^* considerada anteriormente. Isto é, que se tenha ($\mathbf{x}^{*T} \mathbf{x}_j^* = 0$), com ($j = 1, 2, \dots, i-1$), quando, então, as Equações 9-1.34b e 9-2.18 fornecem ($\boldsymbol{\varphi}^{*T} \mathbf{U}^{*T} \mathbf{U}^* \boldsymbol{\varphi}_j = 0$). Logo, tendo-se em vista a Equação 9-1.33, obtém-se:

$$\boldsymbol{\varphi}^{*T} \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_j = 0 \quad (9-2.23)$$

Assim, o mínimo valor de $\rho(\boldsymbol{\varphi}^*)$ é igual a ($\lambda_i = \omega_i^2$), o que ocorre quando o vetor $\boldsymbol{\varphi}^*$ é múltiplo escalar do i -ésimo autovetor de ($\mathbf{K}\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{M}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Omega}$).

Além disso, de forma semelhante ao procedimento anterior, chega-se ao *teorema do maior dos mínimos do quociente de Rayleigh generalizado*, que se escreve:

$$\lambda_i = \omega_i^2 = \text{maior dos mínimos de } \rho(\boldsymbol{\varphi}^*) \quad (9-2.24)$$

para ($i = 2, 3, \dots, n$), e em caso de $\boldsymbol{\varphi}^*$ ser um vetor que satisfaça às condições de ortogonalidade ($\boldsymbol{\varphi}^{*T} \mathbf{M} \mathbf{y}_j = 0$), com ($j = 1, 2, \dots, i-1$) e \mathbf{y}_j arbitrário.

No desenvolvimento seguinte, o *quociente de Rayleigh* é expandido para simultâneo uso de vários vetores, com o objetivo de se obterem aproximações para um conjunto de autopares da forma generalizada ($\mathbf{K}\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{M}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Omega}$). É a denominada *análise de Rayleigh-Ritz*.

Considera-se um vetor $\boldsymbol{\varphi}_j^*$ definido pela combinação linear:

$$\boldsymbol{\varphi}_j^* = \sum_{i=1}^p \alpha_i \mathbf{x}_i \quad (9-2.25)$$

em que α_i são escalares a serem determinados, denominados *coordenadas de Ritz*, e os p vetores \mathbf{x}_i são linearmente independentes entre si, chamados de *vetores de Ritz*.

¹⁸ O arbítrio de uma aproximação ao primeiro modo de vibração acarreta restrições para manter o equilíbrio, o que enrijece o sistema estrutural e implica aproximação à frequência fundamental por valor superior.

Esses vetores formam uma *base de Ritz* no espaço vetorial p -dimensional de notação E_p , no qual está contido o espaço vetorial inicial E_n , definido pelos n autovetores $\boldsymbol{\varphi}_j$ da referida forma generalizada, assim como o vetor $\boldsymbol{\varphi}_j^*$ está contido no subespaço E_p .

Com as notações:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha}_j = [\alpha_1 \cdots \alpha_i \cdots \alpha_p]^T \\ \mathbf{X} = [\mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{x}_i \cdots \mathbf{x}_p] \end{cases} \quad (9-2.26)$$

a combinação linear anterior se escreve com a nova forma

$$\boldsymbol{\varphi}_j^* = \mathbf{X}\boldsymbol{\alpha}_j \quad (9-2.27)$$

São procurados p vetores $\boldsymbol{\varphi}_j^*$ que melhor se aproximem de p autovetores do problema $(\mathbf{K}\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{M}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Omega})$, do que os p *vetores de Ritz* arbitrados. Para isso, com o vetor $\boldsymbol{\varphi}_j^*$ definido pela combinação anterior, o *quociente de Rayleigh* expresso na Equação 9-2.20 se escreve:

$$\rho(\boldsymbol{\varphi}_j^*) = \frac{\boldsymbol{\alpha}_j^T \mathbf{X}^T \mathbf{K} \mathbf{X} \boldsymbol{\alpha}_j}{\boldsymbol{\alpha}_j^T \mathbf{X}^T \mathbf{M} \mathbf{X} \boldsymbol{\alpha}_j} \rightarrow \rho(\boldsymbol{\varphi}_j^*) = \frac{\boldsymbol{\alpha}_j^T \mathbf{K}^* \boldsymbol{\alpha}_j}{\boldsymbol{\alpha}_j^T \mathbf{M}^* \boldsymbol{\alpha}_j} \quad (9-2.28)$$

onde são adotadas as notações:

$$\begin{cases} \mathbf{K}^* = \mathbf{X}^T \mathbf{K} \mathbf{X} \\ \mathbf{M}^* = \mathbf{X}^T \mathbf{M} \mathbf{X} \end{cases} \quad (9-2.29)$$

e se supõe que o produto matricial $\boldsymbol{\alpha}_j^T \mathbf{M}^* \boldsymbol{\alpha}_j$ seja não nulo. As matrizes \mathbf{K}^* e \mathbf{M}^* , simétricas de ordem $p \times p$, são ditas projeções das matrizes \mathbf{K} e \mathbf{M} no subespaço definido pelos *vetores de Ritz*.

Além disso, o quociente expresso na Equação 9-2.28 fornece:

$$\rho(\boldsymbol{\varphi}_j^*) = \frac{\sum_{i=1}^p \sum_{\ell=1}^p \alpha_i \alpha_\ell \mathbf{K}_{i\ell}^*}{\sum_{i=1}^p \sum_{\ell=1}^p \alpha_i \alpha_\ell \mathbf{M}_{i\ell}^*} = \frac{a}{b} \quad (9-2.30)$$

em que “a” e “b” são escalares e onde são adotadas as notações:

$$\mathbf{K}_{i\ell}^* = \mathbf{x}_i^T \mathbf{K} \mathbf{x}_\ell \quad (9-2.31a)$$

e

$$\mathbf{M}_{i\ell}^* = \mathbf{x}_i^T \mathbf{M} \mathbf{x}_\ell \quad (9-2.31b)$$

O mínimo do quociente $\rho(\boldsymbol{\varphi}_j^*)$ é obtido com a condição de $(\partial \rho(\boldsymbol{\varphi}_j^*) / \partial \alpha_i = 0)$, para $(i = 1, 2, \dots, p)$:

$$\frac{\partial \rho(\boldsymbol{\varphi}_j^*)}{\partial \alpha_i} = \frac{2b \sum_{\ell=1}^p \alpha_\ell \mathbf{K}_{i\ell}^* - 2a \sum_{\ell=1}^p \alpha_\ell \mathbf{M}_{i\ell}^*}{b^2} = 0 \rightarrow \frac{\sum_{\ell=1}^p \alpha_\ell \mathbf{K}_{i\ell}^*}{\sum_{\ell=1}^p \alpha_\ell \mathbf{M}_{i\ell}^*} = \frac{a}{b} \quad (9-2.32)$$

Logo, com base nas Equações 9-2.30 e 9-2.32, tem-se:

$$\begin{aligned} \rho(\Phi_j^*) &= \frac{\sum_{\ell=1}^p \alpha_\ell K_{i\ell}^*}{\sum_{\ell=1}^p \alpha_\ell M_{i\ell}^*} \rightarrow \sum_{\ell=1}^p \alpha_\ell K_{i\ell}^* = \sum_{\ell=1}^p \rho(\Phi_j^*) \alpha_\ell M_{i\ell}^* \\ \rightarrow \sum_{\ell=1}^p \alpha_\ell (K_{i\ell}^* - \rho(\Phi_j^*) M_{i\ell}^*) &= 0 \end{aligned} \quad (9-2.33)$$

Essa última expressão, com $(i = 1, 2, \dots, p)$ e a notação $\rho_j = \rho(\Phi_j^*)$, fornece:

$$\alpha_j^T (K^* - \rho_j M^*) = 0^T \rightarrow \boxed{K^* \alpha_j = \rho_j M^* \alpha_j} \quad (9-2.34)$$

que é um problema de autovalor de p soluções (ρ_j, α_j) .

Além disso, com a condição de ortonormalização dos autovetores do problema anterior, $(\alpha_j^T M^* \alpha_i = \delta_{ij})$ e a Equação 9-2.29, obtém-se $(\alpha_j^T X^T M X \alpha_i = \delta_{ij})$. Logo, com a Equação 9-2.27 chega-se a:

$$\Phi_j^* M \Phi_i^* = \delta_{ij} \quad (9-2.35)$$

que mostra que os vetores Φ_j^* , obtidos a partir dos autovetores normalizados α_j , são vetores M -ortonormalizados.

Além disso, como se têm as seguintes propriedades do *quociente de Rayleigh*:

- λ_j = mínimo valor de $\rho(\Phi)$ se $(\Phi^T M \Phi_i = 0)$, com $(i = 1, 2, \dots, j-1)$ e sendo Φ um vetor qualquer do espaço E_n e Φ_i um autovalor do problema $(K\Phi = M\Phi\Omega)$;
- ρ_j = máximo valor de $\rho(\Phi)$, se $(\Phi^{*T} M \Phi_i^* = 0)$, com $(i = 1, 2, \dots, j-1)$ e sendo Φ^* um vetor qualquer do espaço E_p contido no espaço E_n e $(\Phi_j^* = X\alpha_j)$, em que α_j é autovetor do problema $(K^* \alpha_j = \rho_j M^* \alpha_j)$, pode-se escrever que:

$$\boxed{\lambda_j \leq \rho_j} \quad (9-2.36)$$

Isto é, os autovalores ρ_j do problema $(K^* \alpha_j = \rho_j M^* \alpha_j)$ são aproximações, por valores superiores, aos “ p primeiros” autovalores do problema $(K\Phi_j = \lambda_i M\Phi_j)$, e $(\Phi_j^* = X\alpha_j)$ é uma aproximação aos correspondentes autovetores. Além disso, como para os últimos valores do conjunto $(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_j, \dots, \rho_p)$ são necessárias mais condições de ortogonalização do tipo $(\Phi^{*T} M \Phi_i^* = 0)$, com $(i = 1, 2, \dots, j-1)$, infere-se que esses valores tenham menor acurácia do que os primeiros valores daquele conjunto. Por essa razão, é indicado utilizar q vetores x_i , com $p < q \leq n$, quando são desejadas aproximações a p autopares. Naturalmente, a acurácia depende também da *base de Ritz*, isto é, quanto mais próximo o subespaço definido por Φ_p estiver do subespaço definido pelos *vetores de Ritz*, melhor serão os resultados obtidos.

Em resumo, a *análise de Rayleigh-Ritz* consta das seguintes etapas:

1. Estabelecimento de uma base de Ritz, X , composta de q vetores linearmente independentes entre si e não ortogonais aos p autovetores cujas aproximações se deseja obter.
2. Projeção das matrizes K e M no subespaço definido pelos *vetores de Ritz*, obtendo-se K^* e M^* através da Equação 9-2.29.

3. Resolução do problema de autovalor ($\mathbf{K}^* \boldsymbol{\alpha}_j = \rho_j \mathbf{M}^* \boldsymbol{\alpha}_j$), obtendo-se os autopares $(\rho_j, \boldsymbol{\alpha}_j)$, com $(j = 1, 2, \dots, q)$.
4. Cálculo dos vetores $(\boldsymbol{\varphi}_j^* = \mathbf{X} \boldsymbol{\alpha}_j)$, com $(j = 1, 2, \dots, q)$.

Dessa maneira, os p primeiros autopares $(\rho_j, \boldsymbol{\varphi}_j^*)$ calculados são aproximações a p autopares do problema ($\mathbf{K}\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{M}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Omega}$), sendo os vetores $\boldsymbol{\varphi}_j^*$ normalizados em relação à matriz de massa e ρ_j próximos por valores superiores aos autovalores desse problema.¹⁹

Para melhor esclarecimento quanto a essa análise, seja um subespaço E_2 do espaço E_3 definido pelos autovetores $\boldsymbol{\varphi}_1$, $\boldsymbol{\varphi}_2$ e $\boldsymbol{\varphi}_3$, como mostra a [Figura 9-2.2](#). Nesta figura, estão representados os vetores \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 da *base Ritz* e que definem o plano P indicado, como também estão mostradas as soluções $\boldsymbol{\varphi}_1^*$ e $\boldsymbol{\varphi}_2^*$ da referida análise. Essas soluções são os vetores desse plano mais próximos dos autovetores $\boldsymbol{\varphi}_1$ e $\boldsymbol{\varphi}_2$, isto é, são vetores ortogonais entre si, contidos no referido plano e que formam os menores ângulos com $\boldsymbol{\varphi}_1$ e $\boldsymbol{\varphi}_2$, respectivamente. Consequentemente, a *análise de Rayleigh-Ritz* fornecerá esses autovetores em caso de se arbitram *vetores de Ritz* que sejam combinações lineares desses autovetores.

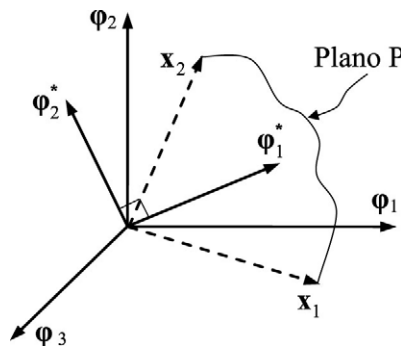


FIGURA 9-2.2 Representação de *base de Ritz* no espaço tridimensional.

EXEMPLO 9-2.3

Como experimento da *análise de Rayleigh-Ritz* são consideradas as matrizes de rigidez e de massa do Exemplo 9-2.1, reproduzidas a seguir:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Arbitra-se a seguinte base de Ritz:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

¹⁹ Como esses vetores satisfazem as condições de ortogonalidade com respeito às matrizes \mathbf{K} e \mathbf{M} , podem ser utilizados em desacoplamento do sistema global das equações de movimento, em semelhança aos modos naturais de vibração.

Logo, com as expressões da Equação 9-2.29 projetam-se as referidas matrizes no espaço definido pela base anterior:

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{X}^T \mathbf{K} \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{M}^* = \mathbf{X}^T \mathbf{M} \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

A resolução do problema $(\mathbf{K}^* \boldsymbol{\alpha}_j = \rho_j \mathbf{M}^* \boldsymbol{\alpha}_j)$ fornece os autovalores $(\rho_1 = 0,353)$ e $(\rho_2 = 1,772)$. Em comparação desses resultados com os autovalores do problema $(\mathbf{K}\Phi = \mathbf{M}\Phi\Omega)$, identifica-se que $\lambda_1 < \rho_1$ e $\lambda_2 < \rho_2$. Além disso, verifica-se que ρ_1 está mais próximo de λ_1 do que ρ_2 está mais próximo de λ_2 .

9-3 MÉTODO DE JACOBI

O *método de Jacobi* é um dos métodos mais antigos de resolução completa do problema de autovalor na forma reduzida com matriz real e simétrica.²⁰ A seguir, esse método é desenvolvido para essa forma e, posteriormente, é estendido à forma generalizada do problema de autovalor.

Dada uma matriz real, simétrica, singular ou não, de ordem $(n \times n)$, $(\mathbf{A}^{(1)} \equiv \mathbf{A})$, seja a sequência de transformações ortogonais similares:

$$\mathbf{A}^{(k+1)} = \mathbf{T}^{(k)T} \mathbf{A}^{(k)} \mathbf{T}^{(k)} \quad (9-3.1)$$

com $(k = 1, 2, 3 \dots)$, e em que a matriz $\mathbf{A}^{(k+1)}$ é simétrica. Logo, tem-se:

$$\mathbf{A}^{(k+1)} = \mathbf{T}^{*(k)T} \mathbf{A}^{(1)} \mathbf{T}^{*(k)} \quad (9-3.2)$$

em que se adota a notação:

$$\mathbf{T}^{*(k)} = \mathbf{T}^{(1)} \mathbf{T}^{(2)} \dots \mathbf{T}^{(k)} \quad (9-3.3)$$

Nos chamados métodos de transformação ou métodos diretos, com $k \rightarrow \infty$, a matriz $\mathbf{A}^{(k+1)}$ converge para a matriz espectral $\boldsymbol{\Lambda}$, e a matriz $\mathbf{T}^{*(k)}$ converge para a correspondente matriz modal normalizada \mathbf{X} .²¹ O método de Jacobi se insere nessa categoria de métodos, quando então $\mathbf{T}^{(k)}$ é uma matriz ortogonal de rotação da forma:

$$\mathbf{T}^{(k)} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{coluna } i & \text{coluna } j \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 1 & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & \cos \theta & \cdot & -\sin \theta & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & \sin \theta & \cdot & \cos \theta & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{linha } i \\ \leftarrow \text{linha } j \end{array} \quad (9-3.4)$$

²⁰ Este método foi apresentado pelo matemático alemão Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851), em 1846.

²¹ Entre os métodos diretos têm-se o *método QR* (baseado em fatorações da matriz $\mathbf{A}^{(k)}$ com matrizes ortogonais) e o *método LR* (baseado em fatorações da matriz $\mathbf{A}^{(k)}$ com transformações não ortogonais).

em que o ângulo θ é determinado com a condição de que, com a transformação expressa na Equação 9-3.1, o coeficiente $a_{ij}^{(k+1)}$ seja nulo.

Com a substituição da matriz ortogonal anterior na Equação 9-3.1, identifica-se que apenas os coeficientes das linhas e colunas “i” e “j” da matriz $\mathbf{A}^{(k)}$ são modificados, da seguinte maneira:

$$\begin{cases} a_{ij}^{(k+1)} = a_{ji}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + (a_{jj}^{(k)} - a_{ii}^{(k)}) \cos \theta \sin \theta \\ a_{i\ell}^{(k+1)} = a_{\ell i}^{(k+1)} = a_{\ell i}^{(k)} \cos \theta + a_{\ell j}^{(k)} \sin \theta & \text{em que } \ell \neq i \text{ e } \ell \neq j \\ a_{j\ell}^{(k+1)} = a_{\ell j}^{(k+1)} = a_{\ell j}^{(k)} \cos \theta - a_{\ell i}^{(k)} \sin \theta & \text{em que } \ell \neq i \text{ e } \ell \neq j \\ a_{ii}^{(k+1)} = a_{ii}^{(k)} \cos^2 \theta + a_{jj}^{(k)} \sin^2 \theta + 2a_{ij}^{(k)} \cos \theta \sin \theta \\ a_{jj}^{(k+1)} = a_{jj}^{(k)} \sin^2 \theta + a_{ii}^{(k)} \cos^2 \theta - 2a_{ij}^{(k)} \cos \theta \sin \theta \end{cases} \quad (9-3.5)$$

Logo, com o coeficiente $a_{ij}^{(k+1)}$ e $a_{ii}^{(k)} \neq a_{jj}^{(k)}$, obtém-se a partir da primeira expressão contida na Equação 9-3.5:

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(k)} \cos 2\theta &= \frac{(a_{ii}^{(k)} - a_{jj}^{(k)}) (\sin 2\theta)}{2} \rightarrow \operatorname{tg} 2\theta = \frac{2a_{ij}^{(k)}}{a_{ii}^{(k)} - a_{jj}^{(k)}} \\ \rightarrow \theta &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2a_{ij}^{(k)}}{a_{ii}^{(k)} - a_{jj}^{(k)}} \end{aligned} \quad (9-3.6)$$

Além disso, no caso de $(a_{ii}^{(k)} = a_{jj}^{(k)})$ e com a condição de que o coeficiente $a_{ij}^{(k+1)}$ seja nulo, a Equação 9-3.5 fornece:

$$\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 0 \rightarrow \operatorname{tg} \theta = 1 \rightarrow \boxed{\theta = \pi/4} \quad (9-3.7)$$

Importa observar que, após a determinação do ângulo θ , não há divisões nas quatro últimas expressões da Equação 9-3.5, o que dá estabilidade numérica ao método.

Além disso, com a notação $\mathbf{T}^{(0)}$ designativa de uma matriz identidade, os coeficientes das colunas “i” e “j” da matriz $\mathbf{T}^{*(k)}$, definida na Equação 9-3.3, são obtidos com as expressões:

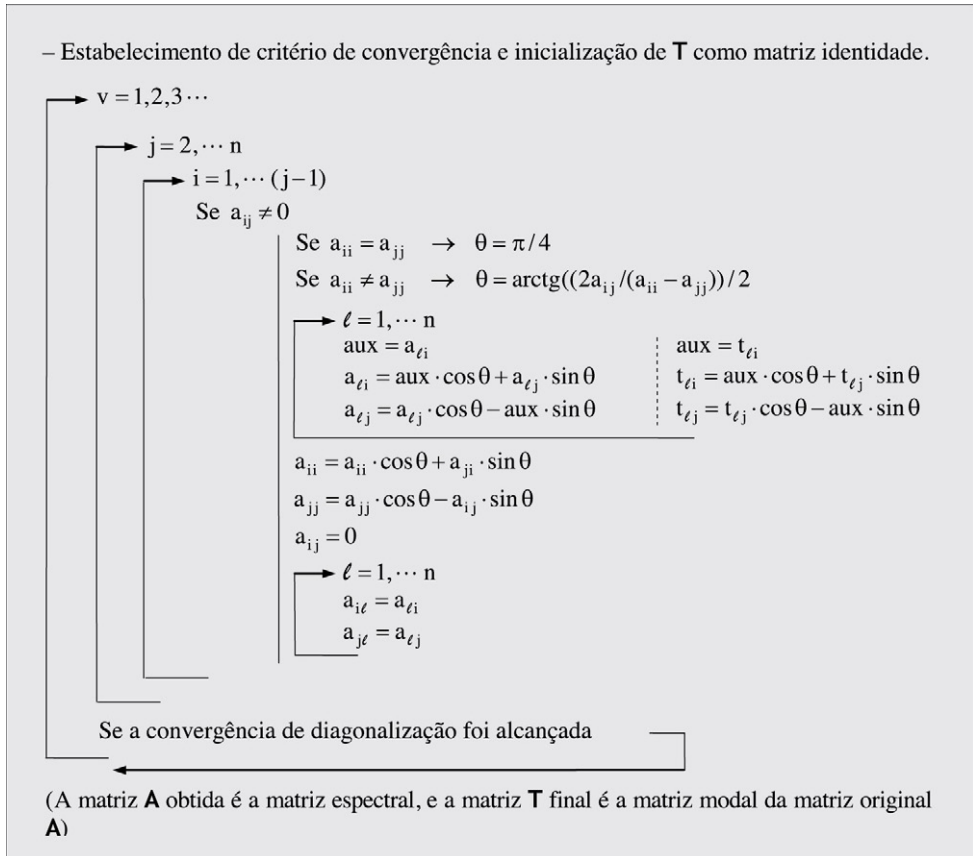
$$\begin{cases} t_{\ell i}^{*(k)} = t_{\ell i}^{*(k-1)} \cos \theta + t_{\ell j}^{*(k-1)} \sin \theta \\ t_{\ell j}^{*(k)} = t_{\ell j}^{*(k-1)} \cos \theta - t_{\ell i}^{*(k-1)} \sin \theta \end{cases} \quad (9-3.8)$$

em que $(k = 1, 2, 3 \dots)$ e $(\ell = 1, \dots n)$.

Pode-se demonstrar que a transformação que anula o coeficiente de posição (i,j) gera coeficientes não nulos em outras posições fora da diagonal principal que anteriormente continham coeficientes nulos. Contudo, após cada uma das transformações similares, ocorre redução da soma absoluta dos coeficientes não diagonais. Assim, $\mathbf{T}^{*(k)}$ converge para a matriz modal normalizada, e $\mathbf{A}^{(k)}$ converge para a matriz espectral, embora sem ordenação dos autovalores e dos autovetores.²²

²² Vide Wilkinson, J. H., 1965.

Segue algoritmo do presente método.



ALGORITMO 9-3.1 Resolução da forma reduzida do problema de autovalor com o *método de Jacobi*.

O algoritmo anterior tem as seguintes peculiaridades:

1. Os coeficientes das matrizes **A** e **A**^(k) são designados por a_{ij}, e os coeficientes das matrizes **T**⁽¹⁾ e **T**^{*(k)} recebem a designação t_{ij}, o que possibilita que cada um desses pares de matrizes ocupe as mesmas posições de memória de computador.
2. Em cada incremento da variável mais externa, v, faz-se uma varredura dos coeficientes acima da diagonal principal da matriz **A**^(k), com aplicação de transformações similares que anulem sequencialmente os coeficientes não nulos, coluna a coluna. Ao final de cada uma dessas transformações, os coeficientes abaixo daquela diagonal são obtidos por simetria.
3. Os coeficientes da matriz **A**^(k) têm expressões diferentes que as apresentadas na Equação 9-3.5, porque tais coeficientes são parcialmente calculados nos ciclos da variável incremental mais interna, ℓ.

Além disso, para maior eficiência de processamento, as funções cos θ e sin θ podem ser calculadas externamente aos ciclos da variável incremental ℓ.

EXEMPLO 9-3.1

Para evidenciar o funcionamento do algoritmo anterior, considera-se novamente o sistema massa-mola de quatro graus de liberdade do Exemplo 9-2.1, cujo problema de autovalor se escreve:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Phi = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Phi \Omega$$

Para obter o problema de autovalor com a forma reduzida ($\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{X} = \mathbf{X}\Omega$), empregou-se a Equação 9-1.26a, obtendo-se:

$$\mathbf{A}^{(1)} = \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{K} \mathbf{M}^{-1/2} = \begin{bmatrix} 2 & -0,707107 & -0,707107 & 0 \\ \cdot & 1 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & 2 & -1 \\ \text{sim.} & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}$$

Logo, com o referido algoritmo e na varredura ($v = 1$), foram obtidas as matrizes:

$$\mathbf{A}^{(k)} = \begin{bmatrix} 3,015\,745 & 0,103\,254 & -0,195\,772 & -0,195\,083 \\ \cdot & 0,408\,582 & -0,069\,323 & -0,199\,144 \\ \cdot & \cdot & 1,980\,348 & 0 \\ \text{sim.} & \cdot & \cdot & 0,595\,325 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}^{(k)} = \begin{bmatrix} 0,680\,872 & 0,390\,553 & 0,586\,713 & -0,199\,120 \\ -0,352\,446 & -0,724\,610 & -0,254\,776 & -0,534\,614 \\ -0,575\,139 & 0,266\,932 & 0,638\,030 & 0,436\,898 \\ 0,285\,324 & 0,285\,324 & -0,428\,689 & 0,695\,456 \end{bmatrix}$$

Com a segunda varredura, foram obtidas as matrizes:

$$\mathbf{A}^{(k)} = \begin{bmatrix} 3,076\,030 & 0,064\,677 & -0,011\,170 & -0,036\,057 \\ \cdot & 0,238\,762 & -0,001\,083 & -0,000\,002 \\ \cdot & \cdot & 2,000\,116 & 0 \\ \text{sim.} & \cdot & \cdot & 0,685\,093 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}^{(k)} = \begin{bmatrix} 0,586\,078 & 0,354\,965 & 0,626\,380 & -0,371\,700 \\ -0,225\,758 & 0,311\,177 & -0,445\,051 & -0,808\,784 \\ -0,707\,624 & 0,520\,310 & 0,454\,750 & 0,147\,472 \\ 0,323\,751 & 0,711\,651 & -0,450\,311 & 0,431\,230 \end{bmatrix}$$

Com a terceira varredura, foram obtidas as matrizes:

$$\mathbf{A}^{(k)} = \begin{bmatrix} 3,078\,163 & -0,000\,004 & 0,000\,006 & 0 \\ \cdot & 0,237\,286 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & 2 & 0 \\ \text{sim.} & \cdot & \cdot & 0,684\,551 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}^{(k)} = \begin{bmatrix} 0,593\,004 & 0,342\,485 & 0,632\,458 & -0,362\,003 \\ -0,201\,771 & 0,317\,516 & -0,447\,215 & -0,811\,462 \\ -0,702\,417 & 0,536\,251 & 0,447\,210 & 0,138\,019 \\ 0,338\,001 & 0,703\,081 & -0,447\,212 & 0,437\,531 \end{bmatrix}$$

Finalmente, com ($v = 4$) foram obtidas a matriz espectral e a matriz modal de $\mathbf{A}^{(1)}$:

$$\mathbf{A}^{(k)} = \mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} 3,078\,163 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & 0,237\,286 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & 2 & 0 \\ \text{sim.} & \cdot & \cdot & 0,684\,551 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}^{*(k)} = \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0,593\,007 & 0,342\,486 & 0,632\,455 & -0,362\,003 \\ -0,201\,774 & 0,317\,516 & -0,447\,214 & -0,811\,462 \\ -0,702\,415 & 0,536\,250 & 0,447\,213 & 0,138\,019 \\ 0,337\,998 & 0,703\,081 & -0,447\,214 & 0,437\,531 \end{bmatrix}$$

Finalmente, com a Equação 9-1.28, obteve-se a matriz modal do problema de autovalor inicial:

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0,419\,319 & 0,242\,174 & 0,447\,214 & -0,255\,975 \\ -0,201\,774 & 0,317\,516 & -0,447\,214 & -0,811\,462 \\ -0,702\,415 & 0,536\,250 & 0,447\,213 & 0,138\,019 \\ 0,337\,998 & 0,703\,081 & -0,447\,214 & 0,437\,531 \end{bmatrix}$$

Com um maior número de iterações, verificou-se que todas as casas decimais dos resultados de $\mathbf{\Omega}$ e $\mathbf{\Phi}$ estão corretas. Além disso, importa ressaltar que os autovetores em \mathbf{X} têm *comprimento euclidiano* unitário e que os autovetores em $\mathbf{\Phi}$ estão normalizados em relação à matriz de massa, mas que os autopares não estão ordenados na ordem crescente da grandeza dos autovalores.

No algoritmo anterior, em cada varredura dos coeficientes acima da diagonal principal, por simplicidade, não foi utilizada uma estratégia de verificação da proximidade de cada coeficiente a_{ij} a zero, antes de transformá-lo em nulo. É mais eficaz aplicar transformações similares que anulem os coeficientes superiores a um valor de referência (como uma fração da média absoluta dos coeficientes não diagonais, por exemplo), preferencialmente com teste quanto à grandeza de $(a_{ij}^{(k)2} / (a_{ii}^{(k)} a_{jj}^{(k)}))^{1/2}$ que expressa o acoplamento entre os coeficientes das posições (i,i) e (j,j) . Além disso, uma verificação de convergência indicada é:

$$\frac{a_{ii}^{(k+1)} - a_{ii}^{(k)}}{a_{ii}^{(k+1)}} \leq \text{tolerância} = 10^{-d} \quad (9-3.9)$$

com $(i = 1, 2 \dots n)$; e que os coeficientes acima da diagonal principal atendam à condição:

$$\left(\frac{a_{ij}^{(k+1)2}}{a_{ii}^{(k+1)} a_{jj}^{(k+1)}} \right)^{1/2} \leq \text{tolerância} = 10^{-d} \quad (9-3.10)$$

em que d é o número de algarismos significativos desejados nos autovalores.

Quanto ao problema de autovalor generalizado ($\mathbf{K}\mathbf{\Phi} = \mathbf{M}\mathbf{\Phi}\mathbf{\Omega}$), pode-se transformá-lo à forma reduzida, como apresentado na primeira seção deste capítulo, e aplicar o algoritmo anterior. Isso, contudo, só é computacionalmente eficiente com matriz de massa diagonal de coeficientes diagonais positivos.²³ Em caso contrário, é melhor utilizar diretamente a forma generalizada do *método de Jacobi* descrita a seguir.

²³ Se alguns coeficientes diagonais de matriz de massa diagonal forem nulos, os correspondentes graus de liberdade do modelo da estrutura podem ser condensados estaticamente para, então, proceder à obtenção da forma reduzida do problema de autovalor, o que, contudo, não é computacionalmente eficiente.

Com matriz \mathbf{K} singular ou não, matriz \mathbf{M} não singular e com as notações $(\mathbf{K}^{(1)} \equiv \mathbf{K})$ e $(\mathbf{M}^{(1)} \equiv \mathbf{M})$, estabelece-se a sequência de transformações similares ortogonais:

$$\begin{cases} \mathbf{K}^{(k+1)} = \mathbf{T}^{(k)\top} \mathbf{K}^{(k)} \mathbf{T}^{(k)} \\ \mathbf{M}^{(k+1)} = \mathbf{T}^{(k)\top} \mathbf{M}^{(k)} \mathbf{T}^{(k)} \end{cases} \quad (9-3.11)$$

em que $(k = 1, 2, 3 \dots)$. Logo, com a notação:

$$\mathbf{T}^{*(k)} = \mathbf{T}^{(1)} \mathbf{T}^{(2)} \dots \mathbf{T}^{(k)} \quad (9-3.12)$$

têm-se as matrizes transformadas:

$$\begin{cases} \mathbf{K}^{(k+1)} = \mathbf{T}^{*(k)\top} \mathbf{K}^{(1)} \mathbf{T}^{*(k)} \\ \mathbf{M}^{(k+1)} = \mathbf{T}^{*(k)\top} \mathbf{M}^{(1)} \mathbf{T}^{*(k)} \end{cases} \quad (9-3.13)$$

Consideram-se matrizes $\mathbf{T}^{(k)}$ tais que, com $k \rightarrow \infty$, $\mathbf{M}^{(k+1)}$ convirja para uma matriz diagonal $\mathbf{M}^{(d)}$ e $\mathbf{K}^{(k+1)}$ convirja para uma matriz diagonal $\mathbf{K}^{(d)}$, quando então, na condição limite, se adota a notação \mathbf{T}^* em lugar de $\mathbf{T}^{*(k)}$. Assim, nessa condição tem-se:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \mathbf{M}^{(d)} = \mathbf{T}^{*\top} \mathbf{M} \mathbf{T}^* \\ \mathbf{K}^{(d)} = \mathbf{T}^{*\top} \mathbf{K} \mathbf{T}^* \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} \mathbf{M}^{(d)} \mathbf{M}^{(d)-1} = \mathbf{I} = \mathbf{T}^{*\top} \mathbf{M} \mathbf{T}^* \mathbf{M}^{(d)-1} \\ \mathbf{K}^{(d)} \mathbf{M}^{(d)-1} = \mathbf{T}^{*\top} \mathbf{K} \mathbf{T}^* \mathbf{M}^{(d)-1} \end{cases} \\ &\rightarrow \begin{cases} \mathbf{I} = (\mathbf{M}^{(d)-1/2} \mathbf{T}^{*\top}) \mathbf{M} (\mathbf{T}^* \mathbf{M}^{(d)-1/2}) = \Phi^\top \mathbf{M} \Phi \\ \mathbf{K}^{(d)} \mathbf{M}^{(d)-1} = (\mathbf{M}^{(d)-1/2} \mathbf{T}^{*\top}) \mathbf{K} (\mathbf{T}^* \mathbf{M}^{(d)-1/2}) \end{cases} \end{aligned} \quad (9-3.14)$$

Logo, obtém-se a matriz modal normalizada em relação à matriz de massa:

$$\Phi = \mathbf{T}^* \mathbf{M}^{(d)-1/2} \quad (9-3.15)$$

e, consequentemente, tem-se a matriz espectral:

$$\Omega = \mathbf{K}^{(d)} \mathbf{M}^{(d)-1} \quad (9-3.16)$$

No método de Jacobi generalizado, adota-se a seguinte matriz de transformação:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{coluna i} & \text{coluna j} \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \mathbf{T}^{(k)} = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 1 & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 1 & \cdot & \alpha & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & \gamma & \cdot & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{linha i} \\ \leftarrow \text{linha j} \end{array} \end{array} \quad (9-3.17)$$

em que α e γ são escalares determinados de maneira que, com as transformações expressas na Equação 9-3.11, os coeficientes de posição (i,j) das matrizes $\mathbf{K}^{(k+1)}$ e $\mathbf{M}^{(k+1)}$ sejam anulados.

Logo, com a substituição de $\mathbf{T}^{(k)}$ na primeira expressão da Equação 9-3.11, obtém-se:

$$\begin{cases} k_{ij}^{(k+1)} = k_{ji}^{(k+1)} = k_{ii}^{(k)}\alpha + k_{jj}^{(k)}\gamma + (\alpha\gamma + 1)k_{ij}^{(k)} \\ k_{ie}^{(k+1)} = k_{ei}^{(k+1)} = k_{ei}^{(k)} + k_{ej}^{(k)}\gamma & \text{em que } \ell \neq i \text{ e } \ell \neq j \\ k_{je}^{(k+1)} = k_{ej}^{(k+1)} = k_{ei}^{(k)}\alpha + k_{ej}^{(k)} & \text{em que } \ell \neq i \text{ e } \ell \neq j \\ k_{ii}^{(k+1)} = k_{ii}^{(k)} + k_{jj}^{(k)}\gamma^2 + 2k_{ij}^{(k)}\gamma \\ k_{jj}^{(k+1)} = k_{ii}^{(k)}\alpha^2 + k_{jj}^{(k)} + 2k_{ij}^{(k)}\alpha \end{cases} \quad (9-3.18)$$

Com a substituição de matriz $\mathbf{T}^{(k)}$ na segunda expressão da Equação 9-3.11, chega-se a:

$$\begin{cases} m_{ij}^{(k+1)} = m_{ji}^{(k+1)} = m_{ii}^{(k)}\alpha + m_{jj}^{(k)}\gamma + (\alpha\gamma + 1)m_{ij}^{(k)} \\ m_{ie}^{(k+1)} = m_{ei}^{(k+1)} = m_{ei}^{(k)} + m_{ej}^{(k)}\gamma & \text{em que } \ell \neq i \text{ e } \ell \neq j \\ m_{je}^{(k+1)} = m_{ej}^{(k+1)} = m_{ei}^{(k)}\alpha + m_{ej}^{(k)} & \text{em que } \ell \neq i \text{ e } \ell \neq j \\ m_{ii}^{(k+1)} = m_{ii}^{(k)} + m_{jj}^{(k)}\gamma^2 + 2m_{ij}^{(k)}\gamma \\ m_{jj}^{(k+1)} = m_{ii}^{(k)}\alpha^2 + m_{jj}^{(k)} + 2m_{ij}^{(k)}\alpha \end{cases} \quad (9-3.19)$$

Assim, com a condição de nulidade dos coeficientes de posição (i,j) em $\mathbf{K}^{(k+1)}$ e $\mathbf{M}^{(k+1)}$, obtém-se o seguinte sistema de equações em termos dos escalares α e γ :

$$\begin{cases} k_{ii}^{(k)}\alpha + k_{jj}^{(k)}\gamma + (\alpha\gamma + 1)k_{ij}^{(k)} = 0 \\ m_{ii}^{(k)}\alpha + m_{jj}^{(k)}\gamma + (\alpha\gamma + 1)m_{ij}^{(k)} = 0 \end{cases} \quad (9-3.20)$$

que tem a solução:

$$\begin{cases} \gamma = -\frac{a}{d} \\ \alpha = \frac{b}{d} \end{cases} \quad (9-3.21)$$

onde são adotadas as seguintes notações de escalares:

$$\begin{cases} a = k_{ii}^{(k)}m_{ij}^{(k)} - k_{ij}^{(k)}m_{ii}^{(k)} \\ b = k_{jj}^{(k)}m_{ij}^{(k)} - k_{ij}^{(k)}m_{jj}^{(k)} \\ c = (k_{ii}^{(k)}m_{jj}^{(k)} - k_{jj}^{(k)}m_{ii}^{(k)})/2 \\ d = c + (\text{sin}(\text{de } c))\sqrt{c^2 + ab} \end{cases} \quad (9-3.22)$$

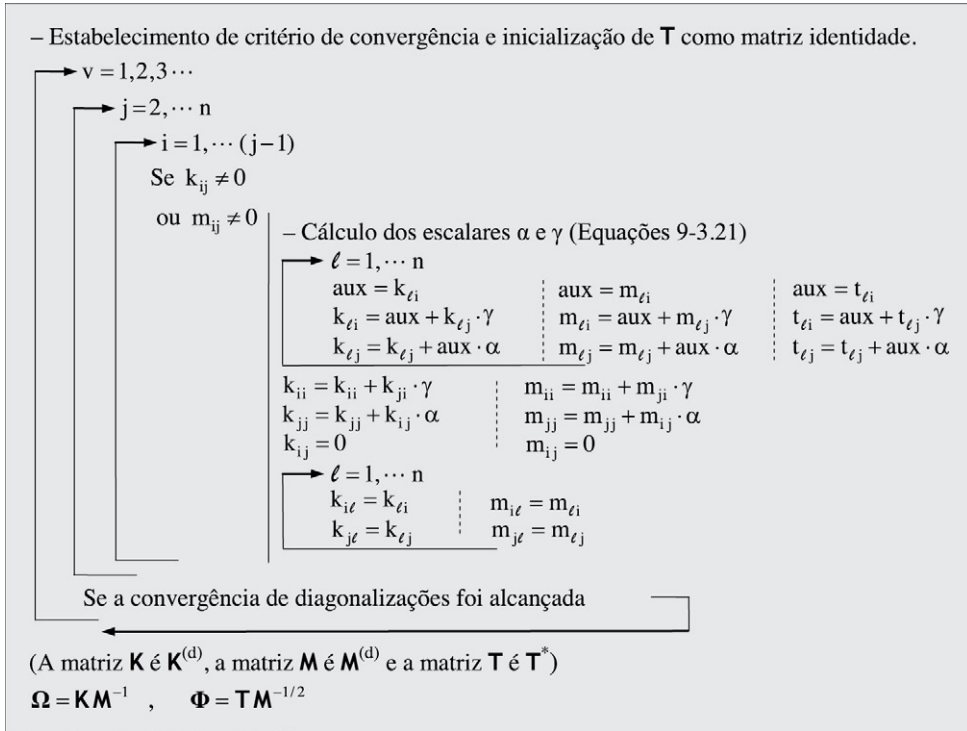
Com matriz de massa identidade, recai-se na forma reduzida do problema de autovalor e obtém-se ($\alpha = -\gamma$), o que significa que a matriz de transformação expressa na Equação 9-3.17 é múltipla da matriz de rotação especificada na Equação 9-3.4. Além disso, pode-se comprovar que, com matriz de massa positiva-definida, sempre se tem $d \neq 0$, que garante estabilidade numérica na determinação da matriz de transformação $\mathbf{T}^{(k)}$ e, consequentemente, nas transformações similares deste método.

Com a notação ($\mathbf{T}^{*(0)} \equiv \mathbf{I}$), os coeficientes das colunas “i” e “j” da matriz $\mathbf{T}^{*(k)}$, definida na Equação 9-3.12, são obtidos com as expressões:

$$\begin{cases} t_{\ell i}^{*(k)} = t_{\ell i}^{*(k-1)} + t_{\ell j}^{*(k-1)} \gamma \\ t_{\ell j}^{*(k)} = t_{\ell j}^{*(k-1)} + t_{\ell i}^{*(k-1)} \alpha \end{cases} \quad (9-3.23)$$

em que $(k = 1, 2, 3 \dots)$ e $(\ell = 1, 2, \dots n)$.

Segue algoritmo do presente método.



ALGORITMO 9-3.2 Resolução da forma generalizada com o método Jacobi.

EXEMPLO 9-3.2

Para evidenciar o funcionamento do algoritmo anterior, considerou-se o mesmo problema de autovalor do exemplo anterior.

Com a varredura ($v = 1$), foram obtidas as matrizes:

$$\mathbf{K}^{(k)} = \begin{bmatrix} 13,010\,469 & 0,293\,415 & -0,618\,442 & -0,582\,638 \\ \cdot & 0,764\,777 & -0,672\,235 & -0,391\,765 \\ \cdot & \cdot & 4,580\,765 & 0 \\ \text{sim.} & \cdot & \cdot & 1,230\,877 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}^{(k)} = \begin{bmatrix} 4,314\,181 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & 1,871\,783 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & 2,313\,112 & 0 \\ \text{sim.} & \cdot & \cdot & 2,067\,571 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}^{(k)} = \begin{bmatrix} 1 & 0,377\,828 & 0,630\,970 & -0,202\,456 \\ -0,732\,051 & 0,991\,361 & -0,387\,487 & -0,768\,724 \\ -1,194\,599 & 0,365\,197 & 0,979\,375 & 0,628\,217 \\ 0,592\,634 & 0,685\,646 & -0,651\,990 & 1 \end{bmatrix}$$

Com a segunda varredura foram obtidas as matrizes:

$$\mathbf{K}^{(k)} = \begin{bmatrix} 13,875\,226 & 0,219\,317 & -0,037\,431 & -0,126\,460 \\ 0,219\,317 & 0,608\,648 & -0,002\,728 & -0,000\,004 \\ . & . & 4,979\,241 & 0 \\ \text{sim.} & . & . & 1,868\,275 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}^{(k)} = \begin{bmatrix} 5,510\,758 & 0 & 0 & 0 \\ . & 2,549\,187 & 0 & 0 \\ . & . & 2,489\,476 & 0 \\ \text{sim.} & . & . & 2,727\,039 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}^{*(k)} = \begin{bmatrix} 0,880\,167 & 0,400\,748 & 0,698\,839 & -0,434\,034 \\ -0,479\,475 & 0,496\,831 & -0,702\,204 & -1,335\,606 \\ -1,502\,891 & 0,830\,735 & 0,717\,508 & 0,243\,531 \\ 0,687\,599 & 1,136\,234 & -0,710\,504 & 0,712\,122 \end{bmatrix}$$

Com a terceira varredura foram obtidas as matrizes:

$$\mathbf{K}^{(k)} = \begin{bmatrix} 13,896\,704 & -0,000\,013 & 0,000\,019 & 0 \\ . & 0,605\,203 & 0,000\,002 & 0 \\ . & . & 4,979\,491 & 0 \\ \text{sim.} & . & . & 1,867\,228 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}^{(k)} = \begin{bmatrix} 4,514\,610 & 0 & 0 & 0 \\ . & 2,550\,520 & 0 & 0 \\ . & . & 2,489\,746 & 0 \\ \text{sim.} & . & . & 2,727\,667 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}^{*(k)} = \begin{bmatrix} 0,890\,950 & 0,386\,759 & 0,705\,658 & -0,422\,759 \\ -0,428\,716 & 0,507\,084 & -0,705\,657 & -1,340\,183 \\ -1,492\,478 & 0,856\,412 & 0,705\,649 & 0,227\,947 \\ 0,718\,172 & 1,122\,844 & -0,705\,753 & 0,722\,612 \end{bmatrix}$$

Finalmente, com a quarta varredura foi alcançada a tolerância de convergência de seis casas decimais, sendo obtidas as seguintes matrizes:

$$\mathbf{K}^{(k)} = \mathbf{K}^{(d)} = \begin{bmatrix} 13,896\,704 & 0 & 0 & 0 \\ . & 0,605\,203 & 0 & 0 \\ . & . & 4,979\,491 & 0 \\ \text{sim.} & . & . & 1,867\,228 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}^{(k)} = \mathbf{M}^{(d)} = \begin{bmatrix} 4,514\,610 & 0 & 0 & 0 \\ . & 2,550\,520 & 0 & 0 \\ . & . & 2,489\,746 & 0 \\ \text{sim.} & . & . & 2,727\,667 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}^{*(k)} = \mathbf{T}^* = \begin{bmatrix} 0,890\,954 & 0,386\,760 & 0,705\,655 & -0,422\,759 \\ -0,428\,722 & 0,507\,084 & -0,705\,655 & -1,340\,183 \\ -1,492\,464 & 0,856\,410 & 0,705\,655 & 0,227\,947 \\ 0,718\,165 & 1,122\,845 & -0,705\,655 & 0,722\,612 \end{bmatrix}$$

Logo, com a última linha do algoritmo anterior, foram obtidas a matriz espectral e a matriz modal (iguais às determinadas no exemplo precedente):

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{K}^{(d)} \mathbf{M}^{(d)-1} = \begin{bmatrix} 3,078\,163 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,237\,286 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,684\,551 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{T}^* \mathbf{M}^{(d)-1/2} = \begin{bmatrix} 0,419\,319 & 0,242\,174 & 0,447\,214 & -0,255\,975 \\ -0,201\,774 & 0,317\,516 & -0,447\,214 & -0,811\,462 \\ -0,702\,415 & 0,536\,250 & 0,447\,213 & 0,138\,019 \\ 0,337\,998 & 0,703\,081 & -0,447\,214 & 0,437\,531 \end{bmatrix}$$

Além disso, para testar o funcionamento do mesmo algoritmo em caso de matriz de massa positiva-definida cheia, modificou-se o problema de autovalor anterior para a forma:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0,5 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0,5 & -1 & 1 & -0,5 \\ -1 & 1 & -0,5 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{\Phi} \mathbf{\Omega}$$

Com a quarta varredura foi alcançada a tolerância de convergência de seis casas decimais e obtidos os seguintes resultados:

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{K}^{(d)} \mathbf{M}^{(d)-1} = \begin{bmatrix} 9,86\,379 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,332\,184 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,481\,054 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,824\,382 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{T}^* \mathbf{M}^{(d)-1/2} = \begin{bmatrix} 0,651\,777 & 0,157\,375 & 0,728\,336 & 0,141\,232 \\ -0,808\,719 & 0,593\,625 & 0,648\,053 & -0,271\,311 \\ -0,891\,116 & 0,267\,000 & 0,564\,609 & 0,903\,237 \\ 1,230\,011 & 0,550\,405 & -0,057\,368 & 1,086\,664 \end{bmatrix}$$

Esses resultados atendem às propriedades $(\mathbf{\Phi}^T \mathbf{K} \mathbf{\Phi} = \mathbf{\Omega})$ e $(\mathbf{\Phi}^T \mathbf{M} \mathbf{\Phi} = \mathbf{I})$.

É aconselhável que a identificação dos coeficientes a serem anulados nas matrizes $\mathbf{K}^{(k)}$ e $\mathbf{M}^{(k)}$ seja através da verificação da grandeza dos quocientes $(k_{ij}^{(k)2}/(k_{ii}^{(k)} k_{jj}^{(k)}))^{1/2}$ e $(m_{ij}^{(k)2}/(m_{ii}^{(k)} m_{jj}^{(k)}))^{1/2}$. Assim, a verificação de convergência toma a seguinte forma:

$$\begin{cases} \frac{k_{ii}^{(k+1)} - k_{ii}^{(k)}}{k_{ii}^{(k+1)}} \leq \text{tolerância} = 10^{-d} \\ \frac{m_{ii}^{(k+1)} - m_{ii}^{(k)}}{m_{ii}^{(k+1)}} \leq \text{tolerância} = 10^{-d} \end{cases} \quad (9-3.24)$$

com $(i = 1, 2 \dots n)$; além de:

$$\begin{cases} \left(\frac{k_{ij}^{(k+1)2}}{k_{ii}^{(k+1)} k_{jj}^{(k+1)}} \right)^{1/2} \leq \text{tolerância} = 10^{-d} \\ \left(\frac{m_{ij}^{(k+1)2}}{m_{ii}^{(k+1)} m_{jj}^{(k+1)}} \right)^{1/2} \leq \text{tolerância} = 10^{-d} \end{cases} \quad (9-3.25)$$

com $(i = 1, 2, \dots n)$ e $i > j$ ou $i > j$.

O *método de Jacobi* tem grande estabilidade numérica e converge com reduzido número de varreduras, principalmente quando há coeficientes não diagonais de valores reduzidos, com o fornecimento simultâneo de todos os autopares. Devido a essas particularidades, ele é indicado para integrar o método de iteração por subespaço em que se tem a resolução completa de uma sucessão de problemas de autovalor de reduzida ordem, cujos coeficientes não diagonais ficam com valores cada vez mais reduzidos com o procedimento de iteração de vetores.

9-4 SEQUÊNCIA DE STURM

Uma questão fundamental ao aplicar o método de iteração por subespaço é verificar se ocorre convergência para os p primeiros autopares desejados, o que pode ser feito com base na *sequência de Sturm*.²⁴ Para isso, como será mostrado na presente seção, faz-se um deslocamento α da origem dos autovalores, em grandeza ligeiramente superior ao p -ésimo autovalor calculado, obtendo-se, como expresso na Equação 9-1.19, a matriz transformada ($\mathbf{K}' = \mathbf{K} - \alpha \mathbf{M}$). A fatoração dessa matriz na forma ($\mathbf{K}' = \mathbf{L} \mathbf{D} \mathbf{L}^T$), em que \mathbf{L} é uma matriz triangular inferior de coeficientes diagonais unitários, fornece uma matriz diagonal \mathbf{D} em que os coeficientes negativos são iguais em número ao de autovalores menores do que α , o que permite verificar a referida convergência.

Seja $\mathbf{A}^{(k)}$ a matriz obtida a partir de uma matriz simétrica real ($\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}^{(0)}$) pela supressão das últimas k linhas e k colunas, para escrever os problemas de autovalores:

$$\mathbf{A}^{(k)} \mathbf{x}^{(k)} = \lambda^{(k)} \mathbf{x}^{(k)} \quad (9-4.1)$$

$$\mathbf{A}^{(k+1)} \mathbf{x}^{(k+1)} = \lambda^{(k+1)} \mathbf{x}^{(k+1)} \quad (9-4.2)$$

em que ($k = 0, 1, \dots, n-1$).

Com o teorema do maior dos mínimos do *quociente de Rayleigh* pode-se provar que:

$$\lambda_1^{(k)} \leq \lambda_1^{(k+1)} \leq \lambda_2^{(k)} \leq \dots \leq \lambda_{n-k-1}^{(k)} \leq \lambda_{n-k-1}^{(k+1)} \leq \lambda_{n-k}^{(k+1)} \quad (9-4.3)$$

Isto é, o i -ésimo autovalor da matriz $\mathbf{A}^{(k+1)}$ é maior ou igual ao i -ésimo autovalor da matriz $\mathbf{A}^{(k)}$, e menor ou igual ao $(i + 1)$ -ésimo autovalor dessa última matriz. É natural que essa conclusão seja válida em caso de a matriz $\mathbf{A}^{(k)}$ ser obtida pela supressão, em $\mathbf{A}^{(0)}$, de k linhas e correspondentes k colunas, quaisquer. A mesma propriedade vale para o problema de autovalor generalizado, com a supressão de idênticas linhas e colunas da matriz de rigidez e da matriz de massa.

A equação anterior pode ser esclarecida a partir do seguinte polinômio característico:

$$p^{(k)}(\alpha) = \det(\mathbf{A}^{(k)} - \alpha \mathbf{I}) \quad (9-4.4)$$

²⁴ Denominação em homenagem ao matemático francês Jacques Charles François Sturm (1803–1855), que apresentou, em 1829, um algoritmo de determinação da quantidade de zeros de um polinômio, em determinado intervalo.

As raízes do polinômio $p^{(k+1)}(\alpha)$ são iguais ou superiores às raízes do polinômio $p^{(k)}(\alpha)$, e apenas uma raiz de $p^{(k+1)}(\alpha)$ situa-se em cada intervalo definido pelas raízes de $p^{(k)}(\alpha)$. Por essa razão, diz-se que as raízes de $p^{(k+1)}(\alpha)$ separam as raízes de $p^{(k)}(\alpha)$, como ilustra a [Figura 9-4.1](#).

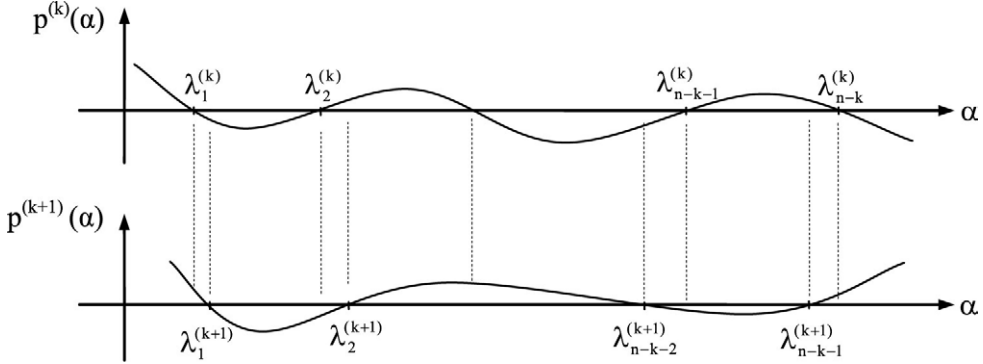


FIGURA 9-4.1 Indicação de raízes dos polinômios $p^{(k)}(\alpha)$ e de $p^{(k+1)}(\alpha)$.

EXEMPLO 9-4.1

Para comprovar numericamente a descrita separação das raízes do polinômio característico, considere-se novamente o sistema massa-mola do Exemplo 9-2.1, que tem os autovalores: $\lambda_1 = 0,297$, $\lambda_2 = 0,685$, $\lambda_3 = 2,0$ e $\lambda_4 = 3,078$.

Com a introdução de restrição ao deslocamento d_4 , fez-se o cancelamento da última linha e da última coluna das matrizes de rigidez e de massa. Com isso, o correspondente problema de autovalor forneceu: $\lambda_1 = 0,54839$, $\lambda_2 = 1,59697$ e $\lambda_3 = 2,85464$.

Com a consideração de restrições aos deslocamentos d_3 e d_4 , fez-se o cancelamento das duas últimas linhas e das duas últimas colunas das referidas matrizes, o que conduziu aos seguintes autovalores: $\lambda_1 = 0,63397$ e $\lambda_2 = 2,36603$.

É imediato identificar que todos esses resultados atendem à propriedade expressa na Equação 9-4.3.

A expressão da Equação 9-4.4, com $(k = 0, 1, 2, \dots)$, constitui uma *sequência de polinômios de Sturm* e $p^{(k)}(\alpha)$ é o menor principal de ordem $(n-k)$ da matriz:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A}^{(k)} - \alpha \mathbf{I} \quad (9-4.5)$$

Isto é, $p^{(k)}(\alpha)$ é o determinante da submatriz obtida pela eliminação das últimas k linhas e correspondentes colunas da matriz \mathbf{A} .

Para a matriz \mathbf{A}' anterior, escreve-se o problema de autovalor:

$$\mathbf{A}'\mathbf{x} = \lambda'\mathbf{x} \quad (9-4.6)$$

que, com um valor positivo para α , corresponde a efetuar um deslocamento para a direita da origem dos autovalores da matriz \mathbf{A} , como foi ilustrado na [Figura 9-1.1](#).

Além disso, em caso de a matriz \mathbf{A}' ser não singular, pode-se efetuar a fatoração:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{L}'\mathbf{D}'\mathbf{L}'^T \quad (9-4.7)$$

em que \mathbf{L}' é uma matriz triangular inferior de coeficientes diagonais unitários e \mathbf{D}' é uma matriz diagonal. De forma análoga, escreve-se a fatoração:

$$\mathbf{A}'^{(k)} = \mathbf{L}'^{(k)} \mathbf{D}'^{(k)} \mathbf{L}'^{(k)T} \quad (9-4.8)$$

onde $\mathbf{L}'^{(k)}$ e $\mathbf{D}'^{(k)}$ são submatrizes obtidas a partir das matrizes \mathbf{L}' e \mathbf{D}' anteriores, pela eliminação de suas últimas k linhas e correspondentes colunas. Logo, tem-se o determinante:

$$\det \mathbf{A}'^{(k)} = \prod_{i=1}^{n-k} d_i'^{(k)} = \prod_{i=1}^{n-k} \lambda_i'^{(k)} \quad (9-4.9)$$

onde $d_i'^{(k)}$ é o i -ésimo coeficiente diagonal da submatriz $\mathbf{D}'^{(k)}$, e $\lambda_i'^{(k)}$ é o i -ésimo autovalor da submatriz $\mathbf{A}'^{(k)}$. Assim, com k variando de 0 até $(n-1)$, conclui-se que o número de coeficientes negativos na matriz diagonal $\mathbf{D}'^{(k)}$ é igual ao número de autovalores negativos $\lambda_i'^{(k)}$. Isto é, o número de coeficientes negativos em \mathbf{D}' é igual ao número de autovalores de \mathbf{A} menores do que o deslocamento da origem α .

Efetuar um deslocamento α da origem dos autovalores no problema ($\mathbf{K}\Phi = \mathbf{M}\Phi\Omega$) corresponde a considerar como nova matriz de rigidez ($\mathbf{K}' = \mathbf{K} - \alpha\mathbf{M}$), o que equivale ao novo problema de autovalor ($\mathbf{K}'\Phi = \mathbf{M}\Phi(\Omega - \alpha\mathbf{I}) = \mathbf{M}\Phi\Omega'$), em que ($\Omega' = \Omega - \alpha\mathbf{I}$).

Logo, com a transformação à forma reduzida expressa na Equação 9-1.35, que requer matriz de massa positiva-definida, tem-se:

$$\mathbf{A}^* \mathbf{X}^* = \mathbf{X}^* \Omega' \quad (9-4.10)$$

onde

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{U}^{*-T} \mathbf{K}' \mathbf{U}^{*-1} \quad (9-4.11a)$$

e

$$\mathbf{X}^* = \mathbf{U}^* \Phi \quad (9-4.11b)$$

em que \mathbf{U}^* é o fator de Cholesky.

Finalmente, de forma análoga ao expresso na Equação 9-4.7, considera-se a fatoração:

$$\mathbf{K}' = \mathbf{L} \mathbf{D} \mathbf{L}^T \quad (9-4.12)$$

em que \mathbf{L} é uma matriz triangular inferior de coeficientes diagonais unitários e \mathbf{D} é uma matriz diagonal. Logo, com a substituição dessa fatoração na Equação 9-4.11a, obtém-se:

$$\mathbf{A}^* = (\mathbf{U}^{*-T} \mathbf{L}) \mathbf{D} (\mathbf{L}^T \mathbf{U}^{*-1}) \quad (9-4.13)$$

Assim, pelo fato de a matriz \mathbf{U}^* ser triangular superior, a sua matriz inversa também o é, e os coeficientes diagonais dessa inversa são os recíprocos dos correspondentes coeficientes diagonais daquela matriz, coeficientes estes que são, então, positivos. O produto matricial $\mathbf{U}^{*-T} \mathbf{L}$ é uma matriz triangular inferior de coeficientes diagonais positivos, e $\mathbf{L}^T \mathbf{U}^{*-1}$ é uma triangular superior com essa mesma característica. Logo, com a fatoração:

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{L}^* \mathbf{D}^* \mathbf{L}^{*T} \quad (9-4.14)$$

em que \mathbf{L}^* é uma matriz triangular inferior de coeficientes diagonais unitários e \mathbf{D}^* é uma matriz diagonal, o número de coeficientes negativos dessa matriz é igual ao número de coeficientes negativos da matriz diagonal \mathbf{D} , que, por sua vez, é igual ao número de autovalores do problema ($\mathbf{K}\Phi = \mathbf{M}\Phi\Omega$), menores do que α .

Há que se observar, contudo, a necessidade de o valor do deslocamento da origem não coincidir com um autovalor desse problema, para que a matriz \mathbf{K}' seja não singular e se tenha estabilidade numérica na fatoração ($\mathbf{K}' = \mathbf{LDL}^T$).

EXEMPLO 9-4.2

Para comprovar numericamente a correspondência entre um deslocamento da origem dos autovalores e o número de coeficientes diagonais negativos na matriz \mathbf{D} contida na fatoração expressa na Equação 9-4.12, considerou-se novamente o problema de autovalor do Exemplo 9-2.1 e arbitrou-se ($\alpha = 1,5$) que situa-se entre os autovalores λ_2 e λ_3 .

Logo, obteve-se a matriz transformada $\mathbf{K}' = \mathbf{K} - \alpha \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -0,5 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0,5 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -0,5 \end{bmatrix}$, cuja fatoração $\mathbf{K}' = \mathbf{LDL}^T$ se escreve

$$\mathbf{K}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0,666\ 667 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,166\ 667 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0,666\ 667 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nessa fatoração, identifica-se que a matriz \mathbf{D} tem dois coeficientes diagonais negativos, em número igual ao de autovalores menores do que o deslocamento da origem adotado.

9-5 ITERAÇÃO INVERSA

O método de iteração inversa é fundamental ao método de iteração por subespaço, tema da próxima seção. Em sua forma básica, consiste em uma sequência de resoluções de sistemas de equações algébricas, com convergência para o primeiro autotar do problema ($\mathbf{K}\Phi = \mathbf{M}\Phi\Omega$). Esse método tem grande estabilidade numérica, permite o aproveitamento das características de esparsidade das matrizes de rigidez e de massa e, quando acoplado a um procedimento de ortogonalização de vetores, pode fornecer um conjunto dos primeiros autotares.

Seja o problema de autovalor ($\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i$) de matriz simétrica não singular \mathbf{A} , de ordem $n \times n$, para escrever:²⁵

$$\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{x}_i = \mathbf{A}^{-1} \lambda_i \mathbf{x}_i \rightarrow \mathbf{A}^{-1} \mathbf{x}_i = \frac{1}{\lambda_i} \mathbf{x}_i \quad (9-5.1)$$

²⁵ No caso de matriz singular, pode-se efetuar um deslocamento espectral pra obter matriz não singular.

Isto é, os n autovalores da inversa da matriz \mathbf{A} são os recíprocos dos autovalores dessa matriz e ambas têm os mesmos autovetores, que são linearmente independentes e ortogonais entre si, por se tratar de matriz simétrica.²⁶

Com a ordenação $|\lambda_1| < |\lambda_2| \leq |\lambda_i| \leq \dots \leq |\lambda_n|$ um escalar ($\alpha_1 \neq 0$), estabelece-se a sequência de formação de vetores:

$$\mathbf{y}_1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{x}_i \quad (9-5.2)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_2 &= \mathbf{A}^{-1} \mathbf{y}_1 = \mathbf{A}^{-1} \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{x}_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{1}{\lambda_i} \mathbf{x}_i \\ \mathbf{y}_3 &= \mathbf{A}^{-1} \mathbf{y}_2 = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{y}_1 = \mathbf{A}^{-2} \mathbf{y}_1 = \mathbf{A}^{-1} \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{1}{\lambda_i} \mathbf{x}_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{1}{\lambda_i^2} \mathbf{x}_i \\ &\dots \\ \mathbf{y}_j &= \mathbf{A}^{-1} \mathbf{y}_{j-1} = \mathbf{A}^{j-1} \mathbf{y}_1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{1}{\lambda_i^{j-1}} \mathbf{x}_i \end{aligned} \quad (9-5.3)$$

Essa última expressão de vetor escreve-se também sob as seguintes formas:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_j &= \frac{1}{\lambda_1^{j-1}} \sum_{i=1}^n \alpha_i \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_i} \right)^{j-1} \mathbf{x}_i \rightarrow \mathbf{y}_j = \frac{1}{\lambda_1^{j-1}} \left(\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \sum_{i=2}^n \alpha_i \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_i} \right)^{j-1} \mathbf{x}_i \right) \\ \rightarrow \mathbf{y}_j &= \frac{1}{\lambda_1^{j-1}} \left(\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \sum_{i=2}^n \alpha_i \varepsilon_i^{j-1} \mathbf{x}_i \right) \text{ em que } \lim_{j \rightarrow \infty} \varepsilon_i^{j-1} = 0. \end{aligned}$$

Assim, com j suficientemente grande, tem-se o vetor:

$$\mathbf{y}_j \cong \frac{1}{\lambda_1^{j-1}} \alpha_1 \mathbf{x}_1 \quad (9-5.4)$$

Isto é, o vetor \mathbf{y}_j pode ter a proximidade que se desejar ao primeiro autovetor e fornecer:

$$\mathbf{y}_{j+1} \cong \frac{1}{\lambda_1^j} \alpha_1 \mathbf{x}_1 \quad (9-5.5)$$

o que permite escrever:

$$\mathbf{y}_{j+1} \cong \frac{1}{\lambda_1} \mathbf{y}_j \quad (9-5.6)$$

Logo, com a escolha do i -ésimo coeficiente de cada um dos vetores dessa última expressão, obtém-se a seguinte aproximação ao primeiro autovalor:

$$\lambda_1 \cong \frac{y_{j(i)}}{y_{j+1(i)}} \quad (9-5.7)$$

²⁶ O nome *iteração inversa* se deve ao uso da inversa da matriz que se deseja calcular autovalor. É também chamado de *método de Stodola*, em homenagem ao cientista eslovaco Aurel Boleskov Stodola (1859-1942).

Assim, no presente método, arbitra-se um vetor de partica \mathbf{y}_1 que é modificado iterativamente até se aproximar ao primeiro autovetor, a partir do qual se obtém uma aproximação ao primeiro autovalor.²⁷ Quanto maior o afastamento relativo entre $|\lambda_1|$ e $|\lambda_2|$, melhor é a convergência ao primeiro autopar. Com os autovalores múltiplos $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_m$, a razão de convergência é $(\lambda_1/\lambda_{m+1})$, e a convergência ocorre para um vetor no subespaço definido pelos autovetores $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m$. Além disso, é simples identificar que, com $|\lambda_2| < |\lambda_3|$ e um vetor \mathbf{y}_1 ortogonal ao primeiro autovetor, a convergência se dá para o segundo autopar.²⁸

Anteriormente, foi utilizado o produto matricial ($\mathbf{y}_j = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}_{j-1}$), o que tem a desvantagem de conter matriz inversa. Para evitar essa inversa, escreve-se a partir desse produto:

$$\mathbf{A} \mathbf{y}_j = \mathbf{y}_{j-1} \quad (9-5.8)$$

que requer a resolução de um sistema de equações algébricas em cada etapa da sequência iterativa.

Também, como na sequência do presente método pode ocorrer crescimento e/ou decréscimo desproporcional dos valores dos coeficientes do vetor iterativo, denominados *overflow* e *underflow*, é indicado normalizar esse vetor em cada etapa do procedimento. Assim, modifica-se a expressão anterior para a forma:

$$\mathbf{A} \mathbf{y}_j^* = \mathbf{y}_{j-1} \quad (9-5.9)$$

com ($j = 2, 3, 4 \dots$) e em que:

$$\mathbf{y}_{j-1} = \frac{\mathbf{y}_{j-1}^*}{(\mathbf{y}_{j-1}^{*T} \mathbf{y}_{j-1}^*)^{1/2}} \quad (9-5.10)$$

Já para o problema de autovalor generalizado ($\mathbf{K}\Phi = \mathbf{M}\Phi\Omega$), de matriz de rigidez positiva-definida e com ($\mathbf{y}_1 = \mathbf{M}\mathbf{x}_1$), em que \mathbf{x}_1 é um vetor de partida, o método de iteração inversa tem a seguinte sequência de resoluções de sistemas de equações:

$$\mathbf{K} \mathbf{x}_j^* = \mathbf{M} \mathbf{x}_{j-1} = \mathbf{y}_{j-1} \quad (9-5.11)$$

com ($j = 2, 3, 4 \dots$) e em que:

$$\mathbf{x}_{j-1} = \frac{\mathbf{x}_{j-1}^*}{(\mathbf{x}_{j-1}^{*T} \mathbf{M} \mathbf{x}_{j-1}^*)^{1/2}} \quad (9-5.12)$$

Dessa forma, ocorre a M-normalização do vetor de iteração, pois se tem:

$$\mathbf{x}_j^T \mathbf{M} \mathbf{x}_j = \frac{\mathbf{x}_j^{*T}}{(\mathbf{x}_j^{*T} \mathbf{M} \mathbf{x}_j^*)^{1/2}} \mathbf{M} \frac{\mathbf{x}_j^*}{(\mathbf{x}_j^{*T} \mathbf{M} \mathbf{x}_j^*)^{1/2}} = 1 \quad (9-5.13)$$

O vetor \mathbf{x}_j converge para o autovetor ϕ_1 em caso de o vetor ($\mathbf{y}_1 = \mathbf{M}\mathbf{x}_1$) não ser ortogonal a esse autovetor. Com um vetor de partida igual a $\lambda_1 \phi_1$, a Equação 9-5.11 recai na forma ($\mathbf{K}\mathbf{x}_2^* = \mathbf{M}\phi_1 \lambda_1$) em que \mathbf{x}_2^* é o primeiro autovetor.

²⁷ De forma recíproca, com o método de iteração direta, não apresentado neste livro, obtém-se o último autopar.

²⁸ Arredondamentos da aritmética de ponto-flutuante podem afetar a ortogonalidade do vetor de iteração ao primeiro autovetor e afetar a convergência ao segundo autopar.

Além disso, para obter uma aproximação ao primeiro autovalor em cada etapa de iteração, utiliza-se o *quociente de Rayleigh* que, com a presente notação, se escreve:

$$\rho(\mathbf{x}_j^*) = \frac{\mathbf{x}_j^{*T} \mathbf{K} \mathbf{x}_j^*}{\mathbf{x}_j^{*T} \mathbf{M} \mathbf{x}_j^*} = \frac{\mathbf{x}_j^{*T} \mathbf{y}_{j-1}}{\mathbf{x}_j^{*T} \mathbf{y}_j^*} \quad (9-5.14)$$

em que:

$$\mathbf{y}_{j-1} = \mathbf{K} \mathbf{x}_j^* \quad (9-5.15)$$

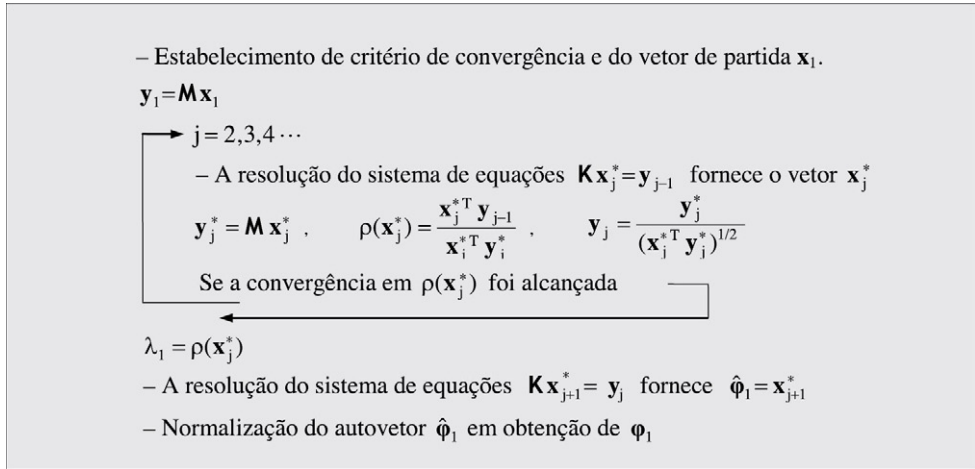
e

$$\mathbf{y}_j^* = \mathbf{M} \mathbf{x}_j^* \quad (9-5.16)$$

são vetores auxiliares utilizados para reduzir o número de operações aritméticas. Isso porque, com esses vetores, tem-se:

$$\mathbf{y}_j = \mathbf{M} \mathbf{x}_j = \frac{\mathbf{M} \mathbf{x}_j^*}{(\mathbf{x}_j^{*T} \mathbf{M} \mathbf{x}_j^*)^{1/2}} \rightarrow \mathbf{y}_j = \frac{\mathbf{y}_j^*}{(\mathbf{x}_j^{*T} \mathbf{y}_j^*)^{1/2}} \quad (9-5.17)$$

Assim, constrói-se o [Algoritmo 9-5.1](#):



ALGORITMO 9-5.1 Determinação do primeiro autotar com o *método de iteração inversa*.

Como já foi esclarecido, para obter convergência é necessário que o vetor ($\mathbf{y}_1 = \mathbf{M} \mathbf{x}_1$) não seja ortogonal ao primeiro autovetor, o que pode ser atendido com o estabelecimento de um vetor de partida de números aleatórios.

A penúltima linha do algoritmo anterior expressa uma iteração adicional, com o objetivo de melhorar a acurácia do primeiro autovetor em relação ao correspondente autovalor. Isso porque, sendo \mathbf{x}_j^* uma aproximação de ordem ε ao autovetor $\boldsymbol{\phi}_1$, o *quociente de Rayleigh* é uma aproximação de ordem ε^2 ao autovalor λ_1 .

A verificação de convergência nesse último algoritmo é semelhante ao apresentado na Equação 9-3.9, agora por comparação de resultados consecutivos do *quociente de Rayleigh*:

$$\left| \frac{\rho(\mathbf{x}_j^*) - \rho(\mathbf{x}_{j-1}^*)}{\rho(\mathbf{x}_j^*)} \right| \leq \text{tolerância} = 10^{-d} \quad (9-5.18)$$

onde d é o número de algarismos significativos desejados no autovalor.

EXEMPLO 9-5.1

Para mostrar o funcionamento do algoritmo anterior, adotou-se o vetor ($\mathbf{y}_1 = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$) e considerou-se novamente o sistema massa-mola do Exemplo 9-3.1, cujo problema de autovalor tem a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Phi = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Phi \Omega$$

Com ($j = 1$) no descrito algoritmo, obteve-se ($\lambda_1 = 0,245 \ 847$).

Com ($j = 2$), obteve-se ($\lambda_1 = 0,238 \ 170$).

Com ($j = 3$), obteve-se ($\lambda_1 = 0,237 \ 391$), com ($j = 4$), obteve-se ($\lambda_1 = 0,237 \ 298$), com ($j = 5$), obteve-se ($\lambda_1 = 0,237 \ 288$).

Finalmente, com ($j = 6$), obteve-se ($\lambda_1 = 0,237 \ 286$), resultado este que é coincidente com o primeiro autovalor que foi obtido com o *método de Jacobi*, no Exemplo 9-3.1.

Na oitava iteração, com a normalização do autovetor em relação à matriz de massa,

$$\text{obteve-se } \Phi_1 = \begin{Bmatrix} 0,242 \ 180 \\ 0,317 \ 537 \\ 0,536 \ 246 \\ 0,702 \ 070 \end{Bmatrix}, \text{ com quatro casas decimais corretas, o que confirma que, para uma}$$

mesma acurácia, o *método de iteração inversa* requer um número maior de iterações em obtenção de autovetor do que em determinação do correspondente autovalor.

Como há uma resolução de sistema de equações algébricas em cada iteração do último algoritmo, é conveniente efetuar, antes do início das iterações, a fatoração da matriz dos coeficientes \mathbf{K} em matrizes triangulares e resolver dois sistemas de matriz triangular em cada ciclo iterativo, com o aproveitamento de características de esparsidade.

Além disso, como a convergência depende do afastamento relativo entre autovalores, pode-se efetuar um deslocamento espectral para aumentar a razão de convergência. Para isso, com ($\mathbf{K}' = \mathbf{K} - \alpha \mathbf{M}$), chega-se ao novo problema de autovalor ($\mathbf{K}'\Phi = \mathbf{M}\Phi\Omega'$), em que ($\Omega' = \Omega - \alpha \mathbf{I}$). Assim, após uma ou mais iterações, pode-se fazer o escalar α igual ao *quociente de Rayleigh* de maneira a melhorar a convergência. Contudo, como cada deslocamento espectral requer nova fatoração de matriz, é indicado, em caso de se ter estimativa para o primeiro autovalor, efetuar um único deslocamento da origem para a proximidade inferior dessa estimativa, antes do início dos ciclos iterativos.

O *método de iteração inversa* pode ser estendido para a obtenção consecutiva de autopares. Para isso, impõe-se a condição de que o vetor de partida, em cada determinação de autopar, seja M-ortogonal aos autovetores de ordem inferior determinados. Com esse objetivo, entre outros procedimentos, tem-se a *ortogonalização de Gram-Schmidt*,²⁹ que se escreve:

$$\mathbf{x}_1^* = \mathbf{x}_1 - \sum_{\ell=1}^i \alpha_{\ell} \boldsymbol{\varphi}_{\ell} \quad (9-5.19)$$

onde, a partir de um vetor \mathbf{x}_1 , os escalares α_i são obtidos com a condição de que o vetor \mathbf{x}_1^* seja M-ortogonal aos i autovetores já calculados. Isto é, deve-se ter $(\boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{M} \mathbf{x}_1^* = 0)$, com $(j = 1, 2, \dots, i)$, o que fornece, com base na expressão anterior:³⁰

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{M} \mathbf{x}_1^* &= \boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{M} \mathbf{x}_1 - \sum_{\ell=1}^i \boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{M} \alpha_{\ell} \boldsymbol{\varphi}_{\ell} = 0 \\ \rightarrow \boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{M} \mathbf{x}_1 &= \boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{M} \alpha_j \boldsymbol{\varphi}_j + \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^i \boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{M} \alpha_{\ell} \boldsymbol{\varphi}_{\ell} \end{aligned} \quad (9-5.20)$$

Logo, como os autovetores $\boldsymbol{\varphi}_j$ são normalizados em relação à matriz de massa, obtém-se da expressão anterior:

$$\alpha_j = \boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{M} \mathbf{x}_1, \quad j = 1, 2, \dots, i \quad (9-5.21)$$

Essa ortogonalização é essencial antes dos ciclos iterativos de determinação de cada autopar, a partir do segundo. Contudo, os erros de arredondamento inerentes à aritmética em ponto-flutuante dos computadores podem alterar a ortogonalidade do vetor iterativo e afetar a esperada convergência. Por essa razão, é indicado que a ortogonalização seja efetuada entre os ciclos iterativos de cada novo autopar e que seja utilizada tolerância de convergência bastante pequena.

Assim, para a resolução parcial do problema de autovalor, modifica-se o algoritmo anterior para a seguinte forma:

²⁹ Denominação em homenagem ao matemático dinamarquês Jorgen Pederson Gram (1850-1916) e ao matemático alemão Erhard Schmidt (1876-1959).

³⁰ Diz-se que essa ortogonalização é uma *deflação vetorial*. Wilkinson (1965) apresenta a *deflação matricial*, que consiste em retirar, da matriz de um problema de autovalor na forma reduzida, a parcela de contribuição dos autopares já calculados. Trata-se de técnica de grande estabilidade numérica, mas que apresenta a desvantagem de não possibilitar o aproveitamento da esparsidade das matrizes \mathbf{K} e \mathbf{M} .

– Estabelecimento de critério de convergência e do número p de autopares desejados.

→ $i = 1, \dots, p$

– Estabelecimento de um vetor de partida \mathbf{x}_1 .

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{M} \mathbf{x}_1$$

→ $j = 2, 3, 4, \dots$

– A resolução do sistema de equações $\mathbf{K} \mathbf{x}'_j = \mathbf{y}_{j-1}$ fornece o vetor \mathbf{x}'_j

Se $i = 1$ faz-se $\mathbf{x}^*_j = \mathbf{x}'_j$

Se $i \neq 1$ faz-se

$$\begin{aligned} &\rightarrow \ell = 1, \dots, (i-1) \\ &\quad \alpha_\ell = \boldsymbol{\varphi}_\ell^T \mathbf{M} \mathbf{x}'_j \\ &\quad \mathbf{x}^*_j = \mathbf{x}'_j - \sum_{\ell=1}^{i-1} \alpha_\ell \boldsymbol{\varphi}_\ell \end{aligned}$$

$$\mathbf{y}^*_j = \mathbf{M} \mathbf{x}^*_j$$

$$\rho(\mathbf{x}^*_j) = \frac{\mathbf{x}^{*T}_j \mathbf{y}_{j-1}}{\mathbf{x}^{*T}_j \mathbf{y}^*_j}$$

$$\mathbf{y}_j = \frac{\mathbf{y}^*_j}{(\mathbf{x}^{*T}_j \mathbf{y}^*_j)^{1/2}}$$

Se a convergência em $\rho(\mathbf{x}^*_j)$ foi alcançada

$$\lambda_i = \rho(\mathbf{x}^*_j)$$

– A resolução do sistema de equações $\mathbf{K} \mathbf{x}^*_{j+1} = \mathbf{y}_j$ fornece $\hat{\boldsymbol{\varphi}}_i = \mathbf{x}^*_{j+1}$

– Normalização do autovetor $\hat{\boldsymbol{\varphi}}_i$: $\boldsymbol{\varphi}_i = \frac{\mathbf{x}^*_{j+1}}{(\mathbf{x}^{*T}_{j+1} \mathbf{M} \mathbf{x}^*_{j+1})^{1/2}}$

ALGORITMO 9-5.2 Determinação de p autopares com o método de iteração inversa.

EXEMPLO 9-5.2

Em continuidade do Exemplo 9-5.1 e para a determinação do segundo autopar com o algoritmo anterior, foram adotados os vetores:

$$\mathbf{y}_1 = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T \text{ e } \mathbf{y}_2 = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$$

$$\text{Na iteração } (j = 7), \text{ obteve-se } (\lambda_2 = 0,684 \ 552) \text{ e } \boldsymbol{\varphi}_2 = \begin{Bmatrix} 0,255 \ 973 \\ 0,811 \ 113 \\ -0,138 \ 219 \\ -0,438 \ 124 \end{Bmatrix}$$

Em comparação com resultados do Exemplo 9-3.1, identifica-se que o autovalor anterior tem precisão até a quinta casa decimal e que o autovetor anterior tem precisão até a terceira casa decimal.

Na iteração ($j = 12$), obteve-se ($\lambda_2 = 0,684551$), com todas as seis casas decimais corretas, e

$$\Phi_2 = \begin{Bmatrix} 0,255\,975 \\ 0,811\,460 \\ -0,138\,120 \\ -0,437\,534 \end{Bmatrix}, \text{ com acurácia até a quinta casa decimal.}$$

Na final da iteração ($j = 14$), obteve-se $\Phi_2 = \begin{Bmatrix} 0,255\,975 \\ 0,811\,462 \\ -0,138\,019 \\ -0,437\,531 \end{Bmatrix}$, que é o resultado do segundo autovetor com as seis casas decimais corretas.

Em caso de problema de autovalores múltiplos, os correspondentes autovetores não são únicos, e o presente método apresenta dificuldade de convergência. Essa dificuldade não ocorre com o método desenvolvido a seguir.

9-6 ITERAÇÃO POR SUBESPAÇO

O método de iteração por subespaço³¹ é o mais eficaz método de determinação dos p primeiros autopares do problema ($\mathbf{K}\Phi = \mathbf{M}\Phi\Omega$) de matriz \mathbf{K} positiva-definida definida no espaço n -dimensional.³² Tem as vantagens de ser estável e muito eficiente em caso de modelo de elevado número de graus de liberdade, além de permitir o aproveitamento das características de esparsidade das matrizes de rigidez e de massa.

Trata-se da combinação de iterações inversas simultâneas de vários vetores com a *análise de Rayleigh-Ritz*. Nessas iterações são utilizados q vetores, com $q > p$, para a obtenção de melhores aproximações aos p primeiros autovetores. Consecutivamente, com base nessas aproximações e através da *análise de Rayleigh-Ritz* são obtidos ainda melhores aproximações a esses autovetores, aproximações estas que satisfazem às condições de ortogonalidade com respeito às matrizes de rigidez e de massa. Assim, em cada ciclo de iteração, obtém-se um problema de autovalor generalizado no subespaço E_q definido pelos vetores de iteração, cujos autovetores são convertidos ao espaço inicial para, então, se efetuar uma nova iteração inversa simultânea com os novos q vetores. Dessa maneira, com a condição de que os vetores de partida definam um subespaço não ortogonal a nenhum dos p primeiros autovetores, o subespaço E_q se aproxima gradativamente em conter o subespaço desses autovetores, E_p . Isto é, obtém-se convergência para os p primeiros autopares M -ortonormalizados. E se os vetores de partida forem combinações lineares desses autovetores, a solução é obtida em uma única iteração.

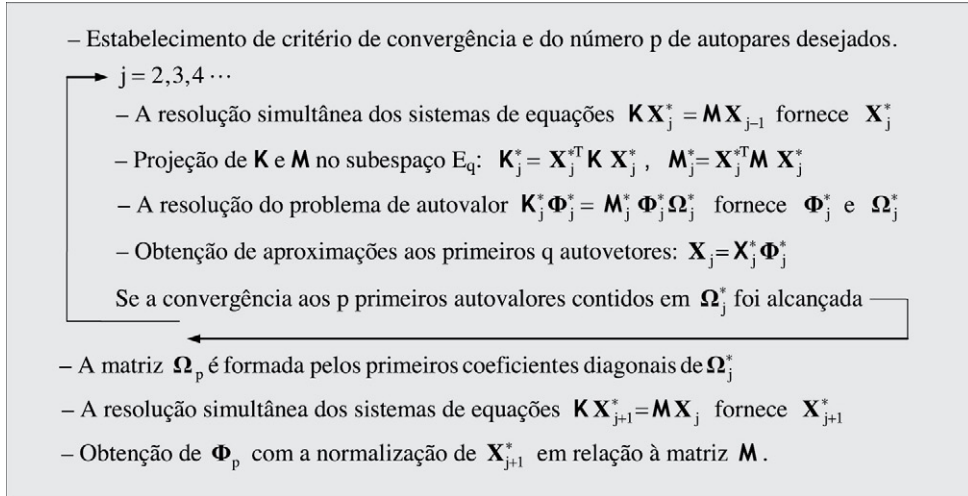
Assim, estabelecida uma *base de Ritz* composta de q vetores linearmente independentes entre si e não ortogonais aos p primeiros autovetores:

$$\mathbf{X}_1 = [\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \cdots \ \mathbf{x}_q] \quad (9-6.1)$$

³¹ Rutishauser, H., 1970, *Simultaneous Iteration Method for Symmetric Matrices*, Numerische Mathematic, vol. 6, n° 3, pp. 205-223. Bathe, K. J. & Wilson, E. L., 1972, *Large Eigenvalue Problems in Dynamic Analysis*, ASCE – American Society of Civil Engineers, Journal of the Engineering Mechanics Division, EM 6, pp. 1471-1485.

³² Problema de autovalor com matriz de rigidez não restringida pode ser resolvido efetuando-se um pequeno deslocamento espectral negativo, em obtenção de matriz positiva-definida.

o método de iteração por subespaço tem o seguinte algoritmo básico:



ALGORITMO 9-6.1 Versão básica do método de iteração por subespaço.

Em composição do método de iteração por subespaço, o método de Jacobi generalizado é o mais indicado para a resolução do problema de autovalor no subespaço E_q , dado que:

- é muito estável e adequado para a resolução completa de problema de autovalor de matrizes simétricas reais,
- as matrizes projetadas no subespaço E_q , K_j^* e M_j^* tendem para diagonais no procedimento de iteração por subespaço, o que melhora a convergência do método.

A verificação de convergência é semelhante ao expresso na Equação 9-5.18, após a indicação de convergência. No algoritmo anterior, após a comprovação dessa convergência, foi incluída uma iteração adicional com o objetivo de melhorar a acurácia dos resultados de autovetores, que são obtidos com menor ocorrência que os autovalores em uma *análise de Rayleigh-Ritz*.

EXEMPLO 9-6

Para mostrar a eficiência do algoritmo anterior, considerou-se novamente o problema de autovalor do Exemplo 9-2.1, agora com os vetores de partida:

$$X_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Na iteração ($j=6$) foram obtidos os autovalores ($\lambda_1 = 0,237\ 286$), ($\lambda_2 = 0,684\ 554$) e ($\lambda_3 = 2,044\ 249$). O primeiro tem as suas seis casas decimais corretas, o segundo, quatro casas decimais corretas, e o terceiro, apenas a primeira casa correta.

Na iteração ($j = 6$), foram obtidos os autovetores

$$\Phi_1 = \begin{Bmatrix} 0,242\,174 \\ 0,317\,516 \\ 0,536\,250 \\ 0,703\,081 \end{Bmatrix}, \quad \Phi_2 = \begin{Bmatrix} 0,255\,941 \\ 0,811\,450 \\ -0,137\,814 \\ -0,437\,658 \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \Phi_3 = \begin{Bmatrix} 0,498\,968 \\ -0,470\,488 \\ 0,349\,719 \\ -0,397\,994 \end{Bmatrix}$$

O primeiro desses autovetores tem seis casas decimais corretas, o segundo tem quatro casas decimais corretas, e o terceiro, apenas a primeira casa decimal correta.

Na iteração ($j = 10$) foram obtidos os dois primeiros autovetores com seis casas decimais corretas, o que ocorreu com um menor número de iterações, no caso da iteração inversa, pelo fato de essa iteração fornecer um autopar por vez. Além do que, é mais fácil escolher um subespaço q -dimensional que esteja próximo de conter o subespaço E_p do que escolher p vetores de partida que estejam isoladamente próximos dos p primeiros autovetores.

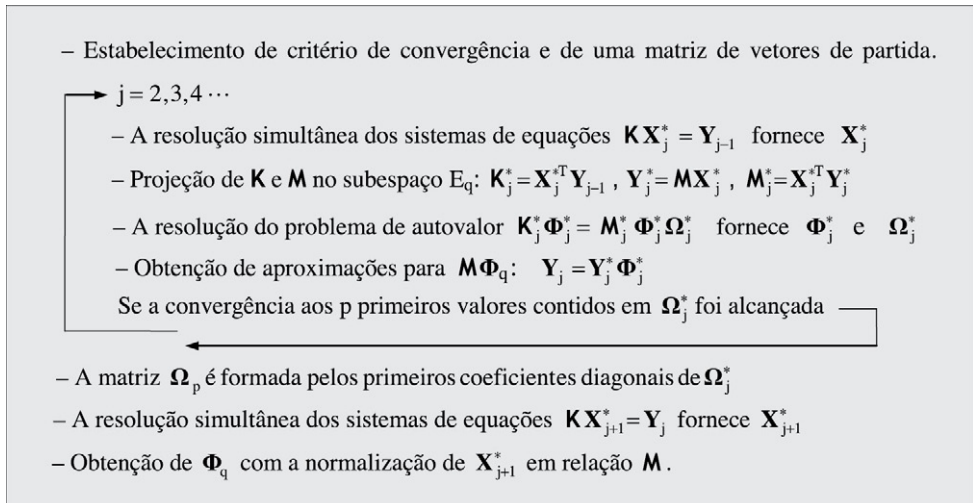
De forma semelhante aos vetores auxiliares definidos nas Equações 9-5.15 e 9-5.16 para o *método de iteração inversa*, o presente método fica mais eficiente com o uso das matrizes auxiliares:

$$\mathbf{Y}_{j-1} = \mathbf{K} \mathbf{X}_j^* \quad (9-6.2)$$

e

$$\mathbf{Y}_j^* = \mathbf{M} \mathbf{X}_j^* \quad (9-6.3)$$

Com essas matrizes, o algoritmo anterior modifica-se para seguinte forma:



ALGORITMO 9-6.2 Versão aprimorada do método de iteração por subespaço.

O presente método é mais eficiente computacionalmente em caso de matriz de massa diagonal. Matriz esta que pode conter coeficientes diagonais nulos (como é o caso de matriz discreta de estrutura reticulada em que se desconsidera inércia de rotação), com a condição

de que as projeções dessa matriz no subespaço E_q não tenham coeficientes diagonais nulos. Isso, pelo fato de se adotar o *método de Jacobi generalizado* (que requer matriz de massa positiva-definida).

É de interesse a escolha de vetores de partida que assegurem convergência rápida aos primeiros autopares. Entre esses, os de menor ordem são obtidos com maior acurácia do que os de ordem mais elevada, de maneira que o aumento do número de vetores de iteração favorece a convergência aos p primeiros autopares. Contudo, como esse aumento implica mais processamento computacional, há necessidade de um adequado estabelecimento desse número e dos próprios vetores de partida.

Bathe & Wilson³³ verificaram numericamente que é eficaz utilizar vetores de partida em número igual ao menor valor entre $2p$ e $(p + 10)$. E a seguinte formação de vetores costuma ser adequada:

1. Definição da primeira coluna da matriz \mathbf{Y}_1 igual à diagonal principal da matriz \mathbf{M} , e a última coluna de \mathbf{Y}_1 igual a um vetor aleatório. Com isso, todos os graus de liberdade que possuem massa são “excitados” e há grande probabilidade de que esses vetores colunas não sejam ortogonais a nenhum dos p modos de vibração desejados.
2. Definição das demais colunas da matriz \mathbf{Y}_1 iguais a vetores com coeficiente igual a 1 na posição da ordem do grau de liberdade de maior razão m_{ii}/k_{ii} e com os demais coeficientes nulos. Assim, esses vetores colunas são linearmente independentes entre si e “excitam” os graus de liberdade com as maiores forças de inércia e as menores forças elásticas.

Mesmo com essa geração de vetores de partida, não se tem garantia de convergência para todos os p primeiros autopares. A experiência tem mostrado que, ocasionalmente, pode não ocorrer convergência para um ou alguns poucos desses pares.

Assim, é necessário aplicar o *teste da sequência de Sturm* que, de acordo com apresentado na Seção 9-4, consiste em efetuar um deslocamento α da origem do espectro dos autovalores, ligeiramente superior ao valor calculado para o p -ésimo autovalor, obtendo-se a matriz transformada ($\mathbf{K}' = \mathbf{K} - \alpha \mathbf{M}$). A fatoração ($\mathbf{K}' = \mathbf{LDL}^T$) contém a matriz diagonal \mathbf{D} em que o número de coeficientes negativos é igual ao de autovalores menores do que aquele deslocamento. Entretanto, como os autovalores são calculados de forma aproximada, é necessário adotar uma estimativa de intervalo em que se encontra o valor exato de cada autovalor, como, por exemplo:

$$0,999 \lambda_j' < \lambda_j < 1,001 \lambda_j' \quad (9-6.4)$$

onde λ_j' representa o valor calculado para o j -ésimo autovalor.

Além disso, quando há autovalores agrupados, o limite superior $1,001 \lambda_p'$ pode ser maior do que o limite inferior $0,999 \lambda_{p+1}'$, o que torna necessário estabelecer um limite superior ao grupo desses autovalores, para garantir a não singularidade da matriz \mathbf{K}' . Isso é ilustrado na Figura 9-6.1, em que $1,001 \lambda_p'$ é maior do que $0,999 \lambda_{p+1}'$, o que requer que se adote

³³ Bathe, K. J. & Wilson, E. L., 1973, *Solution Methods for Eigenvalue Problems in Structural Mechanics*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 6, pp. 213-226.

($\alpha = 1,001 \lambda'_{p+1}$). Assim, em caso de o número de coeficientes negativos na matriz diagonal **D** ser igual a $(p + 1)$, é porque ocorreu convergência para os $(p + 1)$ autovalores menores do que α , e em caso de esse número ser maior do que $(p + 1)$, não ocorreu convergência para um ou vários dos autopares desejados. Torna-se, então, necessária nova resolução do problema de autovalor com um maior número de vetores de partida e/ou com outra estratégia de formação desses vetores.

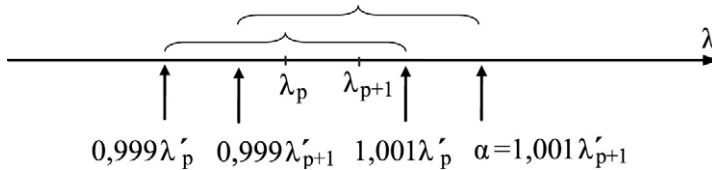


FIGURA 9-6.1 Estabelecimento do deslocamento da origem dos autovalores.

No presente método, as repetidas etapas de resolução simultânea dos q sistemas de equações algébricas lineares são as que requerem maior esforço computacional. E como a matriz dos coeficientes desses sistemas, que é a matriz de rigidez, se mantém constante, é indicada resolução com a fatoração dessa matriz através do *método de Gauss* ou do *método de Cholesky*.³⁴ Isso, com o aproveitamento da esparsidade dessa matriz através da técnica do *armazenamento por alturas efetivas de colunas*. Contudo, como o método de iteração por subespaço requer o produto ($\mathbf{Y}_j^* = \mathbf{M} \mathbf{X}_j^*$), é oportuno esclarecer como efetuar esse produto com matriz de massa consistente, que tem a mesma esparsidade que a matriz de rigidez, como ilustra a [Figura 9-6.2](#).

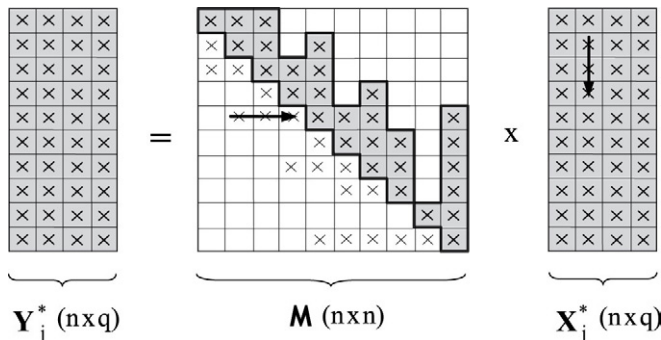


FIGURA 9-6.2 Produto ($\mathbf{Y}_j^* = \mathbf{M} \mathbf{X}_j^*$) do método de iteração por subespaço.

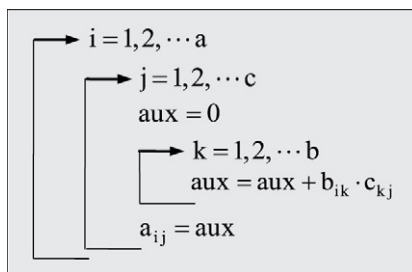
Uma vez que os coeficientes da parte triangular superior da matriz de massa, a partir do primeiro coeficiente não nulo de cada coluna da matriz e de cima para baixo, sejam armazenados em um vetor de trabalho, o produto $\mathbf{M} \mathbf{X}_j^*$, pode ser feito nas duas seguintes etapas:

1. Produto da parte triangular inferior da matriz **M**, com o percurso de cada coluna em forma transposta, a partir do primeiro coeficiente não nulo da coluna e sem a consideração do coeficiente da diagonal principal.

³⁴ Vide o Capítulo 4 de Soriano (2005).

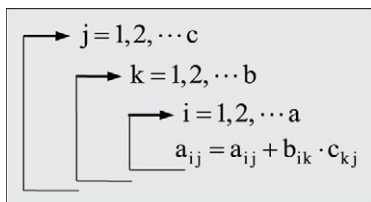
2. Produto da parte triangular superior da mesma matriz, com o percurso de cada coluna, a partir do primeiro coeficiente não da coluna e com a consideração do coeficiente diagonal principal, quando então se emprega um procedimento de contabilização no produto de matrizes.

Para entendimento do referido procedimento, seja o produto de uma matriz **B** de ordem $(a \times b)$ por uma matriz **C** de ordem $(b \times c)$, cujo resultado é uma matriz **A** de ordem $(a \times c)$. O algoritmo usual para esse produto tem a seguinte forma:



ALGORITMO 9-6.3 Produto usual de matrizes.

Nesse algoritmo, os coeficientes da matriz **B** são acessados segundo as linhas e, para cada valor assumido pelas duas variáveis incrementais mais externas, é executado o cálculo de um coeficiente da matriz **A**. A seguir, esse algoritmo é modificado para que o acesso aos coeficientes da matriz **B** seja segundo as suas colunas, em procedimento de cálculo dos coeficientes da matriz **A** por etapas. Isto é, para cada valor das duas variáveis incrementais mais externas, faz-se a determinação parcial de cada um desses coeficientes até que, ao serem atingidos os limites superiores daquelas variáveis, se obtenham os valores finais desses coeficientes.



ALGORITMO 9-6.4 Produto de matrizes em procedimento de contabilização.

9-7 VETORES DE RITZ E VETORES DE LANCZOS

Na Seção 6-2 foi detalhado o *método de superposição modal standard*, que se baseia em amortecimento proporcional e em transformação das coordenadas físicas em coordenadas de um subespaço E_p , com $p \ll n$, em obtenção de p equações desacopladas. Resolvidas essas equações, retorna-se às coordenadas originais, em obtenção da resposta dinâmica. A acurácia do método depende do número de modos naturais de vibração utilizados na transformação e pode ser aprimorada com a correção estática dos modos de vibração superiores. O maior volume de cálculo é, usualmente, o da resolução parcial de um problema de autovalor.

Assim, a utilização de modos naturais de vibração nesse método de superposição tem as vantagens de:

- requerer extenso processamento computacional em resolução parcial de um problema de autovalor, principalmente em caso de modelo de elevado número de graus de liberdade,
- necessitar de correção estática dos modos de vibração superiores em caso dos modos de vibração utilizados não bem representarem a distribuição espacial das ações externas. Por sua vez, essa correção requer elevado volume de cálculo em caso de não haver separação entre uma distribuição espacial de forças e uma função do tempo.

O método de superposição modal é um caso particular do *método de Ritz* de superposição de resposta individuais, em que modos naturais de vibração são os *vetores de Ritz*. Outros vetores de Ritz podem ser utilizados em resolução das equações de movimento, embora só haja interesse em transformação de coordenadas que requeira menos processamento do que com a transformação com modos naturais de vibração, para uma acurácia julgada satisfatória.

Uma construção de matriz de transformação com esse objetivo é baseada na *análise de Rayleigh-Ritz*, apresentada na [Seção 9-2](#). Nessa análise parte-se da combinação linear:

$$\boldsymbol{\varphi}_j^* = \sum_{i=1}^p \alpha_i \mathbf{x}_i = \mathbf{X} \boldsymbol{\alpha}_j \quad (9-7.1)$$

em que a matriz \mathbf{X} é formada por p vetores linearmente independentes, que são *vetores de Ritz* e que definem um subespaço E_p contido no espaço E_n original.

Com essa matriz fazem-se as seguintes projeções das matrizes \mathbf{K} e \mathbf{M} no referido subespaço:

$$\begin{cases} \mathbf{K}^* = \mathbf{X}^T \mathbf{K} \mathbf{X} \\ \mathbf{M}^* = \mathbf{X}^T \mathbf{M} \mathbf{X} \end{cases} \quad (9-7.2)$$

Essas projeções conduzem ao problema de autovalor:

$$\mathbf{K}^* \boldsymbol{\alpha}_j = \rho_j \mathbf{M}^* \boldsymbol{\alpha}_j \quad (9-7.3)$$

A resolução desse problema, com a condição de normalização ($\boldsymbol{\alpha}_j^T \mathbf{M}^* \boldsymbol{\alpha}_i = \delta_{ij}$), fornece o autovetor $\boldsymbol{\alpha}_j$ que define o vetor $\boldsymbol{\varphi}_j^*$ através da Equação 9-7.1, de maneira a se ter:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varphi}_j^{*T} \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_i^* = \delta_{ij} \\ \boldsymbol{\varphi}_j^{*T} \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}_j^* = \rho_j \\ \boldsymbol{\varphi}_j^{*T} \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}_i^* = 0 \quad \text{com } i \neq j \end{cases} \quad (9-7.4)$$

Os vetores $\boldsymbol{\varphi}_j^*$, com ($j = 1, 2, \dots, p$), são mais próximos aos p primeiros modos de vibração do que os *vetores de Ritz* de partida, além de ortogonais com respeito às matrizes de massa e de rigidez. Isto é, a matriz:

$$\boldsymbol{\Phi}^* = [\boldsymbol{\varphi}_1^* \dots \boldsymbol{\varphi}_p^*] \quad (9-7.5)$$

diagonaliza as matrizes \mathbf{M} e \mathbf{K} através de transformações similares e, portanto, pode ser utilizada em desacoplamento das equações de movimento em caso de *amortecimento proporcional*.³⁵

³⁵ Wilson, E. L.; Yuan, M. W. & Dickens, J. M., 1982, *Dynamic Analysis by Direct Superposition of Ritz Vectors*, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, vol. 10, pp. 813-821.

A dificuldade em potencial do procedimento anterior é escolher vetores de Ritz que definam a um subespaço em que esteja contida, com acurácia adequada, a resposta dinâmica. Um procedimento mais efetivo é o da geração de *vetores de Lanczos*, descrito a seguir.³⁶

Considera-se o caso de vetor de forças nodais com a separação de variáveis expressa na Equação 6-2.31, que se repete por conveniência:

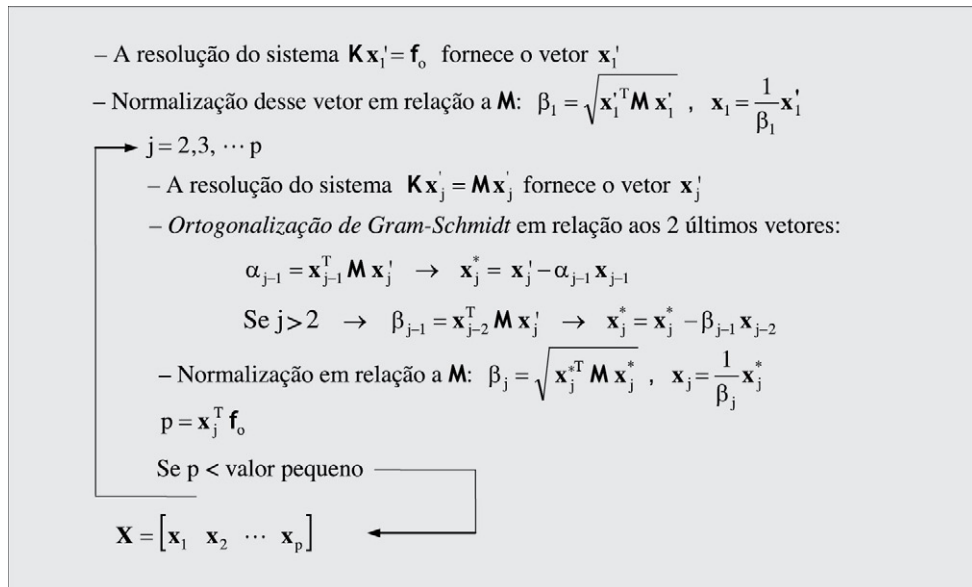
$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}_0 f(t) \quad (9-7.6)$$

Na geração dos *vetores de Lanczos*, procede-se de forma semelhante ao *método de iteração inversa*, com a diferença inicial de que o primeiro vetor é a solução estática às forças nodais \mathbf{f}_0 . O vetor genérico \mathbf{x}_j é obtido com o seguinte procedimento:

1. Resolução do sistema de equações algébricas ($\mathbf{K}\mathbf{x}'_j = \mathbf{M}\mathbf{x}_{j-1}$) que fornece \mathbf{x}'_j .
2. *Ortogonalização de Gram-Schmidt*, a partir de \mathbf{x}'_j , em obtenção do vetor \mathbf{x}^*_j que é M-ortogonal aos vetores anteriormente determinados \mathbf{x}_{j-1} e \mathbf{x}_{j-2} .
3. Normalização de \mathbf{x}^*_j em relação à matriz \mathbf{M} , em obtenção de \mathbf{x}_j .

A grande vantagem desse procedimento é que o uso do vetor \mathbf{x}_1 elimina a necessidade de correção estática, além do que, os demais vetores são obtidos com reduzido processamento e levam em conta as forças de inércia e as forças elásticas que podem ser desenvolvidas no modelo discreto.

Segue algoritmo básico dessa geração de matriz de transformação com *vetores de Lanczos*.



ALGORITMO 9-7.1 Geração de matriz de transformação com *vetores de Lanczos*.

³⁶ Nour-Omid, B. & Clough, R. W., 1984, *Dynamic Analysis of Structures Using Lanczos Coordinates*, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, vol. 12, pp. 565-577. Essa geração de vetores se baseia em algoritmo de resolução de problema de autovalor simétrico desenvolvido pelo matemático e físico húngaro Cornelius Lanczos (1893-1974).

Em princípio, com a *ortogonalização Gram-Schmidt* em relação aos dois últimos vetores, como adotado no algoritmo anterior, obtém-se um vetor \mathbf{x}_j^* que é M -ortogonal em relação a todos os vetores \mathbf{x}_i gerados anteriormente. Contudo, como a aritmética em ponto-flutuante pode afetar essa ortogonalização, é aconselhável efetuar o procedimento completo de ortogonalização em relação aos vetores anteriores, em algumas etapas intermediárias da formação da matriz \mathbf{X} .

Com essa matriz define-se a transformação de coordenadas:

$$\mathbf{d}(t) = \mathbf{X} \mathbf{d}(t) \quad (9-7.7)$$

Após a substituição dessa expressão no sistema global das equações de movimento ($\mathbf{M}\mathbf{d}(t) + \mathbf{C}\mathbf{d}(t) + \mathbf{K}\mathbf{d}(t) = \mathbf{f}_0 f(t)$) de amortecimento proporcional sob a forma ($\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K}$), e a pré-multiplicação por $\mathbf{X}^T \mathbf{M} \mathbf{K}^{-1}$, obtém-se o sistema de p equações

$$\mathbf{X}^T \mathbf{M} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{X} \ddot{\mathbf{d}}(t) + \alpha \mathbf{X}^T \mathbf{M} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{X} \dot{\mathbf{d}}(t) + \beta \mathbf{X}^T \mathbf{M} \mathbf{X} \dot{\mathbf{d}}(t) + \mathbf{X}^T \mathbf{M} \mathbf{X} \mathbf{d}(t) = \mathbf{X}^T \mathbf{M} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f}_0 f(t) \quad (9-7.8)$$

Esse sistema pode ser escrito sob a forma (vide referência da última nota de rodapé):

$$\mathbf{T} \ddot{\mathbf{d}}(t) + (\alpha \mathbf{T} + \beta \mathbf{I}) \dot{\mathbf{d}}(t) + \mathbf{d}(t) = \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} f(t) \quad (9-7.9)$$

onde se tem a matriz tridiagonal:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \alpha_2 & \beta_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \alpha_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ddots & \alpha_{p-1} & \beta_p \\ \text{sim.} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_p \end{bmatrix} \quad (9-7.10)$$

Assim, o sistema anterior tem equações fracamente acopladas, de mais fácil resolução do que o sistema das equações de movimento original. A solução daquele sistema pode ser obtida através do *método de superposição modal*, que requer a resolução do problema de autovalor no subespaço E_p :

$$\mathbf{I} \Phi' = \mathbf{T} \Phi' \Omega' \quad (9-7.11)$$

ou por um método de integração direta. Em ambos os casos, o processamento automático é muito menor do que diretamente com os n graus de liberdade iniciais, devido à facilidade de geração da matriz de transformação, que $p \ll n$ e que se recai em um sistema de matriz tridiagonal.

9-8 EFICIÊNCIA COMPUTACIONAL

Os avanços tecnológicos da engenharia têm permitido projetos de estruturas cada vez mais esbeltas e flexíveis, leves e eficientes, embora susceptíveis a vibrações. Essas vibrações, como apontado no início deste livro, requerem controle, com adequado dimensionamento dos componentes estruturais e de suas ligações.

Ficou evidente que os modelos de multigraus de liberdade não são passíveis de serem analisados em procedimento manual e que as muitas complexidades das estruturas e de suas ações externas conduzem usualmente a modelos com muitos graus de liberdade, às vezes da ordem de centenas de milhares. Contudo, com a atual disponibilidade de microcomputadores de alto desempenho e reduzido custo, além da comercialização de eficientes e amigáveis programas automáticos de análise de estruturas, tornou-se possível a larga utilização desses modelos nos escritórios de projeto. Assim, em termos técnicos, o projeto das arrojadas estruturas deve-se à conjunção do desenvolvimento dos métodos de análise, da eficiência da microcomputação, da tecnologia dos materiais e dos métodos construtivos.

Uma indicação dessa eficiência é o número de *instruções por segundo* (IPS) que está associado à velocidade de processamento automático. A [Figura 9-8.1](#) mostra a incrível evolução histórica desse número para o caso dos processadores de microcomputadores.³⁷ Faz-se referência apenas aos processadores INTEL®, pelo fato de a empresa *Intel Corporation* ocupar posição de destaque desde o início da década de 1970.

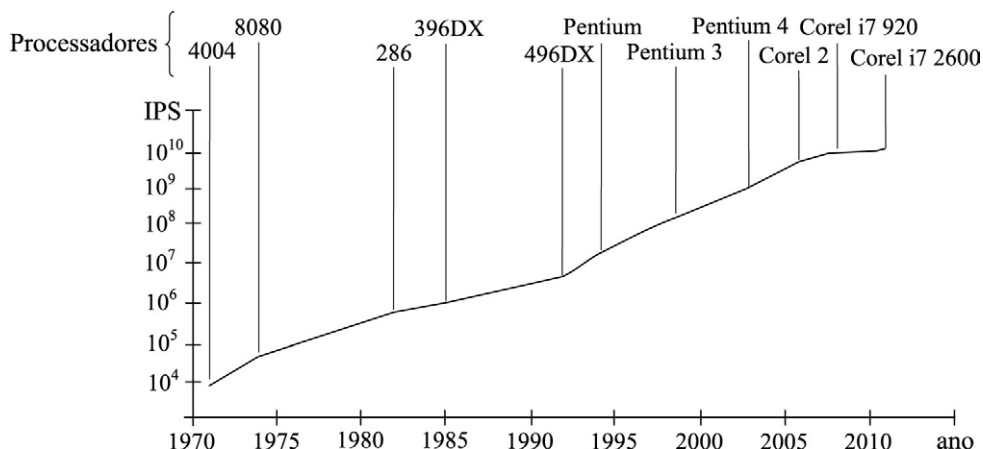


FIGURA 9-8.1 Evolução histórica da velocidade dos processadores INTEL®.

A figura anterior mostra uma evolução aproximadamente linear, em escala logarítmica, o que expressa progresso geométrico da velocidade de processamento.³⁸

Para comparação entre um computador de grande porte antigo e um microcomputador atual, cita-se que o computador de IBM 370, modelo 158-3, fabricado no ano de 1972, processava 10⁶ IPS, enquanto o processador INTEL Core i7 Extreme Edition 980X disponibilizado no ano de 2010 processa 1,47610¹¹ IPS. Ou seja, esse processador é 147.600 “vezes mais rápido” do que era o referido IBM.³⁹

³⁷ http://en.wikipedia.org/wiki/Instructions_per_second.

³⁸ É a chamada *lei de Moore*, em homenagem a Gordon Earle Moore, cofundador da *Intel Corporation*, que previu o descrito crescimento da velocidade de processamento, em 1965.

³⁹ O sistema operacional, o acesso à memória, a linguagem de programação e as técnicas utilizadas no desenvolvimento do programa automático têm também grande influência na velocidade de processamento de uma análise dinâmica de estrutura. Essas questões não estão sendo levadas em conta na presente comparação, por simplicidade.

Neste capítulo foram inicialmente apresentadas importantes propriedades do problema de autovalor de matriz simétrica, o *quociente de Rayleigh*, a *análise de Rayleigh-Ritz*, o *método de Jacobi generalizado* e o *método de iteração inversa*. Toda essa apresentação foi fundamental para o detalhamento do *método de iteração por subespaço*, que fornece, de forma muito eficaz, os primeiros autopares de modelos de elevado número de graus de liberdade. Esses autopares são úteis à compreensão do comportamento dinâmico desses modelos, como também essenciais ao importante *método de superposição modal*, desenvolvido no Capítulo 6, e necessários à análise sísmica baseado em espectro de resposta e apresentada no Capítulo 8.

No presente capítulo, também foi apresentada a geração de *vetores de Ritz* e de *vetores de Lanczos* usualmente disponíveis nos programas automáticos comerciais e que podem conduzir a análises dinâmicas com menor volume de cálculo.

Completa-se, assim, o desenvolvimento deste livro, que permitirá aos leitores se habilitarem ao uso dos métodos de análise dinâmica disponibilizados nos programas automáticos comerciais, essenciais ao projeto de estruturas.

9-9 EXERCÍCIOS PROPOSTOS

9-9.1 A partir da equação característica, pede-se determinar os autopares do problema

$$\text{de autovalor } \left(\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 6 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_j = \lambda_j \hat{\mathbf{x}} \right)$$

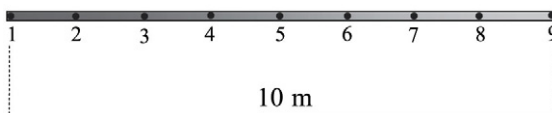
9-9.2 Para o problema de autovalor $\left(\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \Phi = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Phi \Omega \right)$, solicita-se

determinar a forma reduzida expressa na Equação 9-1.35.

9-9.3 Com o *método de Jacobi*, resolva o problema de autovalor do exercício anterior.

9-9.4 Para a barra representada na Figura 9-9.4, que é livre de condições geométricas de contorno e é discretizada em nove pontos nodais igualmente espaçados, pede-se determinar as quatro primeiras frequências naturais de vibração transversal no plano. Adote matriz de massa consistente e confirme os resultados obtidos com as seguintes fórmulas da *teoria clássica de viga*:

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = 4,731^2 \sqrt{\frac{EI}{m'\ell^4}}, \quad \omega_4 = 7,854^2 \sqrt{\frac{EI}{m'\ell^4}}$$



$$\begin{cases} m' = 100 \text{ kg/m} \\ EI = 10^7 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \end{cases}$$

Figura 9-9.4 Barra livre de condições geométricas de contorno.

9-9.5 A Figura 9-9.5 mostra um *shear building* de três graus de liberdade. Com o *método de Rayleigh* e a aproximação $[1/3 \ 2/3 \ 1]^T$ para o primeiro modo de vibração, obtenha a frequência fundamental. Determine a diferença do resultado obtido em relação à frequência que se obtém por resolução do problema de autovalor do referido modelo.

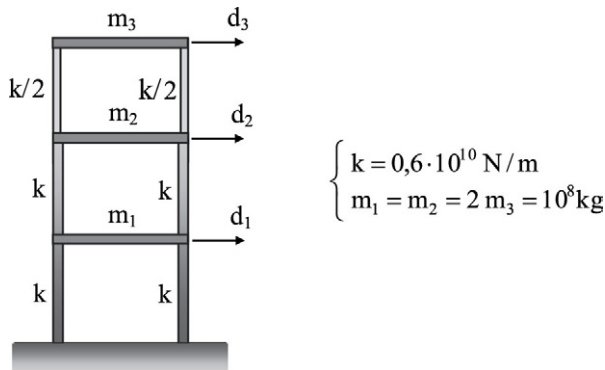


Figura 9-9.5 Shear building de três graus de liberdade.

9-9.6 A matriz $\begin{bmatrix} 15 & 12 & 5 \\ 12 & 13 & 4 \\ 5 & 4 & 12 \end{bmatrix}$ tem os autovalores $\lambda_1 = 1,935$, $\lambda_2 = 9,551$ e $\lambda_3 = 28,514$.

Verifique que a separação de autovalores expressa na Equação 9-4.3 se cumpre.

9-9.7 Verifique, por meio da fatoração expressa na Equação 9-4.7, quantos autovalores

menores do que 10 tem a matriz $\begin{bmatrix} 13 & 4 & 6 \\ 4 & 15 & 9 \\ 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}$.

9-9.8 Com o *método de iteração inversa* e o vetor de partida ($\mathbf{x}_1^T = [1 \ 1 \ 1]$), determine o primeiro autovalor do Exercício Proposto 9-8.2. Consecutivamente, obtenha o *quociente de Rayleigh* com o mesmo vetor.

9-9.9 Para o mesmo problema de autovalor e o mesmo vetor de partida do exercício anterior, adotando deslocamento da origem igual à unidade, determine o segundo autovalor através do *método de iteração inversa*.

9-9.10 Com os vetores de partida $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, pede-se determinar, através

do *método de iteração por subespaço*, os dois primeiros autopares do problema de autovalor do Exercício Proposto 9-9.2.

9-10 QUESTÕES PARA REFLEXÃO

- 9-10.1 Como descrever o problema de autovalor da *Dinâmica das Estruturas*? Que particularidades tem esse problema?
- 9-10.2 O que é *matriz positiva-definida*? Quais são as condições para que uma matriz de rigidez seja positiva-definida?
- 9-10.3 Por que o problema de autovalor ($\mathbf{K}\Phi = \mathbf{M}\Phi\Omega$) de matriz de rigidez adequadamente vinculada e sem mecanismos internos tem todos os autovalores positivos? E por que, em caso de matriz diagonal com alguns coeficientes diagonais nulos, esse problema tem autovalores infinitos em igual número a esses coeficientes nulos?
- 9-10.4 Por que multiplicar uma matriz por um escalar corresponde a multiplicar todos os seus autovalores por esse escalar, ficando inalterados os seus autovetores?
- 9-10.5 O que é uma *matriz ortogonal*? Toda matriz ortogonal é não singular? E por que matriz de rotação é ortogonal?
- 9-10.6 Toda matriz modal de matriz simétrica é ortogonal? E por que é usual normalizar essa matriz? Quais são as normalizações usuais?
- 9-10.7 Qual é a vantagem de se normalizar os modos naturais de vibração em relação à matriz de massa?
- 9-10.8 Quais são as vantagens e desvantagens do uso de deslocamento espectral em resolução do problema de autovalor da *Dinâmica das Estruturas*?
- 9-10.9 Como transformar o problema de autovalor da *Dinâmica das Estruturas* em outro de forma reduzida? Quais são as vantagens e desvantagens dessa transformação?
- 9-10.10 Por que os autovalores de matrizes triangulares são os elementos diagonais dessas matrizes?
- 9-10.11 O que é o *quociente de Rayleigh*? Qual é a principal propriedade desse quociente? Por que se diz que esse quociente é estacionário na vizinhança de um autovalor?
- 9-10.12 Em que consiste o *método de Rayleigh*? Qual é a condição básica para esse método?
- 9-10.13 Em que consiste a *análise de Rayleigh-Ritz*? Qual é a importância dessa análise no *método de iteração por subespaço*?
- 9-10.14 Quais são os requisitos para a aplicação do *método de Jacobi*? E quais são as peculiaridades desse *método de Jacobi*? Por que é usual utilizar esse método como parte do *método de iteração por subespaço*?
- 9-10.15 Em que consiste o *método de iteração inversa*? Como utilizar esse método com matriz de rigidez que contenha deslocamentos de corpo rígido? E em determinação de vários autopares?

- 9-10.16** Como explicar o *método de iteração por subespaço*? Quais são as vantagens desse método? Como proceder quando, em aplicação desse método em *Dinâmica das Estruturas*? Como proceder quando, em aplicação desse método, não forem obtidos todos os primeiros autopaíses desejados?
- 9-10.17** O que é a *sequência de Sturm*? Por que utilizar o teste da *sequência de Sturm* juntamente com o *método de iteração por subespaço*? Como aplicar esse teste?
- 9-10.18** Qual é a vantagem dos *vetores de Ritz* e de *vetores de Lanczos* (apresentados na [Seção 9-7](#)) em análise dinâmica de estrutura?
- 9-10.19** Por que o projeto das atuais arrojadas estruturas se deve em grande parte ao desenvolvimento dos métodos de análise de estrutura e da eficiência da microcomputação?



Notações

As notações estão definidas na primeira ocorrência no texto. A seguir, são descritas as notações mais gerais:

- No primeiro capítulo, grandezas vetoriais são representadas por letras em negrito, e suas intensidades, pelas correspondentes letras sem negrito.
- Matrizes quadradas e retangulares são denotadas por letras maiúsculas em negrito, e seus coeficientes representados preferencialmente pelas mesmas letras em minúsculo, sem negrito.
- Vetores colunas são designados por letras minúsculas em negrito, e seus coeficientes sem negrito.
- Vírgula como subscrito indica derivada em relação à(s) variável(eis) que lhe segue(m) também como subscrito(s).
- Ponto sobre uma notação indica derivada em relação à variável tempo.
- O sobrescrito^(e) indica grandeza de elemento de barra ou finito.
- Os subscritos L e G fazem referência aos referenciais local e global, respectivamente.
- Notações simultaneamente em negrito e em itálico expressam matrizes de operadores diferenciais.

$[\cdot], \mathbf{L}, \mathbf{\cdot}, \{\cdot\}$	Matriz retangular ou quadrada, matriz linha e vetor coluna, respectivamente.
$[\cdot]^T$	Matriz transposta
$\text{diag}[\cdot]$	Matriz diagonal.
$\det[\cdot]$	Determinante de matriz.
$\ \cdot\ $	Norma.
$ \cdot $	Módulo.
$\Delta\cdot$	Incremento de variável.
$\delta\cdot$	Indicativo de grandeza virtual.
\otimes	Símbolo de convolução.
$\text{Re}(\cdot), \text{Im}(\cdot)$	Indicativos de parte real e de parte imaginária, de variável complexa.
x, y, z	Referencial cartesiano local de elemento.
X, Y, Z	Referencial cartesiano global.
t, τ	Tempo.

\mathbf{t}	Torque.
g, a_g	Aceleração da gravidade e aceleração sísmica característica de projeto.
$\delta(t-\tau), \delta(t),$	Delta de Dirac, centrado no instante τ e centrado na origem.
δ_{ij}	Delta de Kronecker.
δ_ℓ	Decremento logarítmico.
γ, ρ	Peso específico e massa específica.
$\rho(\mathbf{x}')$	Coefficiente de Rayleigh.
α, β	Escalaes.
c, η	Coefficiente de amortecimento viscoso e coeficiente de amortecimento estrutural.
ξ, ξ_{eq}	Razão de amortecimento viscoso e razão de amortecimento viscoso equivalente.
λ, λ_j	Autovalor e j-ésimo autovalor.
T, T_n	Período e período natural.
$\omega, \omega_n, \omega_n$	Frequência circular, frequência natural circular e frequência natural cíclica.
$\omega_a, \omega_{N/2}$	Frequência amortecida e frequência de Nyquist.
r, r_q	Razões de frequências.
ϕ, ϕ_j	Ângulo de fase e j-ésimo ângulo de fase.
$\omega_j, \mathbf{\Omega}$	j-ésima frequência natural e matriz espectral (matriz diagonal com os quadrados das frequências naturais).
$\hat{\phi}_j, \phi_j, \Phi$	j-ésimo modo natural de vibração não normalizado, j-ésimo modo normalizado e matriz modal normalizada com respeito à matriz de massa.
$\mathbf{\Omega}_p, \Phi_p$	Matriz espectral e matriz modal, correspondentes aos p primeiros autopares.
E_m, E_c, E_{pg}, E_{pe}	Energias mecânica, cinética, potencial gravitacional e potencial de deformação elástica.
E_d	Energia dissipada.
W	Trabalho.
A, S, V	Área, superfície e volume.
A_d	Fator de amplificação dinâmica.
I, J	Momento de inércia e momento de inércia polar, de seção transversal de barra.
k, k_{ij}	Coefficientes de rigidez.
m, m', m_{ij}	Massa, massa por unidade de comprimento de barra e coeficiente de massa.
f	Força.
$f(t), F(i\omega)$	Função do tempo e correspondente transformada de Fourier.
$f, f(t)$	Fator de cisalhamento e função temporal.
f_c, f_a e f_{in}	Forças elástica, de amortecimento e de inércia.
ℓ	Comprimento.
E, G, ν	Módulo de elasticidade, módulo de elasticidade transversal e coeficiente de Poisson.

M, V, N, T	Momento fletor, esforço cortante, esforço normal e momento de torção.
M	Magnitude de sismo.
TR	Fator de transmissibilidade.
u, u_b, w	Deslocamento absoluto, deslocamento da base e deslocamento relativo.
u_o, v_o	Deslocamento e velocidade, iniciais.
$u_{est.}$	Deslocamento pseudoestático.
u	Vetor dos componentes de deslocamento de um ponto qualquer de elemento.
p, q	Vetores dos componentes de forças de volume e de superfície.
q	Vetor de correspondência de deslocamento.
I, I	Matriz identidade e matriz de incidência.
N, N_i	Matriz de funções de interpolação e função de interpolação.
σ, ϵ	Vetor dos componentes de tensão e vetor dos componentes de deformação.
B	Matriz que relaciona componentes de deformação com os deslocamentos nodais de elemento.
E	Matriz constitutiva (que relaciona ϵ com σ) e, também, matriz de transformada implícita.
$f^{(e)}$	Vetor das forças nodais equivalentes em elemento.
$u_L^{(e)}, u_G^{(e)}$	Vetores dos deslocamentos nodais de elemento, nos referenciais local e global.
$u^{(e)}, \dot{u}^{(e)}, \ddot{u}^{(e)}$	Vetores dos deslocamentos, velocidades e acelerações, nodais de elemento.
$K^{(e)}, M^{(e)}, C^{(e)}, f^{(e)}$	Matrizes de rigidez, massa e amortecimento e vetor de forças, nodais e de elemento.
R	Matriz de rotação.
d, \dot{d}, \ddot{d}	Vetores de deslocamentos, velocidades e acelerações, nodais e globais.
d	Vetor de coordenadas modais.
M, C, K, f	Matrizes de massa, amortecimento, rigidez e vetor das forças, nodais e globais restringidas.
M^*, C^*, K^*, f^*	Matrizes de massa, amortecimento, rigidez e vetor das forças, nodais e globais não restringidas.
C_q, C_q^*	Coefficiente de Fourier e correspondente complexo conjugado.
$H(i\omega), H(i\omega_q)$	Funções de transferência na frequência, contínua e discreta.
$H, H(i\omega)$	Matriz diagonal das funções de transferência na frequência e matriz de receptância.
$I(i\omega)$	Matriz de impedância.
L	Matriz triangular inferior de diagonal de coeficientes unitários.
$U(i\omega), U(i\omega_q)$	Soluções no domínio da frequência, contínua e discreta.
$U, U(i\omega)$	Fator de Cholesky e vetor solução no domínio da frequência.
$\mathcal{T}, \mathcal{T}^{-1}$	Indicativos de transformada de Fourier e de transformada de Fourier inversa.

$\mathcal{T}\mathcal{D}, \mathcal{T}\mathcal{D}^{-1}$	Indicativos de transformada de Fourier discreta e de transformada de Fourier inversa discreta.
S_d, S_v, S_a	Deslocamento relativo espectral, pseudovelocidade relativa espectral e pseudoaceleração absoluta espectral.
SRSS	Square R oot of the Sum of the S quares.
CQC	Complete Q uadratic C ombination.



Glossário

Acelerograma – Representação gráfica ou digitalizada da variação temporal da aceleração de um sismo.

Ações externas – Forças ou deslocamentos impostos a uma estrutura.

Ações aleatórias – Ações de variações temporais indefinidas e tratadas de forma probabilística. Correspondentemente, têm-se as *vibrações aleatórias* e a *análise dinâmica aleatória*.

Ações determinísticas – Ações definidas analítica ou numericamente em função do tempo. Correspondentemente, têm-se as *vibrações determinísticas* e a *análise dinâmica determinística*.

Aliasing – Distorção de representação de uma função aperiódica através de transformada de Fourier discreta quando são consideradas insuficientes frequências discretas.

Amortecedor de massa sintonizada – Oscilador simples ligado em série a um sistema vibratório principal, com o objetivo de reduzir a oscilação deste em caso de proximidade de condição de ressonância.

Amortecimento – Idealização do fenômeno de dissipação de energia mecânica.

Amortecimento proporcional – Idealização em que a matriz de amortecimento global é diagonalizável através de uma transformação modal de coordenadas, também denominada *amortecimento clássico*. Em caso contrário, diz-se amortecimento não proporcional.

Amortecimento crítico – Valor limite do amortecimento viscoso entre um estado oscilatório e um estado não oscilatório de sistema mecânico. Diz-se *amortecimento subcrítico* o de um estado oscilatório, e chama-se *amortecimento supercrítico* o de um estado não oscilatório, em que o sistema retorna à configuração neutra em mais tempo do que com amortecimento crítico.

Amortecimento de Rayleigh – Amortecimento proporcional em que a matriz de amortecimento é uma combinação linear das matrizes de rigidez e de massa, globais.

Amortecimento de Coulomb – Idealização da dissipação de energia devido ao atrito entre duas superfícies secas ou com lubrificação insuficiente, que se deslocam entre si.

Amortecimento equivalente – Valor de caracterização de amortecimento equivalente à caracterização em outro modelo de dissipação de energia.

Amortecimento estrutural – Idealização da dissipação de energia devido à histerese em materiais elásticos que experimentam tensões cíclicas. Também denominado *amortecimento histerético* ou *sólido*.

Amortecimento viscoso – Idealização da dissipação de energia à semelhança do fenômeno de oposição ao movimento lento de corpos imersos em um meio fluido.

Análise de Rayleigh-Ritz – Procedimento, para problema de autovalor generalizado em um espaço n -dimensional, em que, com base em $p < n$ vetores linearmente independentes entre si e denominados *vetores de Ritz*, fornece aproximações aos p primeiros autopares, cujos vetores que satisfazem às condições de ortogonalidade em relação às matrizes de massa e de rigidez.

Análise dinâmica – Construção, determinação e interpretação do comportamento no tempo de um modelo de estrutura em que são consideradas forças de inércia. Diz-se *análise estática* quando não são consideradas essas forças.

Análise linear – Análise com base em relações lineares entre os componentes de tensão e de deformação (linearidade física) e em equações de equilíbrio escritas na configuração não deformada (linearidade geométrica). Em caso contrário, diz-se *análise não linear*.

Análise modal – Determinação das características dinâmicas (frequências e modos naturais de vibração) de um modelo de estrutura (não amortecido).

Análise por espectro de resposta – Análise em que, além do desacoplamento das equações de movimento, se utiliza um espectro de resposta em estimativa de valores extremos de resposta.

Ângulo de fase – Valor angular em uma função harmônica que relaciona a representação da função com outra representação de função ou com a origem da variável independente, considerada como referência.

Batimento – Variação periódica da amplitude de oscilação resultante da superposição de duas funções harmônicas simples, de frequências ligeiramente diferentes. Correspondentemente, tem-se a *frequência de batimento*, que é o valor absoluto da diferença entre as frequências de duas funções harmônicas.

Características dinâmicas – Frequências e modos naturais de vibração de um modelo de estrutura não amortecido.

Coefficiente de rigidez – Grandeza numericamente igual à força segundo determinado grau de liberdade de um modelo discreto de estrutura quando se impõe deslocamento unitário segundo esse grau de liberdade ou qualquer outro, com a manutenção de deslocamentos nulos segundo os demais graus de liberdade.

Condições geométricas de contorno – Deslocamentos prescritos em um modelo de estrutura, também denominadas *condições cinemáticas* ou *essenciais de contorno*.

Condições mecânicas de contorno – Forças prescritas (nulas ou não) no contorno de um modelo de estrutura, também denominadas *condições naturais, mecânicas* ou *não essenciais*.

Configuração de um modelo – Definição simultânea de todos os graus de liberdade do modelo.

Configuração neutra – Configuração deformada de equilíbrio estático de um modelo de estrutura.

Conteúdo de frequência de uma função aperiódica – Parte preponderante da composição de frequência identificada no espectro de amplitudes da transformada de Fourier.

Correção estática dos modos superiores – Consideração, na resposta de um modelo discreto de estrutura, do efeito estático dos modos naturais de vibração não incluídos na transformação de coordenadas do método de superposição modal.

Decremento logarítmico – Logaritmo neperiano da razão entre os deslocamentos em dois instantes correspondentes a um ciclo de oscilação completa, em resposta de deslocamento em vibração livre subamortecida de um sistema mecânico.

Delta de Dirac – Impulso unitário adimensional, em um espaço de tempo que tende a zero.

Deslocamento pseudoestático – Deslocamento do ponto de aplicação lenta de uma força, na direção dessa força.

Deslocamentos virtuais – Deslocamentos fictícios independentes da variável tempo. Em Mecânica Analítica são considerados infinitesimais, e em análise de estruturas, dependendo da aplicação, podem ser infinitesimais ou apenas pequenos para validade do princípio da superposição, com o atendimento ou não dos vínculos externos.

Edificação sismorresistente – Construção projetada para resistir às ações sísmicas estabelecidas por códigos normativos de projeto.

Elemento finito – Elemento de dimensão finita utilizado em discretização de um meio contínuo, com incógnitas em pontos nodais responsáveis pela interação com outros elementos da discretização e com o meio exterior, de maneira a simular o contínuo original.

Energia cinética – Trabalho realizado para levar uma massa do estado de repouso até um estado com determinada velocidade. Essa energia é armazenada na massa e proporcional ao quadrado da velocidade.

Energia mecânica – Soma da energia potencial (gravitacional e de deformação) com a energia cinética de um sistema mecânico.

Energia potencial de deformação – Trabalho realizado ao se deformar um corpo elástico, também denominado *energia potencial elástica*.

Energia potencial gravitacional – Trabalho realizado ao se elevar uma massa a uma determinada altura acima de um nível de referência.

Equilíbrio dinâmico – Equilíbrio com a suposição de força de inércia.

Escala Mercalli modificada – Escala de avaliação subjetiva da intensidade de sismo, em determinado local.

Escala Richter – Escala logarítmica de base decimal de avaliação da magnitude de sismo.

Espectro – Descrição de uma grandeza física em termos de frequência.

Espectro de Fourier – Representação da distribuição das amplitudes de Fourier como função da frequência.

Espectro de projeto – Espectro estabelecido em códigos normativos constituído por trechos lineares e curvos suavizados, e que expressa uma “média” de vários sismos, com a consideração probabilística da sísmica local e das características do solo, do tipo de estrutura e da importância da mesma para a sociedade.

Espectro de resposta – Representação (gráfica ou analítica) que expressa valores extremos de resposta de osciladores simples com diferentes períodos e amortecimentos. Em análise sísmica, são definidos os espectros do *deslocamento relativo*, da *pseudovelocidade relativa* e da *pseudoaceleração absoluta*.

Espectro de resposta tripartido – Representação dos espectros do deslocamento, da pseudovelocidade e da pseudoaceleração, em um único gráfico de escalas logarítmicas.

Estrutura contínua – Estrutura constituída de componentes estruturais em que há pelo menos duas dimensões preponderantes. É o caso dos estados planos de tensão e de deformação, placas, cascas e sólidos.

Estrutura reticulada – Estrutura constituída de barras idealizadas como elementos unidimensionais. É o caso das treliças (planas e espaciais), pórticos (planos e espaciais) e grelha.

Excitação – Ação externa, função do tempo, aplicada a um sistema mecânico.

Fator de amplificação (de deslocamento) – Razão entre a amplitude da resposta de deslocamento em regime permanente de um oscilador simples sob força harmônica e o pseudodeslocamento estático. Em vibração por movimento do suporte, tem-se o *fator de amplificação do deslocamento relativo* e o *fator de amplificação do deslocamento absoluto*.

Fator de Cholesky – Matriz triangular obtida em fatoração de uma matriz simétrica positiva-definida, que pré-multiplicada pela sua transposta fornece a matriz simétrica original.

Fator de transmissibilidade – Razão entre a amplitude da força transmitida à base e a amplitude da força harmônica aplicada a um sistema mecânico.

Força basal – Força horizontal total na base de uma edificação, devida a um sismo.

Força de inércia – Força igual à massa vezes a aceleração, suposta em sentido contrário à aceleração, que propicia escrever a equação de movimento de um sistema mecânico dinâmico como se tratasse de um problema estático.

Força estática equivalente – Força estática que permite a determinação de estimativa da resposta dinâmica extrema de um sistema mecânico.

Força harmônica – Força expressa por cosseno ou por seno. Correspondentemente, tem-se a *vibração* ou *oscilação harmônica*.

Força impulsiva – Força de grande intensidade e curta duração.

Força periódica – Força de configuração que se repete em iguais espaçamentos de tempo. Correspondentemente, tem-se a *vibração periódica*.

Forças nodais equivalentes – Forças nodais em elemento que equivalem às forças de superfície e de volume, assim como a efeitos de tensão inicial e/ou deformação inicial, obtidas na formulação de deslocamentos do método dos elementos finitos. Em barra, essas forças são iguais e de sinais contrários aos esforços de engastamento perfeito com sinais contrários.

Frequência – Número de oscilações na unidade de tempo (*frequência cíclica*) ou o correspondente número de radianos na unidade de tempo (*frequência angular* ou *circular*).

Frequência amortecida – Frequência conceitual de um oscilador simples amortecido em vibração livre.

Frequência de Nyquist – Máxima frequência representada em transformada de Fourier discreta, também denominada *frequência de dobramento*.

Frequência natural – Frequência de um dos modos de vibração em movimento harmônico característico de um modelo de estrutura não amortecido. Diz-se *frequência e modo fundamental* à primeira (menor) frequência e ao correspondente modo natural de vibração.

Frequência ressonante – Frequência de uma excitação harmônica que provoca a máxima amplitude de vibração em um modelo de estrutura.

Função de transferência – Função que relaciona a entrada de dados de um sistema com a saída de dados de um sistema. A função de *transferência na frequência* relaciona a excitação no domínio da frequência com a resposta nesse domínio, também denominada *função complexa de resposta em frequência*.

Graus de liberdade – Parâmetros cinematicamente independentes entre si e necessários à completa descrição da configuração geométrica de um sistema mecânico, em um instante qualquer.

Hipótese do diafragma – Idealização de laje de edifício como tendo rigidez infinita em seu plano e rigidez transversal a esse plano nula.

Impulso de uma força – Integral, com respeito ao tempo, de uma força durante um espaçamento de tempo pequeno.

Inércia – Propriedade de a matéria em si opor à modificação de seu estado de repouso ou de movimento uniforme.

Integração numérica implícita – Integração numérica em que a solução no instante t_i é obtida com a condição de equilíbrio nesse mesmo instante. Difere da *integração numérica explícita* em que a solução no instante t_i é obtida com a condição de equilíbrio do instante anterior.

Integral de Duhamel – Integral de convolução que, com base no princípio da superposição dos efeitos, expressa a resposta dinâmica de um oscilador simples através da superposição de uma sucessão de infinitas respostas a forças impulsivas.

Intensidade sísmica – Indicação subjetiva, usualmente na *Escala Mercalli Modificada*, do efeito produzido por um sismo nos edifícios, objetos e pessoas, em determinado local.

Isolador de vibrações – Suporte a uma estrutura com a função de atenuar a transmissão de vibrações.

Magnitude sísmica – Valor, usualmente na *Escala Richter*, relacionado com a energia liberada por um sismo.

Matriz de incidência – Matriz que relaciona a numeração local dos pontos nodais dos elementos de um modelo de estrutura com a numeração global dos pontos nodais desse modelo. Também denominada *matriz topológica*.

Matriz de rigidez global – Matriz que relaciona as forças nodais estáticas globais com os correspondentes deslocamentos nodais, em um modelo discreto. Diz-se, *matriz de rigidez restringida* quando são consideradas as condições geométricas de contorno.

Matriz de massa consistente – Matriz de massa obtida com a formulação do método dos elementos finitos. Em caso contrário, diz-se matriz de *massa discreta*, quando então a matriz é diagonal.

Matriz de transformada de Fourier implícita – Matriz que engloba a transformada discreta de Fourier e o produto dessa transformada pela função de transferência, juntamente com a transformada inversa desse produto, em análise de oscilador simples no domínio da frequência.

Método de integração por diferença finita central – Integração numérica de equações de movimento com fórmulas de aproximação por diferença central.

Método de integração direta – Integração numérica do sistema global das equações de movimento, sem utilização prévia de transformação de coordenadas.

Método de iteração inversa – Procedimento de obtenção do primeiro autovetor de um problema de autovalor de matriz simétrica, baseado em sequência de resoluções de sistemas de equações algébricas a partir da escolha de um vetor.

Método de iteração por subespaço – Combinação do método de iteração inversa simultânea de vários vetores com a análise de Rayleigh-Ritz, em determinação dos primeiros autovetores de um problema de autovalor em forma generalizada.

Método de Jacobi – Procedimento de resolução de problema de autovalor de matriz real e simétrica através de sequência de transformações similares ortogonais, em que as matrizes ortogonais são matrizes de rotação.

Método de Newmark – Integração numérica de equações de movimento, com base em aceleração média constante em cada espaçamento de tempo.

Método de Rayleigh – Procedimento de estimativa da frequência fundamental de um sistema mecânico, por valor superior, baseado no princípio da conservação da energia e no arbítrio de uma aproximação à configuração do sistema em vibração.

Método de superposição modal – Procedimento de análise dinâmica em que as equações de movimento são desacopladas através de transformação de coordenadas.

Método de Wilson θ – Integração numérica de equações de movimento, com base em aceleração linear em extensão do espaçamento de tempo.

Método dos elementos finitos – Método de discretização do domínio geométrico de um modelo contínuo em subdomínios de dimensões finitas chamados de *elementos finitos* e que, com o arbítrio de campos para as variáveis primárias, interagem entre si através de pontos nodais em seus contornos.

Modelo de idealização analítica do comportamento – Modelo de um sistema físico sob ações externas diversas. Pode ser contínuo ou discreto.

Modelo de multigraus de liberdade – Modelo discreto de vários graus de liberdade.

Modelo matemático – Idealização analítica do comportamento de um sistema físico sob ações externas diversas. Pode ser contínuo ou discreto.

Modo natural de vibração – Configuração dos graus de liberdade de um modelo de estrutura não amortecido, em que a oscilação é harmônica simples em uma determinada frequência característica do modelo. A oscilação é livre, com atuação apenas de forças elásticas e de inércia. O modo natural associado à menor frequência é denominado *modo fundamental de vibração*.

Oscilador simples – Sistema mecânico oscilatório de um grau de liberdade.

Oscilador simples equivalente – Oscilador simples que substitui outro mais sofisticado, para fins de análise.

Oscilação – Variação no tempo do movimento de um sistema mecânico em torno de uma configuração de referência. Recebe também a denominação de *vibração*.

Pêndulo de torção – Pêndulo constituído por um sólido preso em seu centro de massa a um eixo vertical e que oscila horizontalmente sob a atuação de força elástica de torção desse eixo.

Pêndulo simples – Sistema constituído por uma massa suspensa por um fio inextensível e sem massa, que idealmente oscila, em um plano vertical, sob a ação da gravidade.

Pêndulo sólido – Pêndulo constituído por um corpo que oscila, sem atrito, em torno de um eixo horizontal.

Período – Menor espaçamento de tempo em que uma função periódica se repete. O inverso do período é a *frequência cíclica*.

Período fundamental – Período da oscilação livre do primeiro modo natural de vibração de um modelo de estrutura não amortecido. É o maior período natural do modelo.

Princípio da superposição – Estabelece que a resposta de um sistema estrutural a diferentes excitações seja aditiva. Requer linearidade física e linearidade geométrica.

Princípio de d'Alembert – Artificio matemático de considerar forças (fictícias) de inércia para obter equações de movimento de sistemas mecânicos como se tratasse de um problema de equilíbrio estático.

Princípio dos deslocamentos virtuais – Estabelece que, arbitrado um campo de deslocamentos fictícios denominados virtuais, a igualdade entre o trabalho (virtual) externo e o trabalho (virtual) interno é condição necessária e suficiente de equilíbrio.

Procedimento de Newton-Raphson – Procedimento de obtenção de solução de equações não lineares através iterações em que se consideram as equações como lineares e correções nas correspondentes soluções.

Quociente de Rayleigh – Quociente que, com base em uma aproximação ao modo fundamental de vibração, fornece uma estimativa da frequência fundamental, por valor superior e com maior acurácia do que aquela aproximação.

Razão de amortecimento – Razão entre o coeficiente de amortecimento viscoso atuante e o coeficiente de amortecimento crítico de um oscilador simples ou de um modo natural de vibração de uma estrutura. Recebe também a denominação *fator* ou *fração de amortecimento* e costuma ser expresso em porcentagem do amortecimento crítico.

Referencial inercial – Sistema de coordenadas ideal que não participa de nenhum movimento, no qual é válido o princípio da inércia.

Referencial local – Sistema de coordenadas adotado em barra ou elemento finito de um modelo de estrutura. Chama-se *referencial global* o sistema adotado para todo o modelo.

Resolução direta por segmentos lineares – Procedimento numérico de obtenção da solução da equação de movimento de oscilador simples subamortecido, com base na definição da ação externa por uma sucessão de segmentos lineares, sem aproximações adicionais.

Resposta – Variação no tempo de um parâmetro do comportamento de um sistema mecânico, como deslocamento, velocidade, aceleração ou esforço interno, por exemplo. Diz-se *histórico de resposta* a representação dessa resposta. Em caso de excitação harmônica, tem-se a resposta transiente que decai por efeito de dissipação de energia, assim como há a resposta em regime permanente em que a energia fornecida ao sistema é igual à energia dissipada.

Ressonância – Condição de um sistema em vibração forçada em que qualquer pequena alteração na frequência da excitação provoca diminuição significativa nas amplitudes de deslocamento.

Sequência de Sturm – Em polinômios, sequência que determina o número de distintas raízes reais localizadas em determinado intervalo.

Série de Fourier – Desenvolvimento de função periódica em seus componentes harmônicos de diferentes frequências e amplitudes.

Sistema linear – Sistema em que a resposta é proporcional à excitação.

Sistema mecânico – Sistema de um ou mais componentes com massa, rigidez e amortecimento.

Sistema mecânico conservativo – Idealização de sistema com a hipótese de conservação da energia mecânica.

Transformada de Fourier – Transformação que expressa uma função aperiódica como função contínua da frequência. A transformação inversa é denominada *transformada de Fourier inversa*.

Transformadas de Fourier discretas – Transformadas de Fourier expressas em termos de sequências de valores discretos de uma função, em um intervalo finito.

Transformadas de Fourier rápidas – Eficientes algoritmos de cálculo das transformadas discretas de Fourier.

Transmissibilidade – Relação adimensional entre a amplitude da resposta em regime permanente de um sistema mecânico e a amplitude da excitação harmônica.

Vibração forçada – Vibração devida à atuação de uma ação externa função do tempo.

Vibração livre – Vibração decorrente de condições iniciais não nulas ou que ocorre depois de cessada a excitação.

Zona sísmica – Região geográfica com sismicidade semelhante.



Bibliografia

- BACKMANN, H. ET AL., 1995, *Vibrations Problems in Structures*, Birkhäuser Verlag Basel.
- BACKMANN, H. & AMMANN, W., 1987, *Vibrations in Structures Induced by Man and Machines*, IABSE-AIPC-IVBH.
- BALACHANDRAN, B. & MAGRAB, E. B., 2011, *Vibrações Mecânicas*, tradução da segunda edição norte-americana, Cengage Learning.
- BATHE, K. J., 1996, *Finite Element Procedures*, Prentice-Hall.
- BATHE, K. J., & WILSON, E. L., 1976, *Numerical Methods in Finite Element Analysis*, Prentice-Hall.
- BIGGS, J. M., 1964, *Introduction to Structural Dynamics*, McGraw-Hill.
- BYKHIVSKY, I. I., 1972, *Fundamentals of Vibration Engineering*, Mir Publishers.
- CHOPRA, A. K., 2007, *Dynamics of Structures – Theory and Applications to Earthquake Engineering*, terceira edição, Prentice-Hall.
- CLOUGH, R. W. & PENZIEN, J., 1993, *Dynamics of Structures*, segunda edição, McGraw-Hill.
- CRAIG, R. R., Jr. & KURDILA, A. J., 2006, *Fundamentals of Structural Dynamics*, segunda edição, John Wiley & Sons.
- DIMARAGONAS, A. D. & HADDAD, S., 1992, *Vibrations for Engineers*, Prentice-Hall.
- FONSECA, A., 1964, *Vibrações*, Ao Livro Técnico.
- GROEHS, A. G., 2005, *Mecânica Vibratória*, segunda Edição, Editora Unisinos.
- HAUG, E. J., 1992, *Intermediate Dynamics*, Prentice-Hall.
- HARTOG, J. P., 1956, *Mechanical Vibrations*, quarta edição, McGraw-Hill.
- HUMAR, J. L., 2012, *Dynamics of Structures*, terceira edição, CRC Press.
- HURTY, W. C. & RUBINSTEIN, M. F., 1964, *Dynamics of Structures*, Prentice-Hall.
- LEMOES, A. N., 2007, *Mecânica Analítica*, Segunda Edição, Livraria da Física.
- MADUGULA, M. K. S. (EDITOR), 2002, *Dynamic Response of Lattice Towers and Guyed Masts*. American Society of Civil Engineers.
- MEIROVITCH, L., 1986, *Elements of Vibration Analysis*, segunda edição, McGraw-Hill.
- MELOSH, R. J., 1990, *Structural Engineering Analysis by Finite Elements*, Prentice-Hall.

- OGATA, K., 1992, *System Dynamics*, segunda edição, Prentice-Hall.
- PAZ, M. & Leigh, W. 2004, *Structural Dynamics – Theory and Computation*, quinta edição, Springer Science.
- PAULTRE, P., 2010, *Dynamics of Structures*, John Wiley & Sons.
- RAO, S., 2009, *Vibrações Mecânicas*, quarta edição, Pearson Education do Brasil.
- RUBINSTEIN, M. F., 1970, *Structural Systems – Statics, Dynamics and Stability*, Prentice-Hall.
- SCHERER, C., 2010, *Métodos Computacionais da Física*, segunda edição, Livraria da Física.
- SIMIU, E. & SCANLAN, R. H., 1978, *Wind Effects on Structures*, John Wiley & Sons.
- SORIANO, H. L., 2003, *Método dos Elementos Finitos em Análise de Estruturas*, Editora da Universidade de São Paulo.
- SORIANO, H. L., 2005, *Análise de Estruturas – Formulação Matricial e Implementação Computacional*, Editora Ciência Moderna.
- SORIANO, H. L., 2009, *Elementos Finitos – Formulação e Aplicação na Estática e Dinâmica das Estruturas*, Editora Ciência Moderna.
- SPYRAKOS, C. C., 1996, *Finite Element Modeling in Engineering Practice*, Algor Publishing Division.
- TEDESCO, J. W. McDUGAL & ROSS, C., 1999, *Structural Dynamics – Theory and Applications*, Addison-Wesley Longman.
- TENENBAUM, R. A., 2006, *Dinâmica Aplicada*, terceira edição, Manole.
- THOMSON, W. T., 1965, *Vibration Theory and Applications*, Prentice-Hall.
- THORBY, D., 1973, *Structural Dynamics and Vibration in Practice – An Engineering Handbook*, Elsevier.
- TIMOSHENKO, S. P. YOUNG, D. H. & WEAVER, W., 1974, *Vibration Problems in Engineering*, quarta edição, John Wiley.
- VOLTERRA, E. & ZACHMANOGLU, C. E., 1965, *Dynamics of Vibrations*, Charles E. Merrill Books.
- WEAVER, W., JR. & JOHNSTON, P. R., 1987, *Structural Dynamics by Finite Elements*, Prentice-Hall.
- WAI-FAH, C. (editor), 1999, *Structural Engineering Handbook*. CRC Press LLC.
- WILKINSON, J. H., 1965, *The Algebraic Eigenvalue Problem*, Clarendon Press.
- WILSON, E. L., 2002, *Three-Dimensional Static and Dynamic Analysis of Structures – A Physical Approach with Emphasis on Earthquake Engineering*, Computers & Structures.



Respostas dos Exercícios Propostos

CAPÍTULO 1 – FUNDAMENTOS

1-6.1 – $I_G = \rho eab(a^2 + b^2)/12$, $I_o = \rho eab(a^2 + b^2)/3$

1-6.2 – $I_G = 2mr^2/5$

1-6.3 – $k = \frac{\pi E r_1 r_2}{\ell}$, $k_t = \frac{3\pi G r_1^3 r_2^3 (r_1 - r_2)}{2\ell(r_1^3 - r_2^3)}$

1-6.4 – $R_B = \frac{p\ell}{8}$

1-6.5 – $\omega_{n/xy} = \sqrt{\frac{48\ell g}{48\ell^2 + r^2}}$, $\omega_{n/yz} = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$, com $\ell = \frac{\sqrt{15}}{4}r$.

1-6.6 – $\frac{m'\ell^3}{3}\ddot{u} + (k\ell^2 + k_t)u = 0$, $\omega_n = \sqrt{\frac{3(k\ell^2 + k_t)}{m'\ell^3}}$

1-6.7 – a: $\ddot{\theta} + \frac{ka^2 - Mg\ell - mg\ell/2}{M\ell^2 + m\ell^2/3}\theta = 0$

Condição de estabilidade: $k > (Mg\ell + mg\ell/2)/a^2$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{ka^2 - Mg\ell - mg\ell/2}{M\ell^2 + m\ell^2/3}}$$

b: $\ddot{\theta} + \frac{k_t - Mg\ell - mg\ell/2}{M\ell^2 + m\ell^2/3}\theta = 0$ Condição de estabilidade: $k_t > Mg\ell + mg\ell/2$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_t - Mg\ell - mg\ell/2}{M\ell^2 + m\ell^2/3}}$$

1-6.8 – O primeiro tem um grau de liberdade e os outros três sistemas têm dois graus.

1-6.9 – $\ell_2 = 0,331\,06\text{ m}$, $\ell_3 = 0,317\,95\text{ m}$, $\ell_4 = 0,305\,61\text{ m}$, $\ell_5 = 0,293\,96\text{ m}$,
 $\ell_6 = 0,282\,98\text{ m}$, $\ell_7 = 0,272\,77\text{ m}$, $\ell_8 = 0,263\,47\text{ m}$, $\ell_9 = 0,253\,47\text{ m}$, $\ell_{10} = 0,244\,65\text{ m}$,
 $\ell_{11} = 0,236\,29\text{ m}$ e $\ell_{12} = 0,228\,35\text{ m}$

CAPÍTULO 2 – OSCILADOR SIMPLES NÃO AMORTECIDO

2-6 – Exercícios propostos

2-6.1 – A massa deve ser aumentada de 125%

2-6.2 – $T_n \cong 1,27 \text{ s}$, $\omega_n = 4,9474 \text{ rad/s}$, $m = 2834,0 \text{ kg}$

2-6.3 – $f_n = 2,229 \text{ Hz}$

2-6.4 – $\begin{cases} k_{eq} = 128,6 \text{ kN/m} \\ m_{eq} = 114,75 \text{ kg} \end{cases}$, $\omega_n = 33,477 \text{ rad/s}$, $T_n = 0,188 \text{ s}$

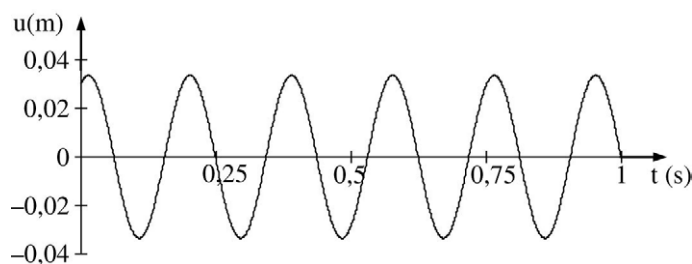


FIGURA E2-6.4 Histórico da vibração livre.

2-6.5 – a: $\omega_n = 32,848 \text{ rad/s}$, $f_n = 5,228 \text{ Hz}$, $T_n = 0,191 \text{ s}$, $1,46\%$

b: $\omega_n = 32,951 \text{ rad/s}$, $f_n = 5,243 \text{ Hz}$, $T_n = 0,191 \text{ s}$, $0,72\%$

2-6.6 – $\omega_n = \sqrt{\frac{3EI}{m(\ell_2^3 + \ell_1 \ell_2^2)}}$

2-6.7 – a: $\omega_n = \sqrt{\frac{2k}{3m}}$

b: $\omega_n = \sqrt{\frac{k(k\ell^3 + 3EI)}{m(2k\ell^3 + 3EI)}}$

2-6.8 – a: $T_n = 2\pi \sqrt{\frac{33(m'\ell^3 + 140)\ell^3}{140(3EI + 2k\ell^3)}}$

b: $T_n = 2\pi \sqrt{\frac{(33m'\ell + 140m)\ell^3}{70(6EI + k\ell^3)}}$

c: $T_n = 2\pi \sqrt{\frac{(17m'\ell + 35m)\ell^3}{35(48EI + k\ell^3)}}$

2-6.9 – $\frac{3m}{2}\ddot{u} + ku = 0$, $\omega_n = \sqrt{\frac{2k}{3m}}$

$$2-6.10 - \frac{m'\ell^2}{3} \ddot{u}(t) + k\ell u(t) = a f_0 \cos(\omega t), \quad \omega_n = \sqrt{\frac{3k}{m'\ell}}$$

$$2-6.11 - \omega_n = \sqrt{\frac{Gr^4}{\rho(e\ell R^4 + r^4\ell^2/3)}}$$

$$2-6.12 - \omega_n = \sqrt{\frac{3Gr^4(\ell_1 + \ell_2)}{\rho\ell_1\ell_2(3eR^4 + (\ell_1 + \ell_2)r^4)}}$$

$$2-6.13 - 515,76 \text{ N}$$

$$2-6.14 - a: k_{eq} = 2k_3 + \frac{3k_1k_2}{3k_1 + k_2}$$

$$b: k_{eq} = \frac{2k_1k_3 + k_2k_3 \cos^2\alpha}{2k_1 + (k_2 + k_3) \cos^2\alpha}$$

$$c: k_{eq} = \frac{k_1k_2(a+b)^2}{k_1a^2 + k_2b^2}$$

$$2-6.15 - \omega_n = \sqrt{\frac{8k}{3m}}$$

$$2-6.16 - d_i = 1,9824 \text{ m}$$

CAPÍTULO 3 – OSCILADOR SIMPLES AMORTECIDO

$$3-9.1 - \omega_n = 22,361 \text{ rad/s}, \quad \xi = 0,014583, \quad \omega_a = 22,359 \text{ rad/s}, \quad c = 6,5218 \text{ N}\cdot\text{s/m}$$

$$3-9.2 - u_{\max.} = 0,30809 \text{ m}$$

$$3-9.3 - T_a \cong 0,447 \text{ s}, \quad \xi \cong 0,028, \quad k \cong 39,5 \text{ kN/m}, \quad \eta_{eq} \cong 0,08$$

$$3-9.4 - \xi \cong 0,055, \quad m \cong 1,07 \cdot 10^3 \text{ kg}$$

$$3-9.5 - c_{crit.} = 8\sqrt{k(M + m/3)}$$

$$3-9.6 - a: \omega_a = 32,841 \text{ rad/s}, \text{ com } \omega = 10 \text{ rad/s} \quad \begin{cases} A_d = 1,1020 \\ a_p = 0,028337 \text{ m} \end{cases}$$

$$\text{com } \omega = 18,5 \text{ rad/s} \quad \begin{cases} A_d = 1,4637 \\ a_p = 0,037638 \text{ m} \end{cases}$$

$$b: \omega_a = 32,944 \text{ rad/s}, \text{ com } \omega = 10 \text{ rad/s} \quad \begin{cases} A_d = 1,1013 \\ a_p = 0,0081942 \text{ m} \end{cases}$$

$$\text{com } \omega = 18,5 \text{ rad/s} \quad \begin{cases} A_d = 1,4595 \\ a_p = 0,010859 \text{ m} \end{cases}$$

$$3-9.7 - \xi \cong 0,031$$

$$3-9.8 - \text{Número inteiro mais próximo de } (0,11032\sqrt{1-\xi^2}/\xi)$$

$$3-9.9 - f(t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\cos^2(\pi q)}{4q^2 - 1} \cos(2q t)$$

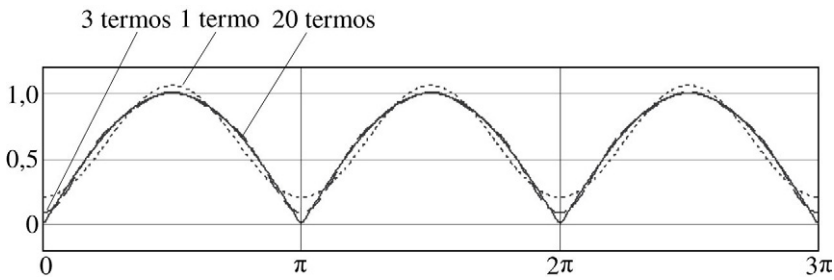


FIGURA 3-9.9a Representações da série.

3-9.10 – Solução com amortecimento:

$$u(t) = \frac{f_0}{m\omega_a} \frac{\omega_a e^{-\alpha t} + ((\alpha - \xi\omega_n) \sin(\omega_a t) - \omega_a \cos(\omega_a t)) e^{-\xi\omega_n t}}{\alpha^2 - 2\alpha\xi\omega_n + \xi^2\omega_n^2 + \omega_a^2}$$

Solução sem amortecimento

$$u(t) = \frac{f_0}{m(\alpha^2 + \omega_n^2)} \left(e^{-\alpha t} + \frac{\alpha \sin(\omega_n t)}{\omega_n} - \cos(\omega_n t) \right)$$

3-9.11 – a:

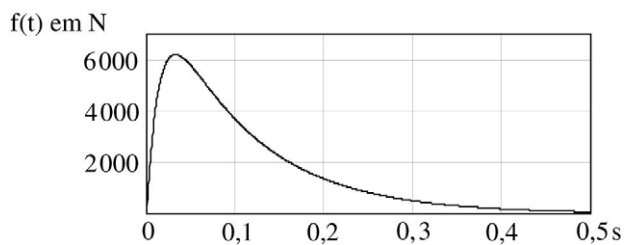


FIGURA 3-9.11a Representação da função $(f(t) = 10^4 (e^{-10t} - e^{-70t}))$.

b: Os históricos de deslocamento com base nos referidos métodos são coincidentes, como mostra a figura seguinte.

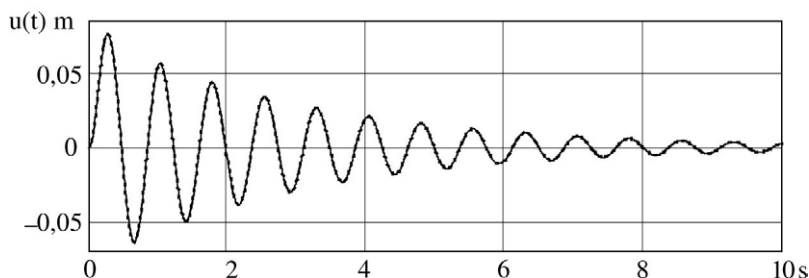


FIGURA 3-9.11b Históricos de deslocamento.

c: A próxima figura apresenta os históricos da resposta amortecida em traço contínuo e da resposta não amortecida em linha pontilhada. Nesses históricos, os deslocamentos máximos ocorrem na proximidade de 0,3s e são próximos entre si, o que evidencia a pequena influência do amortecimento.

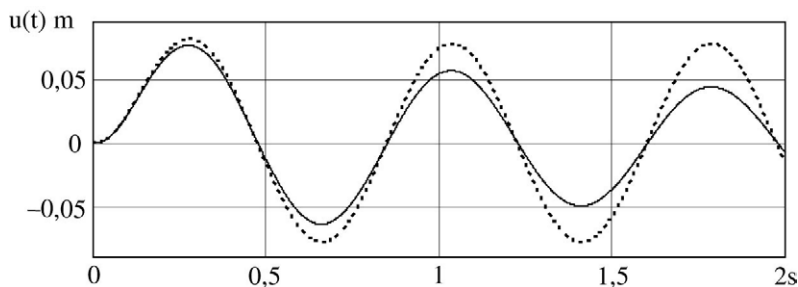


FIGURA 3-9.11c Históricos de deslocamento, nos casos com e sem amortecimento.

3-9.12 – $w_{\text{máx.}} = 0,016519 \text{ m}$, redução de 19,8%

3-9.13 – $\xi = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{(1-r^2)^2 - 9}{32}}$, $r \geq 2$

3-9.14 – $f_0 = 978,57 \text{ N}$, $f_{\text{máx.}} = 70,117 \text{ N}$

CAPÍTULO 4 – MODELO DE DOIS GRAUS DE LIBERDADE

4-6.1 – a:
$$\begin{bmatrix} m_1 \ell & 0 \\ 0 & m_2 \ell \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 \ell + k_2 a^2 / \ell & -k_2 a \\ -k_2 a & k_2 \ell \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ f(t) \end{Bmatrix}$$

b:
$$\begin{bmatrix} \frac{17m'\ell}{35} & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{48EI}{\ell^3} + k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ f(t) \end{Bmatrix}$$

$$4-6.2 - a: \begin{bmatrix} m_1 \ell_1^2 & 0 \\ 0 & m_2 \ell_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} m_1 g \ell_1 + k a^2 & -k a^2 \\ -k a^2 & m_2 g \ell_2 + k a^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$b: \begin{bmatrix} (m_1 + m_2) \ell_1^2 & m_2 \ell_1 \ell_2 \\ m_2 \ell_1 \ell_2 & m_2 \ell_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (m_1 + m_2) g \ell_1 & 0 \\ 0 & m_2 g \ell_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$4-6.3 - \begin{bmatrix} m_1 + m_2 & m_2 \ell \\ m_2 \ell & m_2 \ell^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & m_2 g \ell \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

4-6.4 -

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & c_2 b - c_1 a \\ c_2 b - c_1 a & c_1 a^2 + c_2 b^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_2 b - k_1 a \\ k_2 b - k_1 a & k_1 a^2 + k_2 b^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$c_1 + c_2 = 2\sqrt{(k_1 + k_2)m}$$

4-6.5 -

$$\begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 3c & -c \\ -c & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 3k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ f_0 \cos(\omega t) \end{Bmatrix}$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} k/(2m) & 0 \\ 0 & 2k/m \end{bmatrix}, \quad \hat{\Phi} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\Phi}^T \mathbf{M} \hat{\Phi} = \begin{bmatrix} 6m & 0 \\ 0 & 3m \end{bmatrix}, \quad \hat{\Phi}^T \mathbf{K} \hat{\Phi} = \begin{bmatrix} 3k & 0 \\ 0 & 6k \end{bmatrix}$$

$$4-6.6 - \begin{bmatrix} 0,14143 & 0 \\ 0 & 0,2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 582,97 & -140 \\ -140 & 140 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} 508,25 & 0 \\ 0 & 4313,72 \end{bmatrix}, \quad \hat{\Phi} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3,6506 & -0,19371 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\Phi}^T \mathbf{M} \hat{\Phi} = \begin{bmatrix} 2,8068 & \approx 0 \\ \approx 0 & 0,14893 \end{bmatrix}, \quad \hat{\Phi}^T \mathbf{K} \hat{\Phi} = \begin{bmatrix} 1426,6 & \approx 0 \\ \approx 0 & 642,46 \end{bmatrix}$$

4-6.7 -

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{w}_1 \\ \ddot{w}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix} = u_{bo} \left(\frac{2\pi v}{\ell} \right)^2 \cos \left(\frac{2\pi v}{\ell} t \right) \begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ k_2 u_{bo} \cos(2\pi v t / \ell) \end{Bmatrix}$$

CAPÍTULO 5 – CONSTRUÇÃO DE MODELO DE MULTIGRAUS DE LIBERDADE

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{5-7.1} - \text{Pórtico} \begin{cases} k_{23L}^{(e)} \rightarrow N/\text{rad} \\ k_{36L}^{(e)} \rightarrow N \cdot m/\text{rad} \\ k_{55L}^{(e)} \rightarrow N/m \end{cases} ; \text{Grelha} \begin{cases} k_{13L}^{(e)} \rightarrow N/\text{rad} \\ k_{33L}^{(e)} \rightarrow N \cdot m/\text{rad} \\ k_{36L}^{(e)} \rightarrow N \cdot m/\text{rad} \end{cases} \\
 & \mathbf{5-7.2} -
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11G}^{(1)} + k_{44G}^{(2)} & k_{12G}^{(1)} + k_{45G}^{(2)} & k_{13G}^{(1)} + k_{46G}^{(2)} & k_{14G}^{(1)} & k_{15G}^{(1)} & k_{16G}^{(1)} \\ \cdot & k_{22G}^{(1)} + k_{55G}^{(2)} & k_{23G}^{(1)} + k_{56G}^{(2)} & k_{24G}^{(1)} & k_{25G}^{(1)} & k_{26G}^{(1)} \\ \cdot & \cdot & k_{33G}^{(1)} + k_{66G}^{(2)} & k_{34G}^{(1)} & k_{35G}^{(1)} & k_{36G}^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & k_{44G}^{(1)} + k_{11G}^{(3)} + k_{11G}^{(4)} & k_{45G}^{(1)} + k_{12G}^{(3)} + k_{12G}^{(4)} & k_{46G}^{(1)} + k_{13G}^{(3)} + k_{13G}^{(4)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{55G}^{(1)} + k_{22G}^{(3)} + k_{22G}^{(4)} & k_{56G}^{(1)} + k_{23G}^{(3)} + k_{23G}^{(4)} \\ \text{sim.} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{66G}^{(1)} + k_{33G}^{(3)} + k_{33G}^{(4)} \end{bmatrix}$$

5-7.3 –

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11G}^{(1)} + k_{11G}^{(2)} & k_{12G}^{(1)} + k_{12G}^{(2)} & k_{13G}^{(1)} + k_{13G}^{(2)} & k_{14G}^{(2)} & k_{15G}^{(2)} & k_{16G}^{(2)} \\ \cdot & k_{22G}^{(1)} + k_{22G}^{(2)} & k_{23G}^{(1)} + k_{23G}^{(2)} & k_{24G}^{(2)} & k_{25G}^{(2)} & k_{26G}^{(2)} \\ \cdot & \cdot & k_{33G}^{(1)} + k_{33G}^{(2)} & k_{34G}^{(2)} & k_{35G}^{(2)} & k_{36G}^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & k_{44G}^{(2)} + k_{11G}^{(3)} & k_{45G}^{(2)} + k_{12G}^{(3)} & k_{46G}^{(2)} + k_{13G}^{(3)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{55G}^{(2)} + k_{22G}^{(3)} & k_{56G}^{(2)} + k_{23G}^{(3)} \\ \text{sim.} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{66G}^{(2)} + k_{33G}^{(3)} \end{bmatrix}$$

5-7.4 –

$$\frac{m'\ell}{420} \begin{bmatrix} 312 & 0 & 54 & -13\ell \\ \cdot & 8\ell^2 & 13\ell & -3\ell^2 \\ \cdot & \cdot & 156 & -22\ell \\ \text{sim.} & \cdot & \cdot & 4\ell^2 + \frac{420m}{m'\ell} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{d}_1 \\ \ddot{d}_2 \\ \ddot{d}_3 \\ \ddot{d}_4 \end{Bmatrix} + \frac{EI}{\ell} \begin{bmatrix} \frac{24}{\ell^2} & 0 & -\frac{12}{\ell^2} & \frac{6}{\ell} \\ \cdot & 8 & -\frac{6}{\ell} & 2 \\ \cdot & \cdot & \frac{12}{\ell^2} & -\frac{6}{\ell} \\ \text{sim.} & \cdot & \cdot & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

5-7.5 –

$$\frac{m'\ell}{420} \begin{bmatrix} \left(312 + \frac{420m}{m'\ell}\right) & 0 & 54 & -13\ell \\ \cdot & 8\ell^2 & 13\ell & -3\ell^2 \\ \cdot & \cdot & 156 & -22\ell \\ \text{sim.} & \cdot & \cdot & 4\ell^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{d}_1 \\ \ddot{d}_2 \\ \ddot{d}_3 \\ \ddot{d}_4 \end{Bmatrix} + \frac{EI}{\ell} \begin{bmatrix} \frac{24}{\ell^2} & 0 & -\frac{12}{\ell^2} & \frac{6}{\ell} \\ \cdot & 8 & -\frac{6}{\ell} & 2 \\ \cdot & \cdot & \left(\frac{12}{\ell^2} + \frac{k\ell}{EI}\right) & -\frac{6}{\ell} \\ \text{sim.} & \cdot & \cdot & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -f(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$5-7.6 - 10^8 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{d}_1 \\ \ddot{d}_2 \\ \ddot{d}_3 \end{Bmatrix} + 10^{10} \begin{bmatrix} 2,4 & -1,2 & 0 \\ -1,2 & 1,8 & -0,6 \\ 0 & -0,6 & 0,6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix},$$

$$\begin{cases} T_1 = 1,1350 \text{ s} \\ T_2 = 0,49267 \text{ s} \\ T_3 = 0,33744 \text{ s} \end{cases}$$

$$\Phi = 10^{-5} \begin{bmatrix} 3,8381 & -5,7166 & 7,2520 \\ 6,6961 & -3,6848 & -6,4486 \\ 8,9924 & 1,0368 & 3,4133 \end{bmatrix}$$

$$5-7.7 - \frac{m'\ell}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{2}+1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}+1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{d}_1 \\ \ddot{d}_2 \\ \ddot{d}_3 \end{Bmatrix} + \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} \sqrt{2}/4 & \sqrt{2}/4 & 0 \\ \sqrt{2}/4 & (4+\sqrt{2})/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{Bmatrix} = \sqrt{\frac{EA}{m'\ell^2}} \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{6}}}} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{6}}} \\ \sqrt{2} \end{Bmatrix}$$

$$5-7.8 - m \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{d}_1 \\ \ddot{d}_2 \\ \ddot{d}_3 \end{Bmatrix} + k \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Omega = \frac{k}{m} \begin{bmatrix} (9-\sqrt{73})/4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & (9+\sqrt{73})/4 \end{bmatrix} = \frac{k}{m} \begin{bmatrix} 0,11400 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4,3860 \end{bmatrix}$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} (11-\sqrt{73})/4 & -2 & (11+\sqrt{73})/4 \\ (-5+\sqrt{73})/4 & -1 & (-5-\sqrt{73})/4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,61400 & -2 & 4,8860 \\ 0,88600 & -1 & -3,3860 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

5-7.9 –

$$\begin{bmatrix} 3404,9 & 41,143 & 942,86 & -557,14 \\ \cdot & 3449,4 & -47,15 & -417,86 \\ \cdot & \cdot & 3240,0 & -1607,1 \\ \text{sim.} & \cdot & \cdot & 2142,9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{d}_1 \\ \ddot{d}_2 \\ \ddot{d}_3 \\ \ddot{d}_4 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2,899 \cdot 10^8 & -8,6322 \cdot 10^7 & 6,48 \cdot 10^5 & 6,48 \cdot 10^5 \\ \cdot & 1,1558 \cdot 10^8 & -7,796 \cdot 10^5 & 4,86 \cdot 10^5 \\ \cdot & \cdot & 1,215 \cdot 10^7 & 2,7 \cdot 10^6 \\ \text{sim.} & \cdot & \cdot & 5,4 \cdot 10^6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,17868 \\ 0,06119 \\ 0,03999 \\ 0,01947 \end{Bmatrix} s,$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} -1,7478 \cdot 10^{-4} & -4,5645 \cdot 10^{-4} & -6,5681 \cdot 10^{-3} & -1,6634 \cdot 10^{-2} \\ -3,1365 \cdot 10^{-4} & -1,8200 \cdot 10^{-4} & -1,6020 \cdot 10^{-2} & 6,5278 \cdot 10^{-3} \\ -8,0725 \cdot 10^{-3} & 2,0342 \cdot 10^{-2} & -3,1869 \cdot 10^{-3} & 5,7763 \cdot 10^{-3} \\ 1,3958 \cdot 10^{-2} & 2,2551 \cdot 10^{-2} & -8,4702 \cdot 10^{-3} & 1,3486 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}$$

5-7.10 –

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{h} \begin{bmatrix} 12/h^2 & 6/h & -12/h^2 & 6/h \\ \cdot & 4 & -6/h & 2 \\ \cdot & \cdot & 24/h^2 & 0 \\ \text{sim.} & \cdot & \cdot & 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}^c = \frac{EI}{7h^3} \begin{bmatrix} 12 & -30 \\ -30 & 96 \end{bmatrix}$$

CAPÍTULO 6 – ANÁLISE DE MODELO DE MULTIGRAUS DE LIBERDADE

6-7.1 – a: $\omega_n = 24,929 \text{ rad/s}$, $A_d = 0,44228$, $a_p = 1,8870 \cdot 10^{-3} \text{ m}$.

b: $\omega_1 = 24,570 \text{ rad/s}$, $\omega_2 = 154,15 \text{ rad/s}$, $\omega_3 = 434,46 \text{ rad/s}$, $\omega_4 = 857,10 \text{ rad/s}$,

$\omega_5 = 1594,2 \text{ rad/s}$, $\omega_6 = 2560,2 \text{ rad/s}$, $\omega_7 = 4058,8 \text{ rad/s}$, $\omega_8 = 6659,7 \text{ rad/s}$.

Diferença na frequência fundamental: $-1,44\%$.

c: $\mathbf{d}' = 10^{-3} [0,211 \ 0,190 \ 0,677 \ 0,257 \ 1,183 \ 0,239 \ 1,624 \ 0,209]^T$ em metros.

Diferença de deslocamento: $-13,94\%$.

d: Os históricos do deslocamento da extremidade livre estão mostrados na próxima figura, em que a representação em linha pontilhada é do procedimento da Seção 6-1 e a representação em linha contínua é do *método de superposição*

modal completa. Observa-se que esses históricos são graficamente coincidentes aproximadamente a partir de 3,5s.

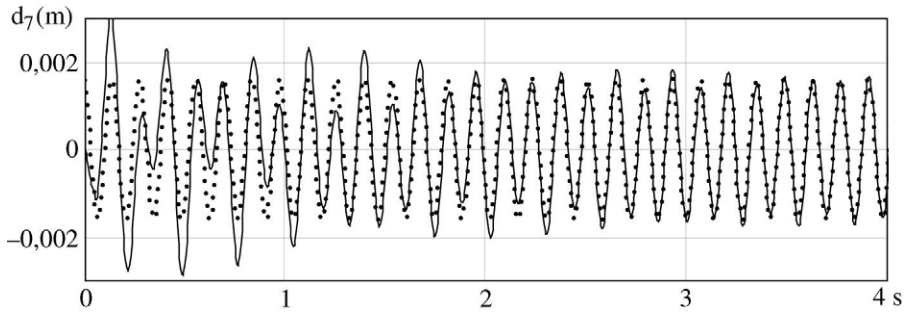


FIGURA 6-7.1d Históricos do deslocamento da extremidade livre.

e:

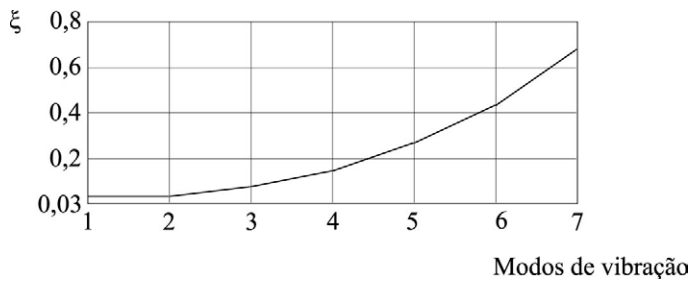


FIGURA 6-7.1e Razões de amortecimento *versus* ordem dos modos de vibração.

f: Na próxima figura estão representados os históricos do deslocamento da extremidade livre obtidos com os *métodos de integração direta por diferença finita central, de Newmark e de Wilson $\theta = 1,4$* . Observa-se coincidência gráfica dessas representações.

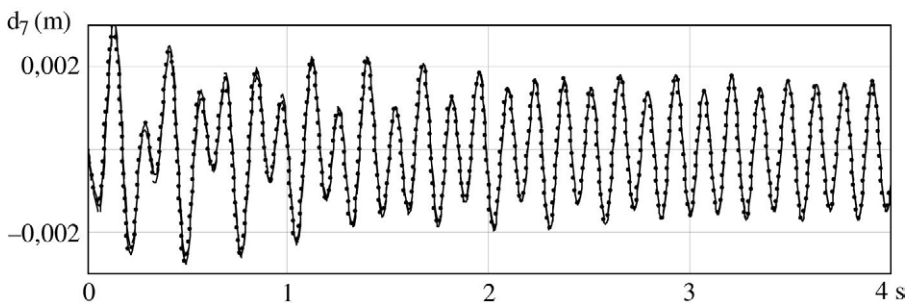


FIGURA 6-7.1f Históricos do deslocamento da extremidade livre, integrações diretas.

g: São necessários os dois primeiros modos naturais de vibração.

h: Os históricos do terceiro deslocamento estão mostrados na próxima figura, em que a representação em linha pontilhada é a com dois modos naturais de vibração e a representação em linha contínua, com um modo natural de vibração. Observa-se pequena diferença entre essas representações, o que confirma a necessidade de dois modos naturais de vibração na transformação modal de coordenadas.

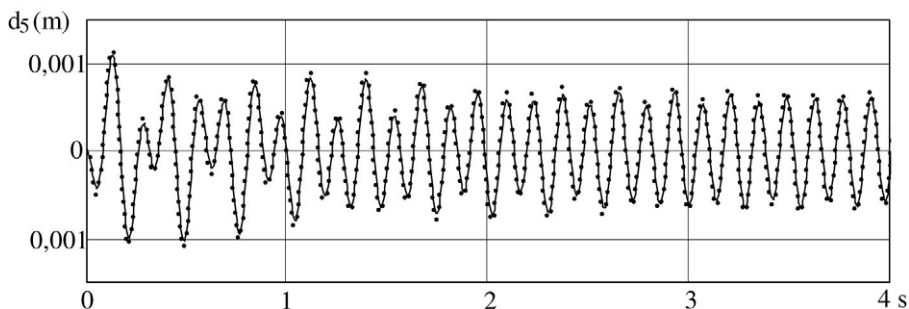


FIGURA 6-7.1g Históricos do quinto deslocamento nodal.

6-7.2 – a: $\mathbf{C} = 10^8 \begin{bmatrix} 1,3586 & -0,5249 & 0 \\ -0,5249 & 1,0962 & -0,2625 \\ 0 & -0,2625 & 0,4168 \end{bmatrix} \text{ N} \cdot \text{s/m}$

b: $\xi_3 = 0,04902$

c: Os históricos dos deslocamentos do *shear building*, obtidos com os métodos de integração direta por diferença finita central, por Newmark e por Wilson $\theta = 1,4$, estão mostrados na próxima figura. Os históricos de cada nível são graficamente coincidentes.

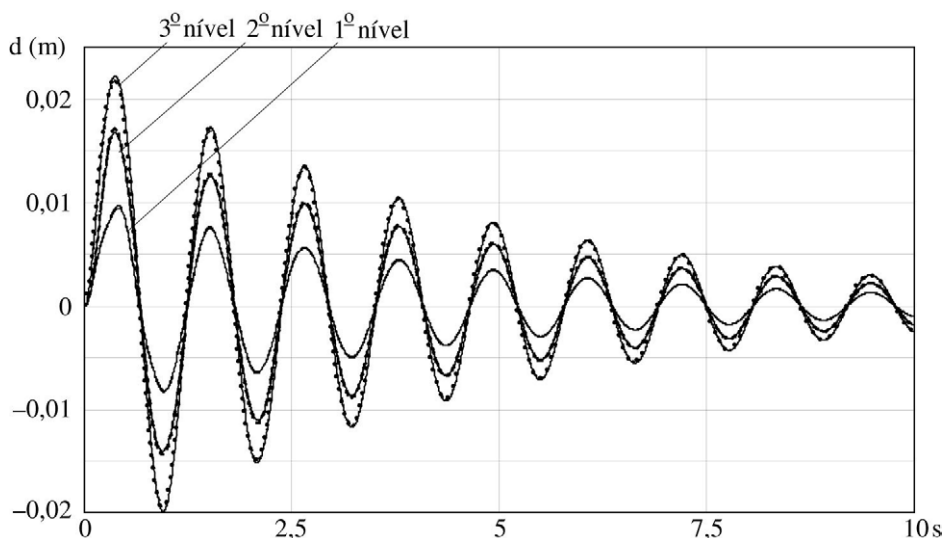


FIGURA 6-7.2c Históricos dos deslocamentos do *shear building*.

CAPÍTULO 7 – ANÁLISE NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

7-7.1 – $f(t) = f_0(1-t)$, $\tau(f(t)) = \frac{f_0}{\omega^2}(1 - \cos \omega + i(\sin \omega - \omega))$

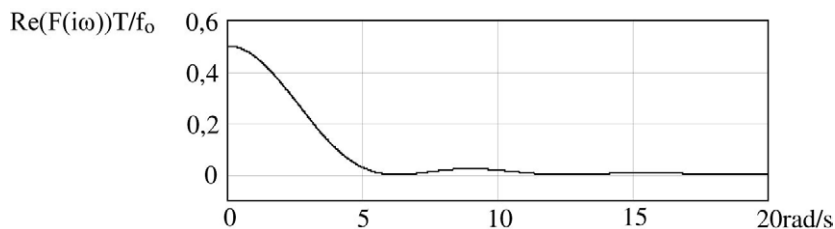


FIGURA 7-7.1a Parte real da transformada de Fourier.

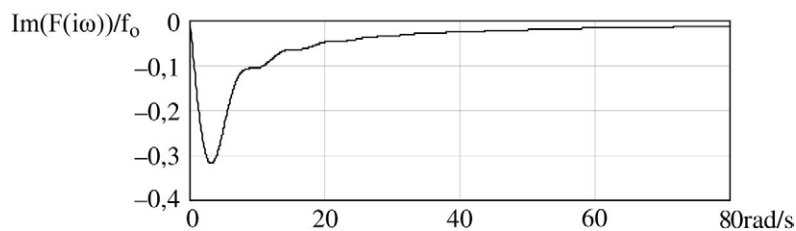


FIGURA 7-7.1b Parte imaginária da transformada de Fourier.

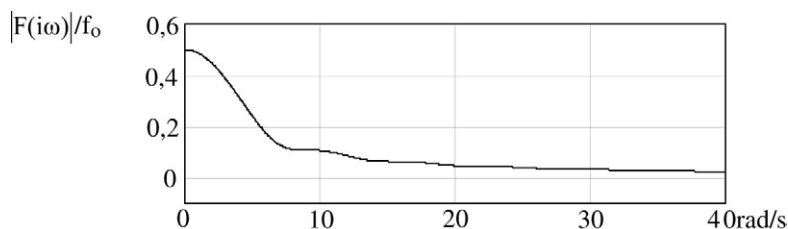


FIGURA 7-7.1c Espectro de amplitudes da transformada de Fourier.

7-7.2 –

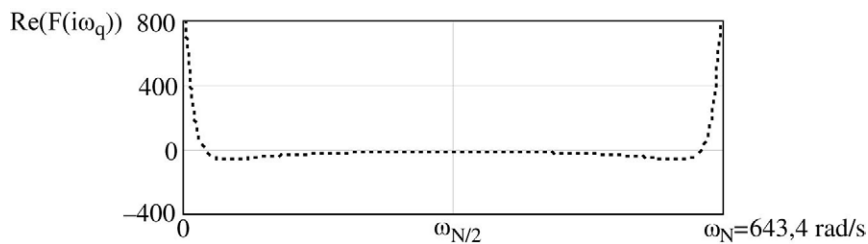


FIGURA 7-7.2a Parte real da transformada de Fourier.

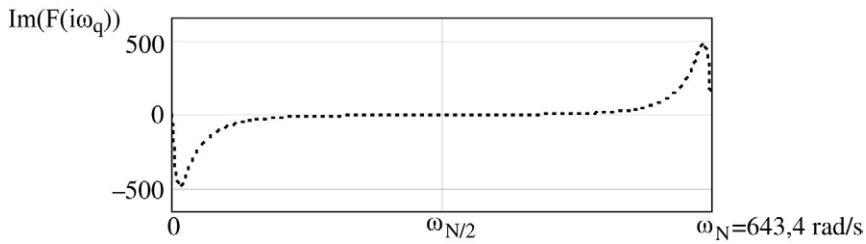


FIGURA 7-7.2b Parte imaginária da *transformada de Fourier*.

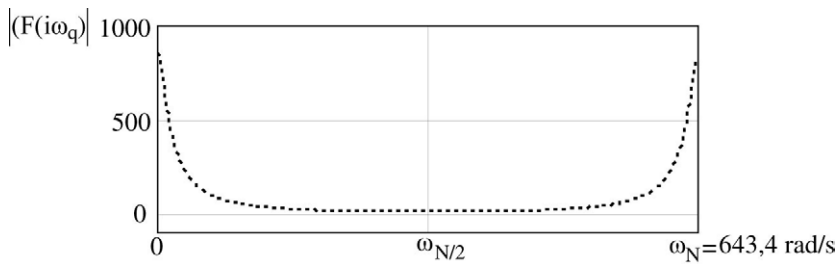


FIGURA 7-7.2c Espectro de amplitudes da *transformada de Fourier*.

7-7.3 – a: A próxima figura apresenta históricos de deslocamento coincidentes no caso de ($T_0 = 10,24$ s) e ($N = 2^{11}$). Não foram identificadas condições iniciais espúrias. Com o Algoritmo 7-4.1 foi obtido histórico idêntico aos mostrados.

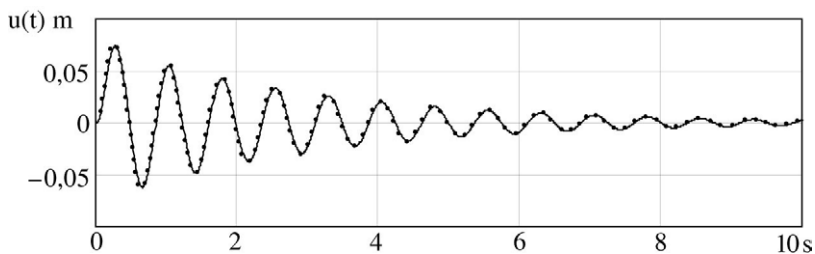


FIGURA 7-7.3a Históricos de deslocamento.

b: A próxima figura apresenta os históricos no caso de ($T_0 = 4,094$ s) e ($N = 2^{11}$). A solução analítica está representada em linha contínua, e a solução obtida através do domínio da frequência está mostrada em linha pontilhada. O deslocamento inicial não nulo desse último histórico se deve à periodicidade da *transformada de Fourier discreta*.

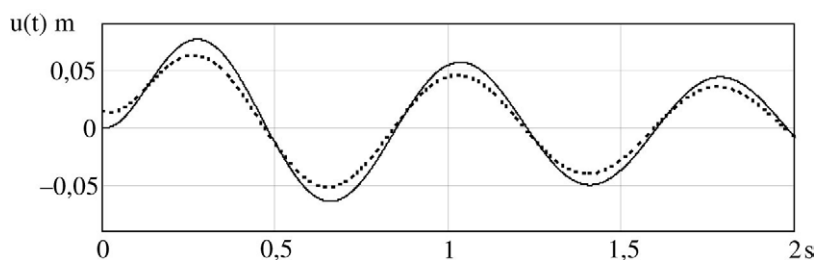


FIGURA 7-7.3b Históricos de deslocamento, com condição inicial espúria.

c: A figura seguinte apresenta os históricos no caso de ($T_0 = 4,094$ s) e ($N = 2^{11}$), obtidos com a solução analítica e através da análise no domínio da frequência com correção da periodicidade artificial. Esses históricos são coincidentes graficamente.

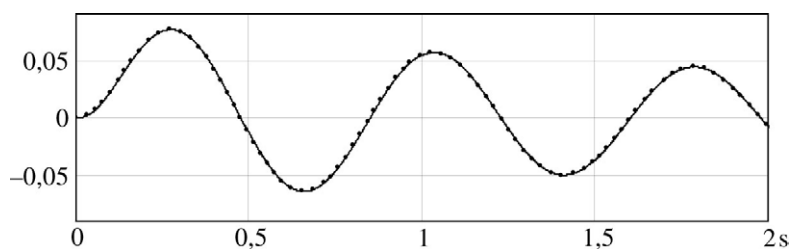


FIGURA 7-7.3c Históricos de deslocamento, sem condição inicial espúria.

CAPÍTULO 8 – ANÁLISE SÍSMICA

8-6.1 – $S_d = 0,0174$ m

8-6.2 –

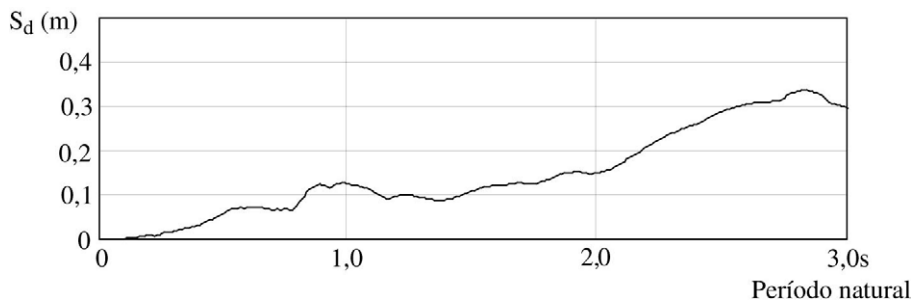


FIGURA 8-6.2a Espectro de resposta do deslocamento relativo.

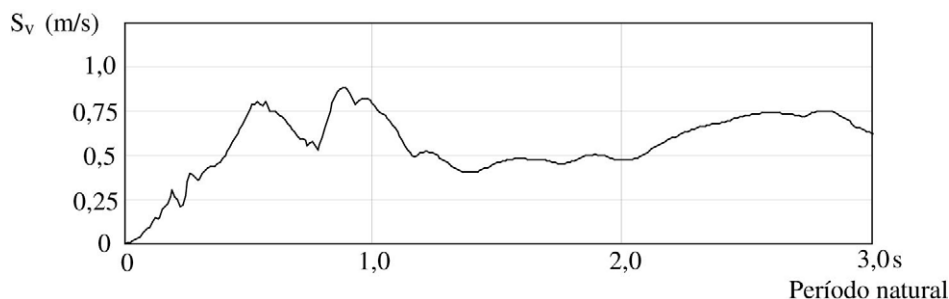


FIGURA 8-6.2b Espectro de resposta da pseudovelocidade relativa.

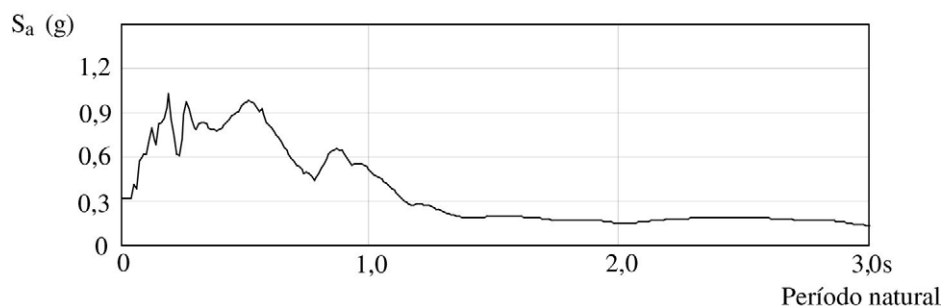


FIGURA 8-6.2c Espectro de resposta da pseudoaceleração absoluta.

8-6.3 – Os históricos de deslocamento obtidos em resolução direta por segmentos lineares da ação externa e em análise no domínio da frequência estão mostrados a seguir e são graficamente coincidentes.

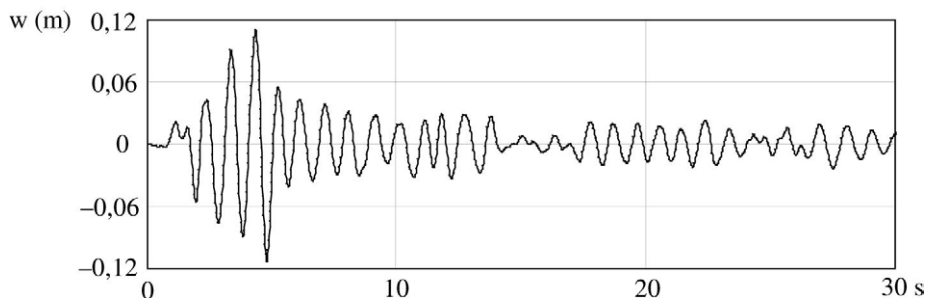


FIGURA 8-6.3a Históricos de deslocamento 1.

Os históricos de deslocamento obtidos com resolução direta por segmentos lineares, com a *integração de Newmark* e com a *integração de Wilson* $\theta = 1,4$ estão mostrados na próxima figura e são graficamente coincidentes.

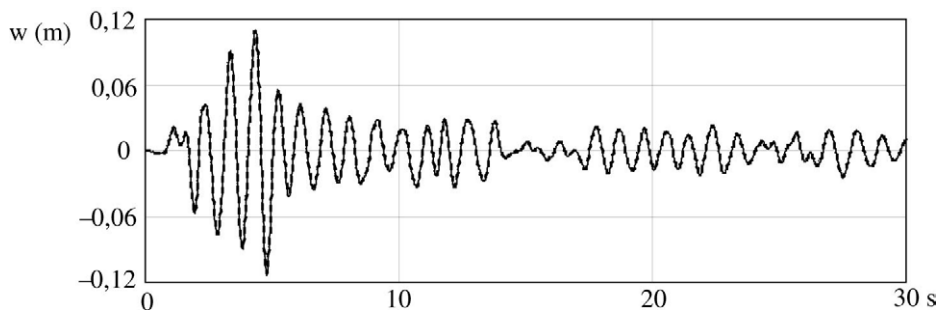


FIGURA 8-6.3b Históricos de deslocamento 2.

CAPÍTULO 9 – RESOLUÇÃO NUMÉRICA DO PROBLEMA DE AUTOVALOR

$$9-9.1 - \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 6 - 2\sqrt{2} \cong 3,1716 \\ \lambda_3 = 6 + 2\sqrt{2} \cong 8,8284 \end{cases}, \hat{\mathbf{x}}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}, \hat{\mathbf{x}}_2 = \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}-2} \\ -\frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}-1} \\ 1 \end{Bmatrix}, \hat{\mathbf{x}}_3 = \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}+2} \\ -\frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}+1} \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$9-9.2 - \begin{bmatrix} 2 & -2,3094 & 1,6330 & 1,2649 \\ \cdot & 3,3333 & -3,0641 & -2,3735 \\ \cdot & \cdot & 4,9167 & 0,71005 \\ \text{sim.} & \cdot & \cdot & 5,3500 \end{bmatrix} \mathbf{X}^* = \mathbf{X}^* \mathbf{\Omega}$$

9-9.3 –

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} 0,023888 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9,8136 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,2534 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4,5050 \end{bmatrix}, \mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 0,20261 & -0,75766 & -0,42496 & -0,065856 \\ 0,39368 & 1,0022 & -0,19506 & 0,050719 \\ 0,19103 & -0,36503 & 0,37933 & -0,69741 \\ 0,15260 & -0,44093 & 0,27808 & 0,71065 \end{bmatrix}$$

$$9-9.4 - \omega_1 \cong 0, \omega_2 \cong 0, \omega_3 = 70,756 \text{ rad/s } (-0,0325\%), \omega_4 = 195,14 \text{ rad/s } (0,0359\%)$$

$$9-9.5 - \omega_1 = 5,6195; 1,52\%$$

9-9.6 – A matriz obtida com a supressão da última linha e última coluna da matriz tem os autovalores: $\lambda_1 = 1,9584$, $\lambda_2 = 26,042$. A matriz obtida com a supressão da segunda linha e segunda coluna da referida matriz tem os autovalores: $\lambda_1 = 8,2789$, $\lambda_2 = 18,720$. A matriz obtida com a supressão da primeira linha e primeira coluna da mesma matriz tem os autovalores: $\lambda_1 = 8,4689$, $\lambda_2 = 16,531$. Todos esses resultados verificam a separação de autovalores.

9-9.7 – Após deslocamento da origem igual a 10, tem-se a fatoração

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 9 \\ 6 & 9 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4/3 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4/3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Os dois coeficientes negativos na matriz diagonal dessa fatoração indicam que há dois autovalores do que 10.

9-9.8 – Na segunda iteração obtém-se ($\lambda_1 = 0,028878$).

$$\rho(\mathbf{x}_1) = 0,18750 > \lambda_1$$

9-9.9 – Na sexta iteração obtém-se ($\lambda_2 = 1,2534$)

$$\mathbf{9-9.10} - \lambda_1 = 0,028879, \lambda_2 = 1,2534, \boldsymbol{\varphi}_1 = \begin{Bmatrix} -0,20261 \\ -0,39368 \\ -0,19103 \\ -0,15260 \end{Bmatrix}, \boldsymbol{\varphi}_2 = \begin{Bmatrix} 0,42292 \\ 0,19778 \\ -0,37958 \\ -0,28008 \end{Bmatrix}$$



Índice Remissivo modificado por Humberto Soriano

A

Absorvedor de vibração, 133

Ação

dinâmica, 213, 341

sísmica, 341, 343, 350

Ações

aleatórias, 1, 72, 431

determinísticas, 1, 72, 431

Aceleração

da gravidade, 9

centrípeta, 7

sísmica, 346, 347

Acelerograma, 342, 431, 342

Ações

aleatórias, 72, 431

determinísticas, 72, 431

externas, 431

múltiplas nos apoios, 369

Aliasing, 309, 431

Alturas efetivas de colunas, 416

Amortecedor de massa sintonizada, 163, 431

Amortecimento, 41, 43, 71, 74, 431

artificial, 260

crítico, 78, 431

de Caughey, 252

de Coulomb, 75, 76, 97, 431

de Rayleigh, 250, 431

estrutural, 71, 75, 296, 431

estrutural equivalente, 312

modal, 253

não proporcional, 256

proporcional, 234, 238, 249, 431

subcrítico, 78

supercrítico, 78

viscoso, 71, 75, 95, 97, 293, 431

viscoso equivalente, 96, 340

Amplitude, 44, 48, 82

de batimento, 160

Análise

aeroelástica, 34

de Rayleigh-Ritz, 383, 432

dinâmica aleatória, 38

dinâmica determinística, 72

dinâmica não linear, 276

estática, 2

estática equivalente, 359

Matricial de Estruturas, 171

modal, 205, 432

no domínio da frequência, 71, 281

no domínio do tempo, 229

pseudoestática, 359

sísmica, 341

Ângulo de fase, 44, 80, 294, 300, 432

Associações de molas, 60

B

Base de Ritz, 389

C

Características dinâmicas, 171, 203, 432

Centro de

oscilação, 26

percussão, 27

Ciclo de histerese, 97, 296

Coefficiente de

amortecimento estrutural, 76, 98, 297

amortecimento viscoso, 75

atrito cinemático, 75

correlação entre modos

de vibração, 365

resposta dinâmica, 205

rigidez axial, 16

rigidez de torção, 17

Comprimento euclidiano, 205

Condensação estática, 217

Condição de
contorno, 12
ressonância, 50

Condições
de equilíbrio, 34
geométricas de contorno, 12, 196, 432
iniciais, 12, 44, 315
naturais, 196

Configuração
não deformada, 42
neutra, 42, 76, 432

Constante de torção, 16

Conteúdo de frequência, 237, 281, 287, 432

Controle de
aproximações, 307
transmissão de vibrações, 133

Convolução, 286

Coordenada(s), 10
de Ritz, 388
generalizada(s), 11
modais, 158, 214, 234

Correção estática dos modos superiores, 240, 241, 432

D

Decomposição espectral, 377

Decremento logarítmico, 90, 432

Deformações dos esforços cortantes, 177, 178

Delta de
Dirac, 304, 432
Kronecker, 206

Deslocamento
absoluto, 134
da base, 133, 134, 135
dinâmico, 42
espectral, 378
estático, 77
pseudoestático, 433
relativo, 133
relativo espectral, 351, 352
virtual, 18, 433

Dinâmica
clássica, 5
das estruturas, 3, 5

Dissipação de energia, 74

Distância epicentral, 342

E

Edificações sismorresistentes, 342, 433

Eficiência
computacional, 420
de um isolamento de vibração, 140

Elemento de
casca, 175
estado plano, 188

grelha, 181

pórtico espacial, 11, 180, 181, 182

pórtico plano, 182

treliça espacial, 179

treliça plana, 179

viga, 12, 189

Elementos finitos, 433

isoparamétricos, 194

triangulares, 175

Energia
cinética, 14, 433
de deformação, 15
mecânica, 14, 433
potencial elástica, 15
potencial gravitacional, 15, 433

Epicentro, 342

Equação
característica, 151
da linha elástica, 189
de equilíbrio dinâmico, 9
de Euler, 32
de frequências, 151
de restrição, 10

Equações de movimento, 13, 177, 187

Equações modais desacopladas, 276, 326

Equilíbrio
estável, 30, 34
indiferente, 30, 33, 34

Erro de truncamento modal, 276, 362

Escala
Mercalli Modificada, 344, 433
Richter, 344, 433

Esforços de engastamento perfeito, 182, 183

Esparsidade, 252, 275, 276

Espectro de
amplitudes, 100
ângulos de fase, 100

Espectro de resposta, 342, 350, 356, 433

da pseudoaceleração, 354

da pseudovelocidade, 353

de projeto, 343, 356, 433

do deslocamento relativo, 342, 352

tripartido, 342, 355, 433

Estabilidade
numérica, 115

Estado plano de
deformações, 190
tensões, 188, 190

Estruturas, 4

contínuas, 433

de edifícios, 358

hiperestáticas, 177, 349

reticuladas, 433

sismorresistentes, 75, 341

F

- Falha por fadiga, 88
- Fator de
 - Cholesky, 380, 434
 - transmissibilidade, 139, 434
 - participação modal, 245
- Fator de amplificação
 - dinâmica, 50, 86, 299
 - do deslocamento absoluto, 136, 139, 434
 - do deslocamento relativo, 134, 434
- Fatores de cisalhamento, 178
- Fenômeno de
 - batimento, 51, 160
 - ressonância, 85, 232
- Força
 - aperiódica, 302
 - basal, 343, 359, 434
 - centrífuga, 48, 143
 - conservativa, 39
 - de amortecimento, 75
 - de campo, 8
 - de contato, 38
 - de impacto, 108, 143
 - de inércia, 9, 434
 - de inércia centrífuga, 48
 - elástica, 27
 - harmônica, 230, 293, 434
 - impulsiva, 434
 - periódica, 434
 - restitutiva, 125
- Forças
 - externas, 73
 - nodais equivalentes, 182, 192
- Forma
 - generalizada do problema de autovalor, 378, 383
 - reduzida do problema de autovalor, 394
- Formulação
 - de deslocamentos, 187
 - matricial, 316
- Frequência(s), 434
 - angular, 21, 81
 - cíclica, 22, 213
 - crítica, 213, 214
 - de Nyquist, 309, 312, 434
 - de meia potência, 94
 - forçante, 50, 85, 141
 - fundamental, 99, 102, 151
 - natural(is), 21, 22, 44, 434
 - natural amortecida, 79
 - ressonante, 50, 434
- Função(ões)
 - (complexa) de resposta em frequência, 86
 - complexa de resposta, 294, 340
 - de interpolação, 187

- de resposta em frequência, 86
- de transferência, 434
- degrau, 106
- Gaussiana, 286

G

- Galileu Galilei, 5
- Graus de liberdade, 10, 434
 - dinâmicos, 196
- Grelha, 180, 182

H

- Hipocentro, 343
- Hipótese
 - da seção plana, 11, 72
 - do diafragma, 361, 434
- Histórico(s) de resposta, 229, 350, 363

I

- Impulso, 104, 110
 - de uma força, 10, 434
 - unitário, 304
- Inércia rotacional, 11, 59, 181
- Instabilidade
 - dinâmica, 33
 - numérica, 113
- Integração
 - direta, 249, 259
 - explícita, 115
 - numérica, 113, 124, 259, 270
- Integral de
 - convolução, 104, 286
 - Duhamel, 104, 282, 305, 435
- Intensidade sísmica, 435
- Isaac Newton, 5
- Isolador(es) de vibração, 133, 169

L

- Lei(s)
 - da gravitação universal, 8
 - de Hooke, 16
 - de Moore, 421
 - do movimento, 6

M

- Magnitude, 343, 344
- Massa
 - equivalente, 52
 - modal, 205
- Matriz
 - esparsa, 197
 - espectral, 152, 204, 376

Matriz (*cont.*)

- modal, 152, 205, 376
- ortogonal, 377
- positiva-definida, 375
- de amortecimento global, 249
- de incidência, 198
- de funções de interpolação, 187
- de impedância, 330, 331
- de massa condensada, 218
- de massa consistente, 435
- de massa discreta, 181
- de massa global, 186
- de operadores diferenciais, 189, 190
- de receptância, 329, 333
- de rigidez não restringida, 151
- de rigidez global, 435
- de rigidez restringida, 374
- de rotação, 184, 186
- de transformada de Fourier implícita, 317

Mecânica

- Análítica, 13
- Clássica, 4, 5, 6
- dos sólidos deformáveis, 15
- Vetorial, 13

Método da

- amplificação ressonante, 93
- largura de banda, 93
- meia amplitude, 92

Método das forças, 177, 182

Método de

- Cholesky, 416
- Craig e Bampton, 219
- Gauss, 218, 416
- integração direta, 435
- integração de Gauss, 192
- integração numérica, 72
- iteração direta, 407
- iteração inversa, 405, 410, 435
- iteração por subespaço, 383, 405, 412, 435
- Jacobi, 392, 402, 435
- Newmark, 116, 126, 262, 435
- Rayleigh, 53, 217, 435
- superposição modal, 233, 238, 246, 259
- Wilson θ , 118, 128, 263, 436

Método do decaimento logarítmico, 90, 98

Método(s)

- condicionalmente estáveis, 262
- de superposição modal, 233
- de transformação, 379, 382
- dos elementos finitos, 4, 176, 187, 436
- explícitos, 115
- implícitos, 113
- incondicionalmente estáveis, 262
- por diferença finita central, 113, 126, 260
- por espectro de resposta, 368

Modelo(s)

- contínuo(s), 4, 10, 11, 171
- de dois graus de liberdade, 147
- de multigraus de liberdade, 171, 326, 436
- discreto(s), 4, 10, 171
- shear building*, 360
- tridimensional, 360

Modos

- de corpo rígido, 151, 221
- restrição, 220
- naturais de vibração, 152, 203, 436

Módulo de

- elasticidade longitudinal, 16
- elasticidade transversal, 16
- rigidez à flexão, 12

Mola(s)

- de torção, 17
- de translação, 16
- em paralelo, 68
- em série, 61
- inclinadas, 62

Momento de inércia

- da seção transversal, 53
- de massa, 181
- polar, 17, 26

Movimento harmônico simples, 44

N

Número de condicionamento, 377

O

Ondas sísmicas, 343

Ortogonalização de Gram-Schmidt, 410, 419

Oscilação, 436

Oscilador

- duplo, 148
- harmônico, 41

Oscilador simples

- amortecido, 71, 293
- equivalente, 51, 436
- não amortecido, 41

P

Pêndulo

- de torção, 11, 27, 436
- ideal, 20
- invertido, 30
- isócrono, 5
- simples, 19
- sólido, 25, 28, 436

Período

- amortecido, 78, 80
- de batimento, 160

fundamental, 436
natural, 22, 44

Placa Sul-Americana, 345

Plano complexo, 294

Ponderação quadrática, 364

Pórtico

espacial, 180, 193
plano, 180

Princípio(s)

da ação e reação, 8
da causalidade, 321
da conservação da quantidade de movimento, 10
da inércia, 7
da superposição dos esforços, 176, 436
de d'Alembert, 9, 436
de Hamilton, 19
dos deslocamentos virtuais, 18, 191, 436

Problema de autovalor, 150, 373

Procedimento iterativo de

Newton-Raphson, 131, 436
Newton-Raphson modificado, 130, 271

Procedimento(s) de normalização, 205, 376

Profundidade focal, 343

Propriedade de

estacionariedade do quociente de Rayleigh, 386
filtragem, 304

Pseudo

aceleração absoluta espectral, 354
força estática, 114
matriz de massa, 260, 261
matriz de rigidez, 263, 264
período, 80
velocidade relativa espectral, 352
vetor das forças estáticas nodais, 260, 263, 264

Q

Quantidade de movimento, 6, 8

Quociente de Rayleigh, 217, 383, 436

R

Razão de

amortecimento, 76, 79, 437
convergência, 407, 409
frequências, 49
participação de massa, 363
ressonância, 88

Rebote elástico, 343

Redução de

de Guyan, 218
graus de liberdade, 217

Referencial

global, 175, 183
inercial, 6, 437
local, 175, 437

Réplicas sismológicas, 343

Resolução

direta por segmentos lineares, 110
incremental recursiva, 145
forçada, 48, 99, 315

Resposta, 437

aperiódica, 144
com decaimento, 144
forçada, 48, 99, 315
em regime permanente, 84, 102
em regime transiente, 72, 84, 233
livre amortecida, 77
periódica, 144
ressonante, 85

Rigidez complexa, 297

S

Sequência de Sturm, 402, 437

Série de Fourier, 99, 102, 282, 301, 437

Shaking table, 343

Shear building, 153, 214, 278, 361, 423

Síntese modal de componentes, 219, 238

Sismicidade, 343

Sismo, 343

El Centro, 347

Sismo, 343

Sismógrafo, 343

Sismologia, 343

Sismos

interplacas, 344
intraplacas, 344
naturais, 345

Sistema

de equações diferenciais desacopladas, 159
conservativo, 71
global das equações de movimento, 176, 195
global restringido, 176, 203
massa-mola, 41

Solução ressonante, 85

Superposição dos amortecimentos modais, 253

T

Teorema

de reciprocidade de Betti-Maxwell, 148-149
de Steiner, 8
dos eixos paralelos, 8

Teoria

clássica de viga, 11, 53, 55
de viga de Timoshenko, 210

Terremoto, 343

Trabalho

de uma força, 13, 14
virtual externo, 18
virtual interno, 18

Transformação

- ao referencial global, 183
- congruente, 379, 381
- modal, 158, 234
- similar, 274, 379

Transformada(s) de Fourier, 104, 283, 301, 437

- contínuas, 284, 285
- discreta(s), 288, 289
- implícita, 317
- rápidas, 292

Transmissão de vibração, 133

Treliça, 181

V

Vetor de

- deslocamentos quase-estáticos, 370
- estado, 257

influência, 362

Vetores de

- Lanczos, 417
- Ritz, 417

Vibração

- forçada, 437
- livre, 77
- livre amortecida, 315
- livre não amortecida, 19, 43, 150
- não amortecida forçada, 42
- subamortecida, 79

Z

Zona(s) sísmica(s), 343, 346, 437