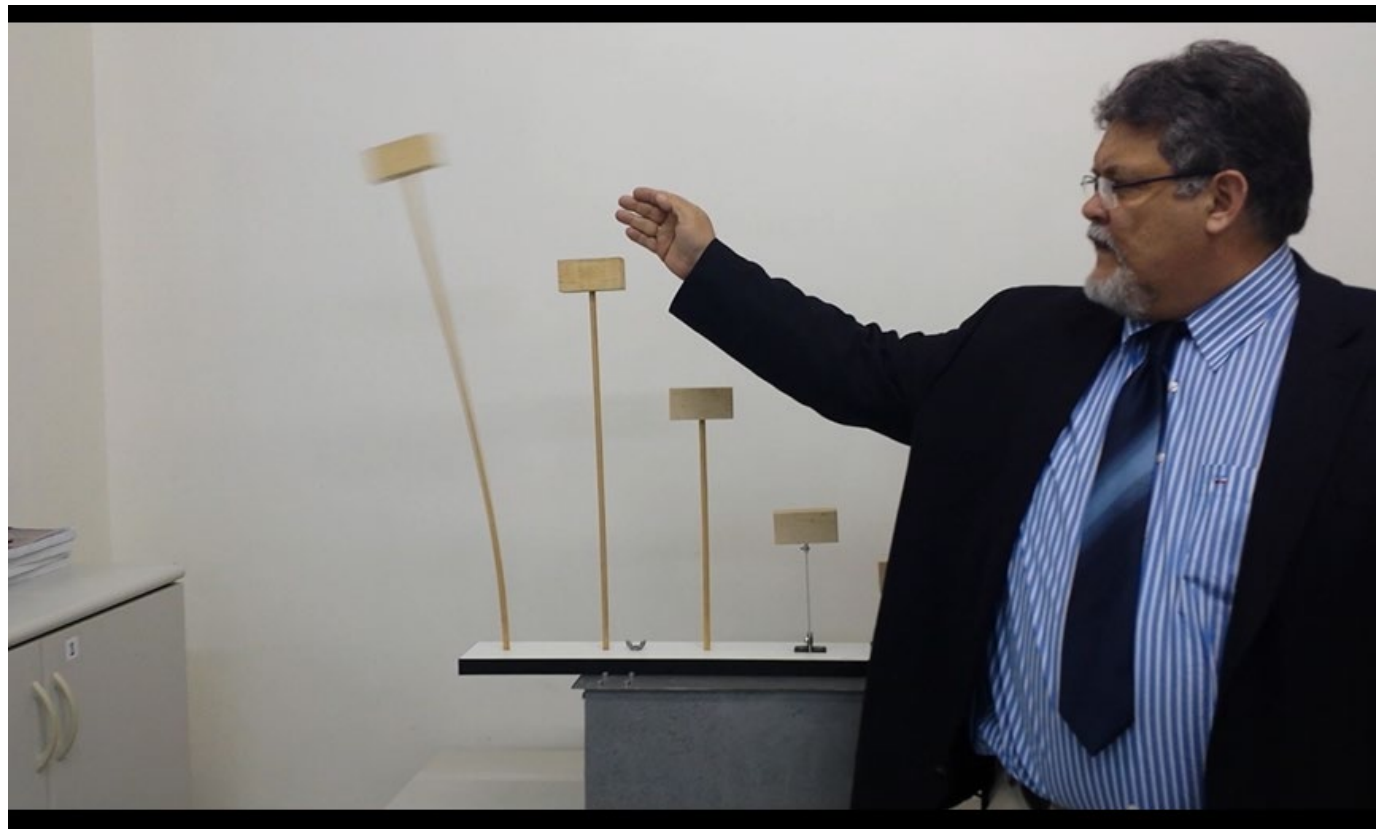
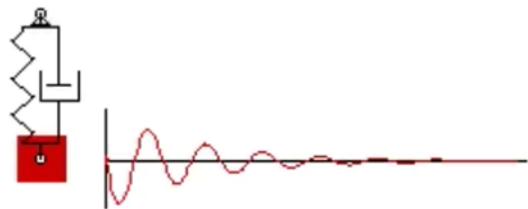
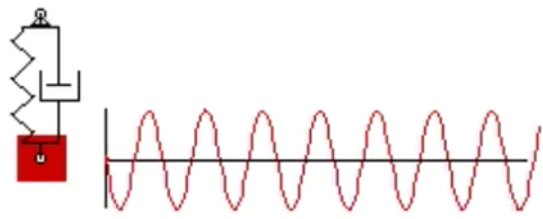


VIBRAÇÕES NAS ESTRUTURAS

Zacarias M. Chamberlain Pravia (Ver. 2023)



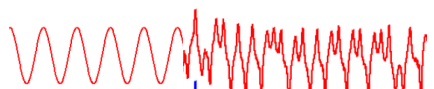
ASCE
AMERICAN SOCIETY OF CIVIL ENGINEERS

SEI
STRUCTURAL
ENGINEERING
INSTITUTE
ASCE

PROFESSIONAL
AISC
MEMBER

STRUCTURAL STABILITY RESEARCH COUNCIL
SSRC
FOUNDED 1944

<http://Zacariaschamberlain.com>



Zacarias Chamberlain 2023

**ZACARIAS
CHAMBERLAIN**



***ESTE MATERIAL É DE PROPRIEDADE DO AUTOR E APENAS É FORNECIDO
COMO FERRAMENTA DE ACOMPANHAMENTO DO CONTEÚDO DO CURSO.***



Zacarias Chamberlain 2023

CONTEÚDO

09/fevereiro/2023 – 19h às 22h – AULA 1

1 - Introdução as vibrações, porque é necessário saber dinâmica?

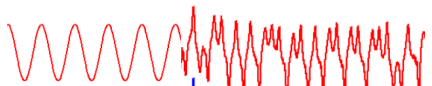
2 - Sistemas de Um grau de liberdade

2.1 – Vibrações livres – equação de movimento

2.2 – Vibração livre não amortecida (frequência natural)

2.3 – Vibração livre amortecida

2.4 - Determinação de frequências naturais: cálculo manual



CONTEÚDO

10/fevereiro/2023 – 19h às 22h – AULA 2

2.5 - Determinação de frequências naturais: cálculo manual

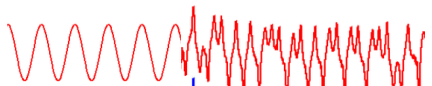
2.6 - Determinação de frequências naturais usando programas computacionais

11/fevereiro/2023 – 9:00h às 12:00h – AULA 3

3 - Sistemas de vários graus de liberdade

3.1 - Sistemas de vários graus de liberdade, modos de vibração

3.2 - Determinação de frequências naturais com programas vários GL



CONTEÚDO

11/fevereiro/2023 – 14h às 17:00h – AULA 4

4. -Problemas dinâmicos nas estruturas de aço e soluções

4.1 – Vibrações induzidas por equipamentos rotativos

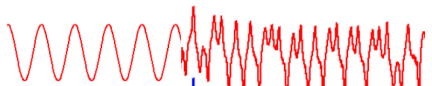
4.2 – Vibrações induzidas pelo vento

04/março/2023 – 14h às 17h – AULA 5

4.3 – Vibrações produzidas por movimento humano (ginásios, passarelas, pisos)

4.4 – Vibrações produzidas na construção civil

5 – Medição de frequências naturais (aula prática)



REFERÊNCIAS

[1] SORIANO, H. LIMA, **Introdução à dinâmica das estruturas**, ELSEVIEAR Editora Limitada, 2014.

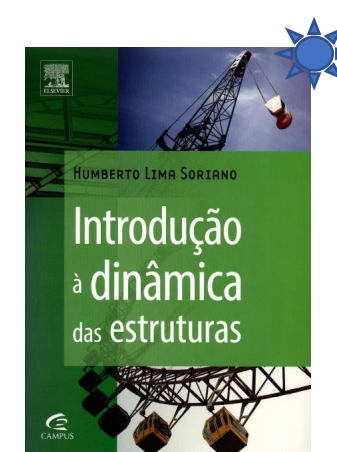
[2] _____, **Vibrações em Pavimentos: recomendações técnicas de Projeto**, Research Fund for Coal & Steel, 2007

[3] Murray et al, ***Vibrations of Steel-Framed Structural Systems Due to Human Activity***, Second edition, AISC Design Guide, 2016

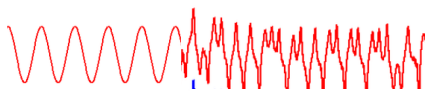
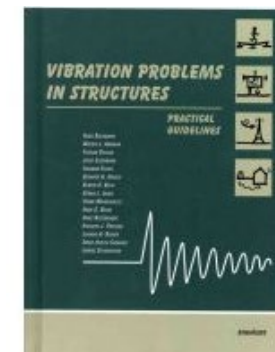
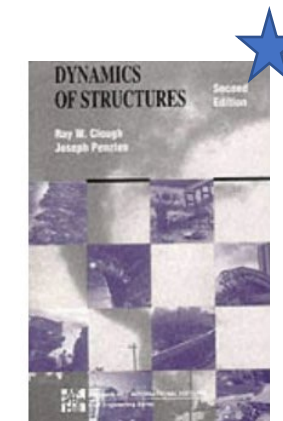
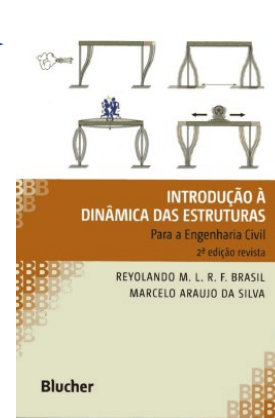
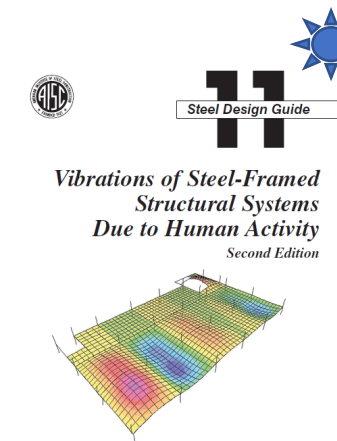
[4] BRASIL, R., SILVA, M.A., **Introdução à dinâmica das estruturas para Engenharia Civil**, 2ª edição, Editora Edgar Blucher, 2017.

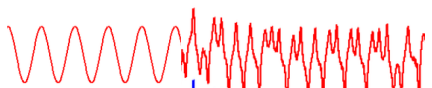
[5] CLOUGH, R.W., PENZIEN, J., **Dynamics of Structures**. Third Edition, New York Mcgraw-Hill, 2003.

[6] BACHMANN, H et al., **Vibration Problems in structures**. Zürich: Comité Européen du Béton – CEB, Bulletin D'information No. 209, 1991.

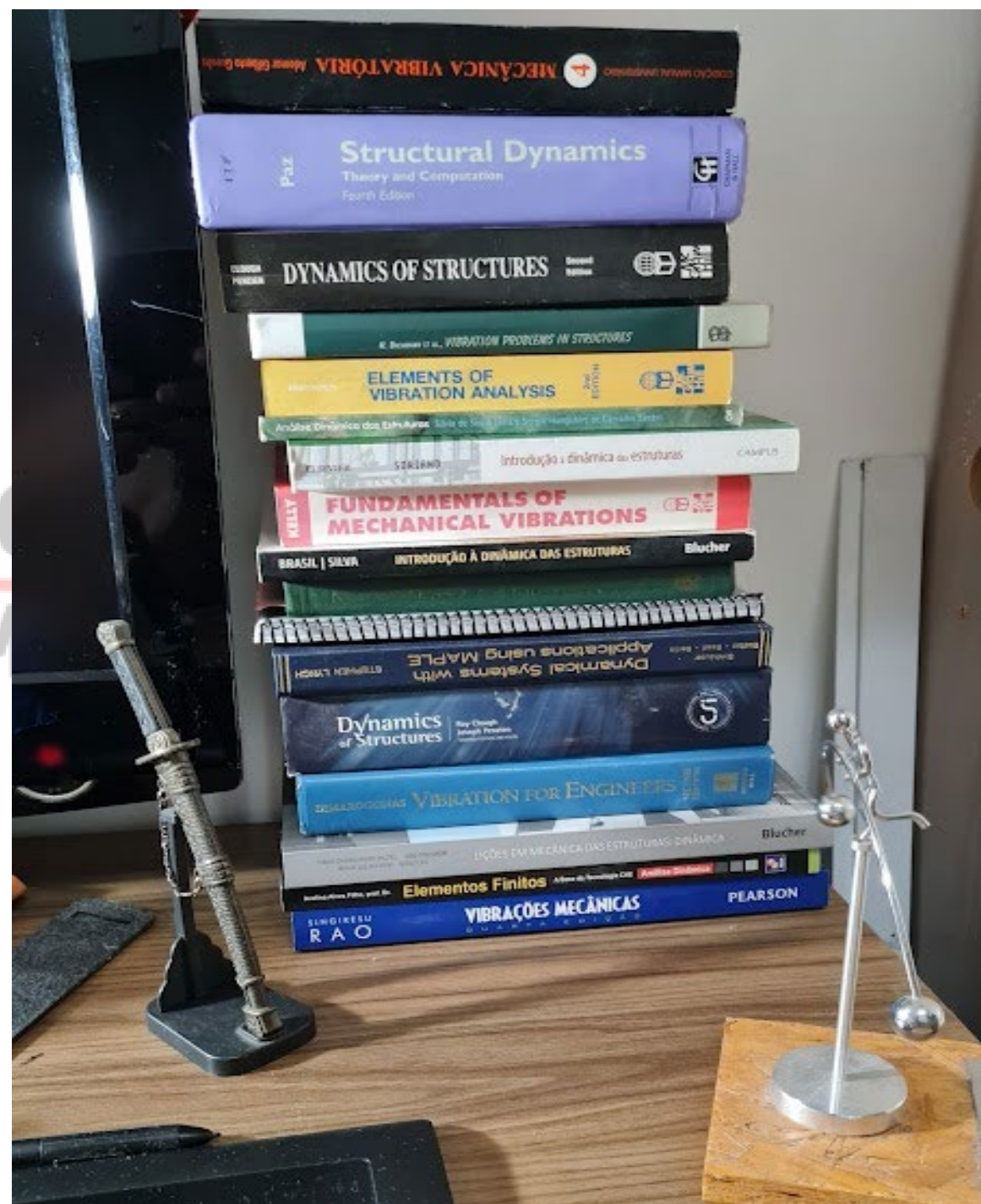


Vibrações em Pavimentos
Recomendações Técnicas de Projecto

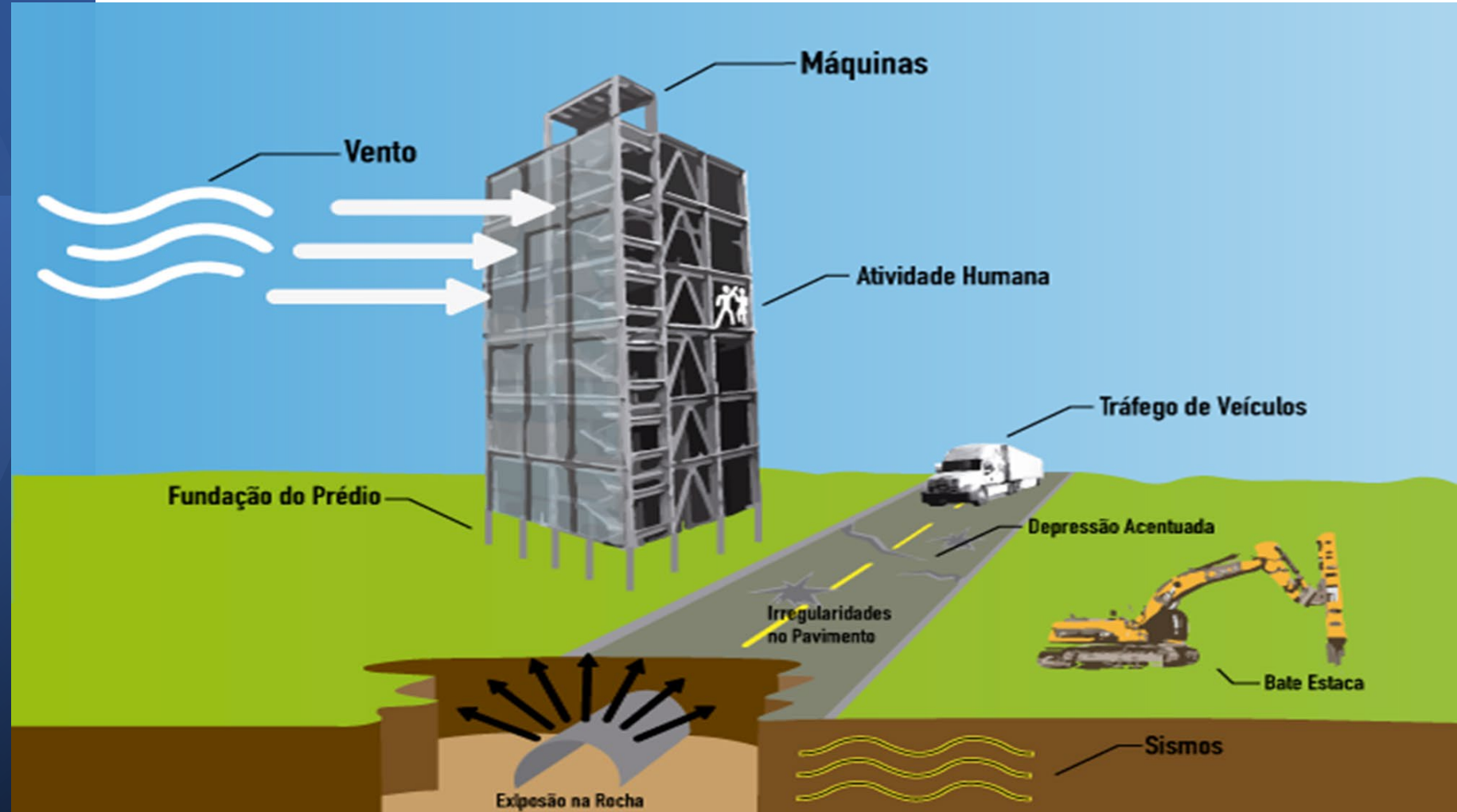




Zacarias Chamberlain 2023

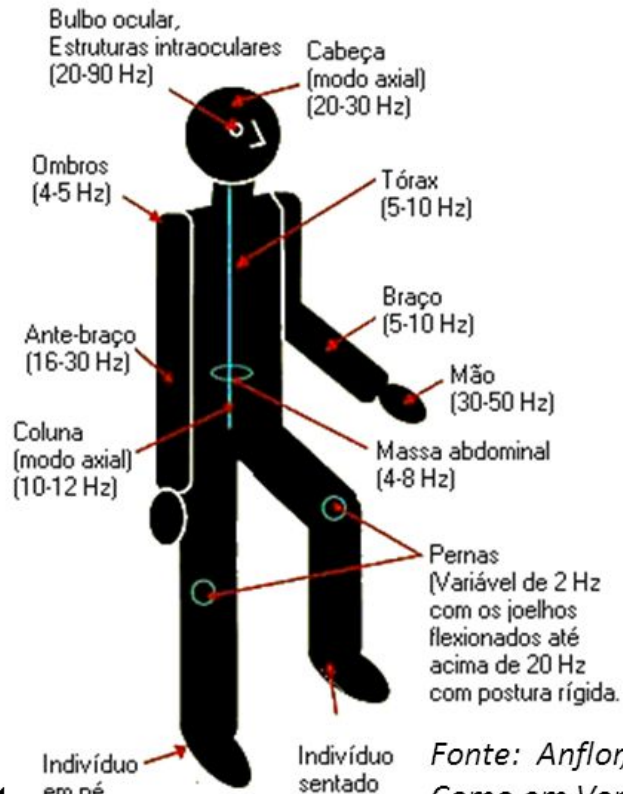


(1) PORQUÊ VIBRAÇÕES?

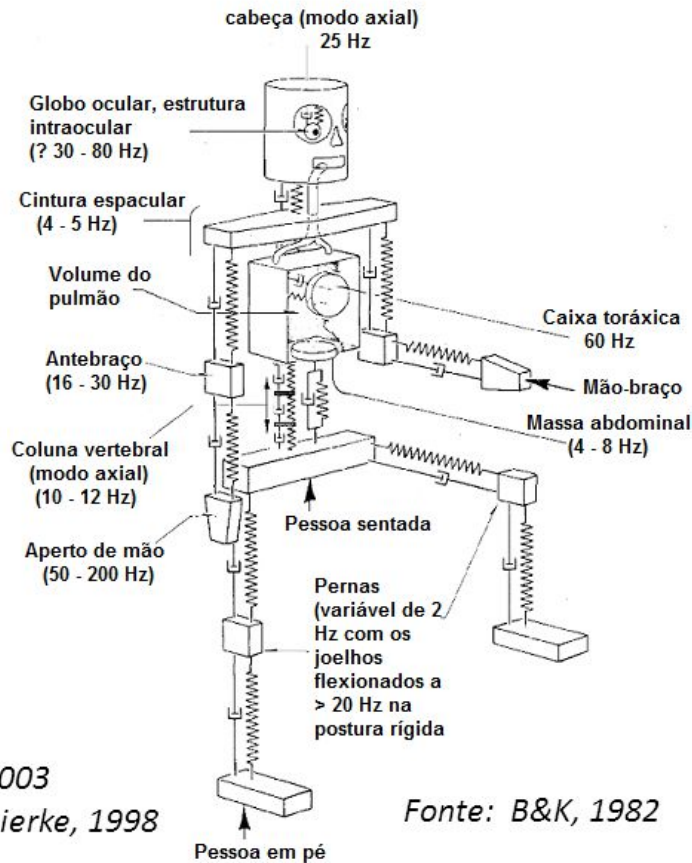


(1) PORQUÊ VIBRAÇÕES?

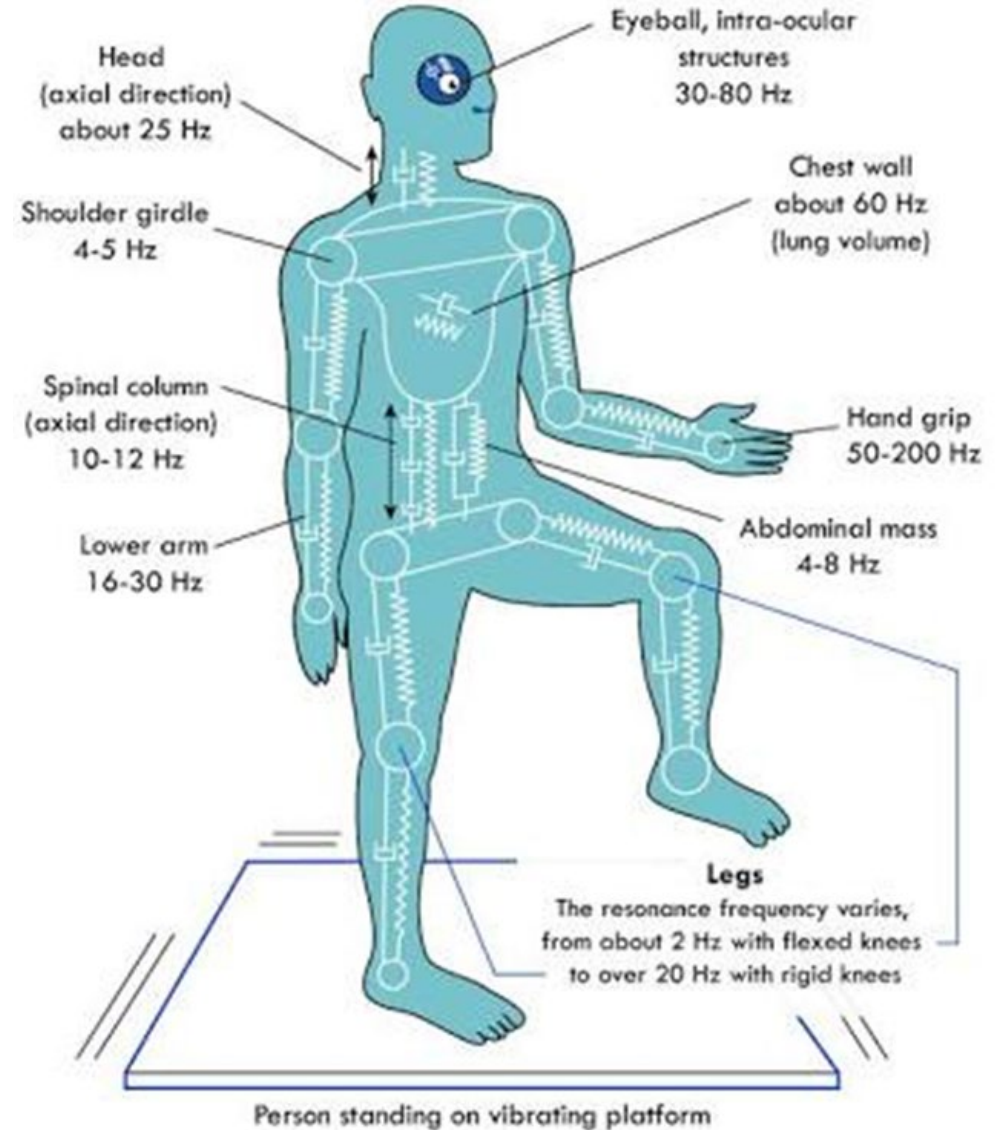
Frequências de Ressonância do Corpo



Fonte: Anflor, 2003
Como em Von Gierke, 1998



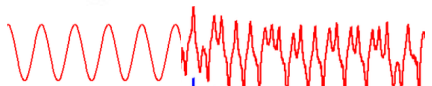
Fonte: B&K, 1982



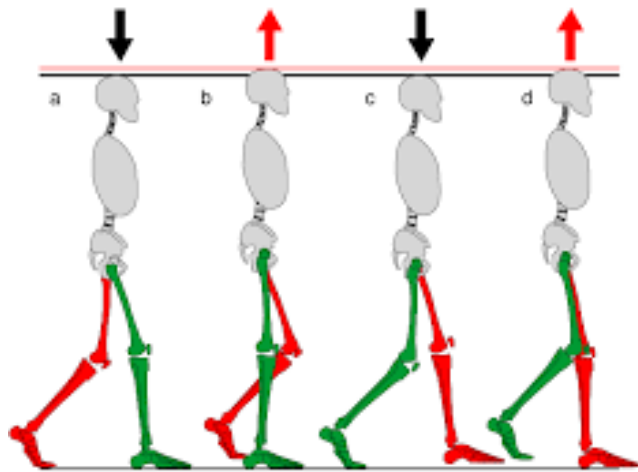
28/02/2012

Profa. Maria Lúcia Duarte, GRAVISH/DEMEC/UFMG

95



Zacarias Chamberlain 2023



Anexo L (normativo)

Vibrações em pisos

L.1 Considerações gerais

L.1.1 O uso de estruturas de pisos com vãos grandes e amortecimento reduzido pode resultar em vibrações que causem desconforto durante as atividades humanas normais ou causar prejuízo ao funcionamento de equipamentos. Para esse estado-limite de serviço, devem-se utilizar as combinações freqüentes de serviço, dadas em 4.7.7.3.3.

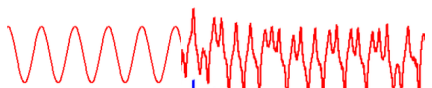
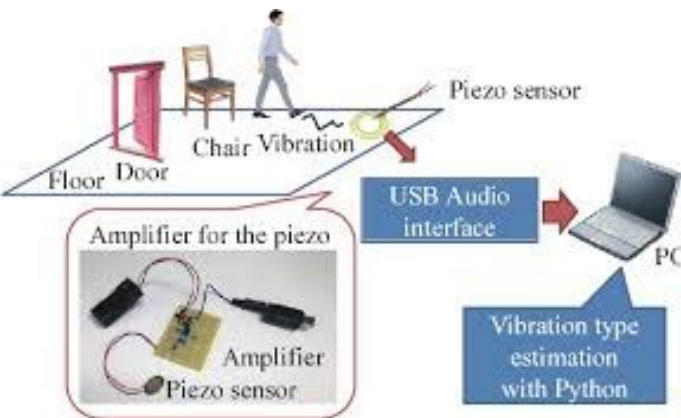
L.1.2 Em nenhum caso a freqüência natural da estrutura do piso pode ser inferior a 3 Hz.

L.2 Avaliação precisa

O problema da vibração em pisos deve ser considerado no projeto da estrutura por meio de análise dinâmica, levando-se em conta pelo menos:

- b) as características e a natureza das excitações dinâmicas, como, por exemplo, as decorrentes do caminhar das pessoas e de atividades rítmicas;
- c) os critérios de aceitação para conforto humano em função do uso e ocupação das áreas do piso;
- d) a freqüência natural da estrutura do piso;
- e) a razão de amortecimento modal;
- f) os pesos efetivos do piso.

Procedimentos para uma avaliação considerada precisa da questão podem ser encontrados em S.4.



Anexo M (normativo)

Vibrações devidas ao vento

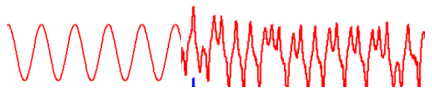


M.1 O movimento causado pelo vento em estruturas de edifícios de andares múltiplos ou outras estruturas similares pode gerar desconforto aos usuários, a não ser que sejam tomadas medidas corretivas na fase de projeto. A principal fonte de desconforto é a aceleração lateral, embora o ruído (ranger da estrutura e assobio do vento) e os efeitos visuais possam também causar sensação desagradável.

M.2 Para uma dada velocidade e direção do vento, o movimento de um edifício, que inclui vibração paralela e perpendicular à direção do vento e torção, pode ser determinado usando a ABNT NBR 6123 ou, quando esta não for aplicável, por análise racional. O movimento pode ainda ser determinado de forma bastante precisa por ensaios em túnel de vento.

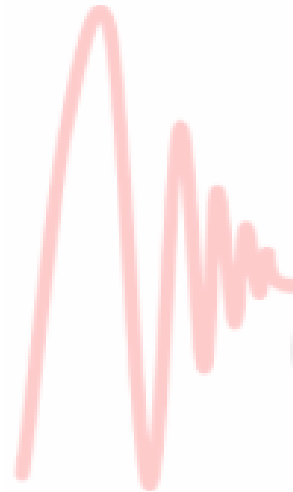
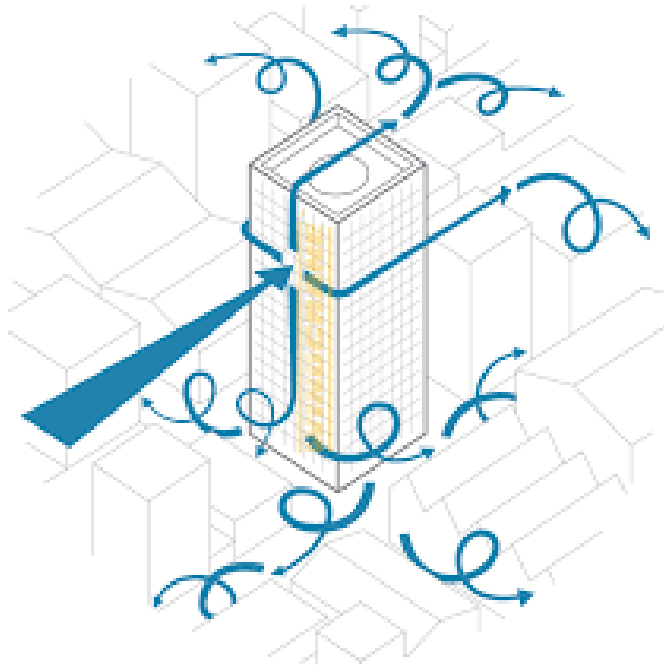
M.3 Nos casos onde o movimento causado pelo vento for significativo, conforme constatação durante o projeto, devem ser aventadas as seguintes providências:

- a) esclarecimento aos usuários que, embora ventos de alta velocidade possam provocar movimentos, o edifício é seguro;
- b) minimização de ruídos, por exemplo, por meio de detalhamento das ligações, de modo a evitar o ranger da estrutura e do projeto das guias de elevadores, de modo a evitar “raspagem” devida ao deslocamento lateral;
- c) minimização da torção, usando arranjo simétrico, contraventamento ou paredes externas estruturais (conceito de estrutura tubular);
- d) possível introdução de amortecimento mecânico para reduzir a vibração causada pelo vento.



9 Efeitos dinâmicos devidos à turbulência atmosférica

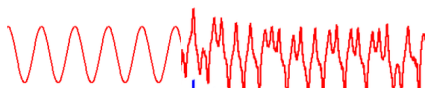
NBR 6123



9.1 Considerações gerais

No vento natural, o módulo e a orientação da velocidade instantânea do ar apresentam flutuações em torno da velocidade média \bar{V} , designadas por rajadas. Admite-se que a velocidade média mantém-se constante durante um intervalo de tempo de 10 min ou mais, produzindo nas edificações efeitos puramente estáticos, designados a seguir como resposta média. Já as flutuações da velocidade podem induzir em estruturas muito flexíveis, especialmente em edificações altas e esbeltas, oscilações importantes na direção da velocidade média, aqui designadas como resposta flutuante.

Em edificações com período fundamental T_1 igual ou inferior a 1 s, a influência da resposta flutuante é pequena, sendo seus efeitos já considerados na determinação do intervalo de tempo adotado para o fator S_2 . Entretanto, edificações com período fundamental superior a 1 s, em particular aquelas fracamente amortecidas, podem apresentar importante resposta flutuante na direção do vento médio. A resposta dinâmica total, igual à superposição das respostas média e flutuante, pode ser calculada de acordo com as especificações deste capítulo. Exemplos de cálculos são apresentados no Anexo I.



23 Ações dinâmicas e fadiga

23.1 Simbologia específica desta seção

De forma a simplificar a compreensão e, portanto, a aplicação dos conceitos estabelecidos nesta Seção, os símbolos mais utilizados, ou que poderiam gerar dúvidas, encontram-se a seguir definidos.

A simbologia apresentada nesta Seção segue a mesma orientação estabelecida na Seção 4. Dessa forma, os símbolos subscritos têm o mesmo significado que os apresentados em 4.3.

f – frequência

f_{crit} – frequência crítica



23.2 Generalidades

As ações dinâmicas podem provocar estados-limites de serviço e estados-limites últimos por vibração excessiva ou por fadiga dos materiais.

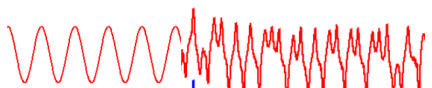
23.3 Estado-limite de vibrações excessivas

A análise das vibrações pode ser feita em regime linear no caso das estruturas usuais.

Para assegurar comportamento satisfatório das estruturas sujeitas a vibrações, deve-se afastar o máximo possível a frequência própria da estrutura (f) da frequência crítica (f_{crit}), que depende da destinação da respectiva edificação. A condição abaixo deve ser satisfeita:

$$f > 1,2 f_{\text{crit}}$$

Quando a ação crítica é originada por uma máquina, a frequência crítica passa a ser a da operação da máquina. Nesse caso, pode não ser suficiente afastar as duas frequências, própria e crítica. Principalmente quando a máquina é ligada, durante o seu processo de aceleração, é usualmente necessário aumentar a massa ou o amortecimento da estrutura para absorver parte da energia envolvida.



NBR 6118

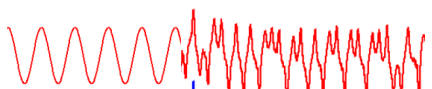
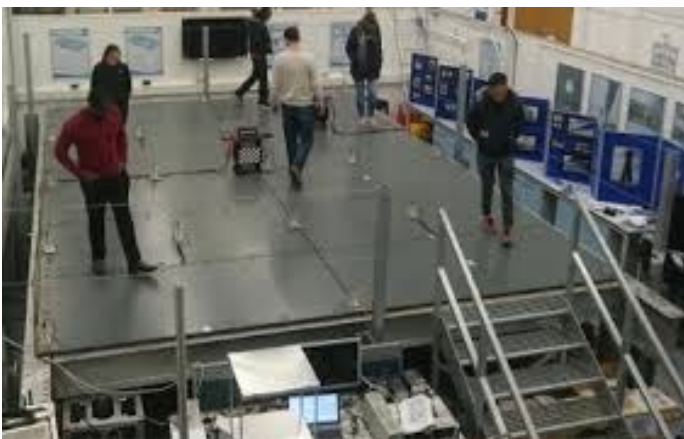
Nos casos especiais, em que as prescrições anteriores não puderem ser atendidas, deve ser feita uma análise dinâmica mais acurada, conforme estabelecido em Normas Internacionais, enquanto não existir Norma Brasileira específica.

Na falta de valores determinados experimentalmente, podem ser adotados os valores indicados na Tabela 23.1 para f_{crit} .



Tabela 23.1 – Frequência crítica para vibrações verticais para alguns casos especiais de estruturas submetidas a vibrações pela ação de pessoas

Caso	f_{crit} Hz
Ginásio de esportes e academias de ginástica	8,0
Salas de dança ou de concerto sem cadeiras fixas	7,0
Passarelas de pedestres ou ciclistas	4,5
Escritórios	4,0
Salas de concerto com cadeiras fixas	3,5



Conforto de passarelas sujeitas a vibrações produzidas pelo caminhar das pessoas

NBR 7187:2021



C.1 Generalidades

Um estado limite de uso em passarelas é produzido pelo caminhar das pessoas. A excitação dessa atividade pode produzir vibrações indesejadas seja para aumentar as ações, como também produzir desconforto aos usuários no sentido vertical e lateral.

Este anexo apresenta uma metodologia para cálculo e verificação da aceleração máxima considerando o caminhar de pessoas.

Se necessário podem ser usadas metodologias da dinâmica de estruturas para estudos mais detalhados, nesse caso devem ser realizadas medições das frequências naturais em campo antes de colocar em operação a passarela.

C.2 Cálculo e verificação de máxima aceleração vertical e horizontal

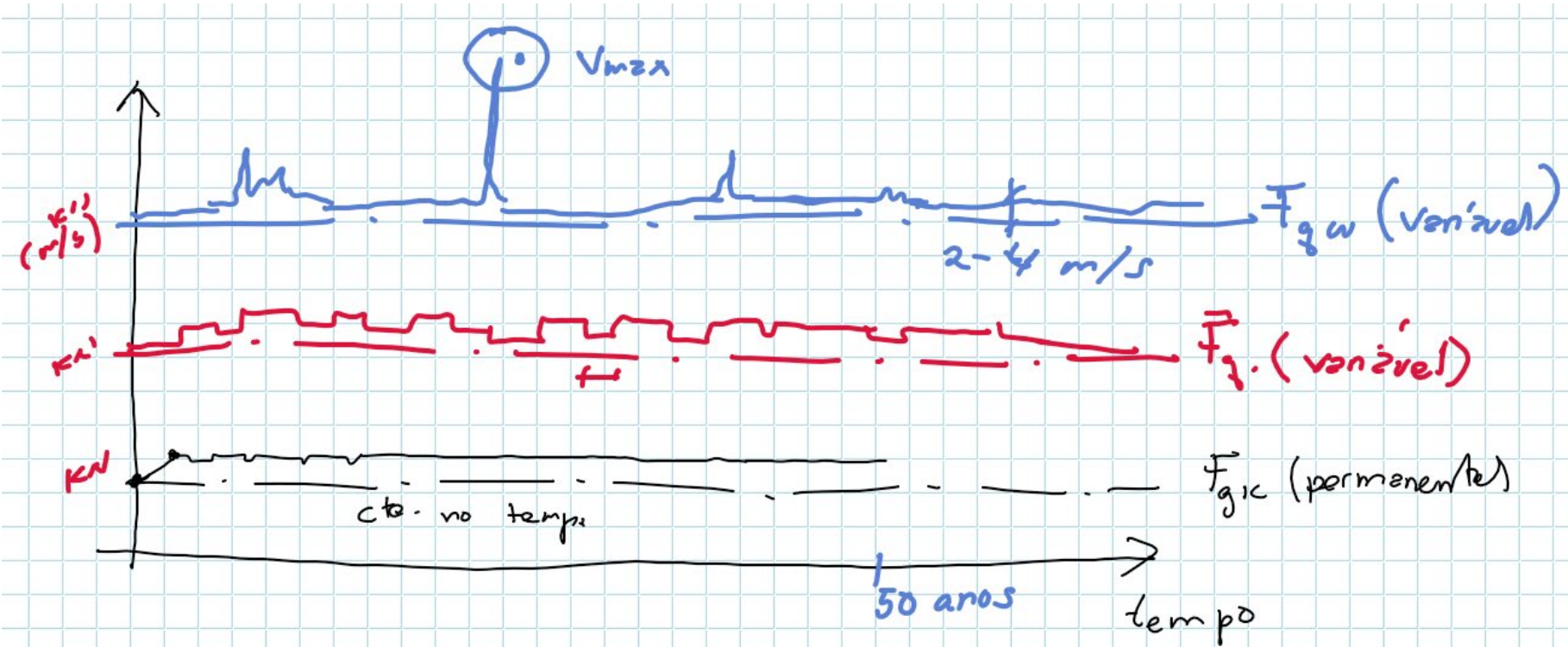
Para o cálculo da aceleração máxima vertical em função da quantidade de pessoas trafegando pela passarela, serão usados os seguintes dados:

Massa de cada pedestre de média de 75 kg e desvio padrão de 13 kg;

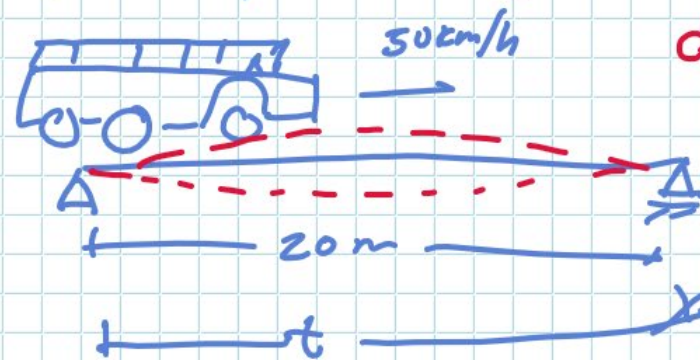
Fator das forças induzidas lateralmente de média 0,0378 e desvio padrão 0,0144 (adimensional).

A aceleração máxima é expressa por:

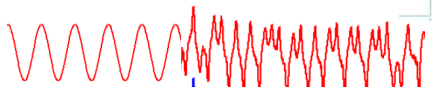
$$a_{max} = K_{a,95\%} \frac{d \cdot L \cdot b}{M_i} \sqrt{C \cdot K_f^2 \cdot K_1 \varepsilon^{K_2}}$$

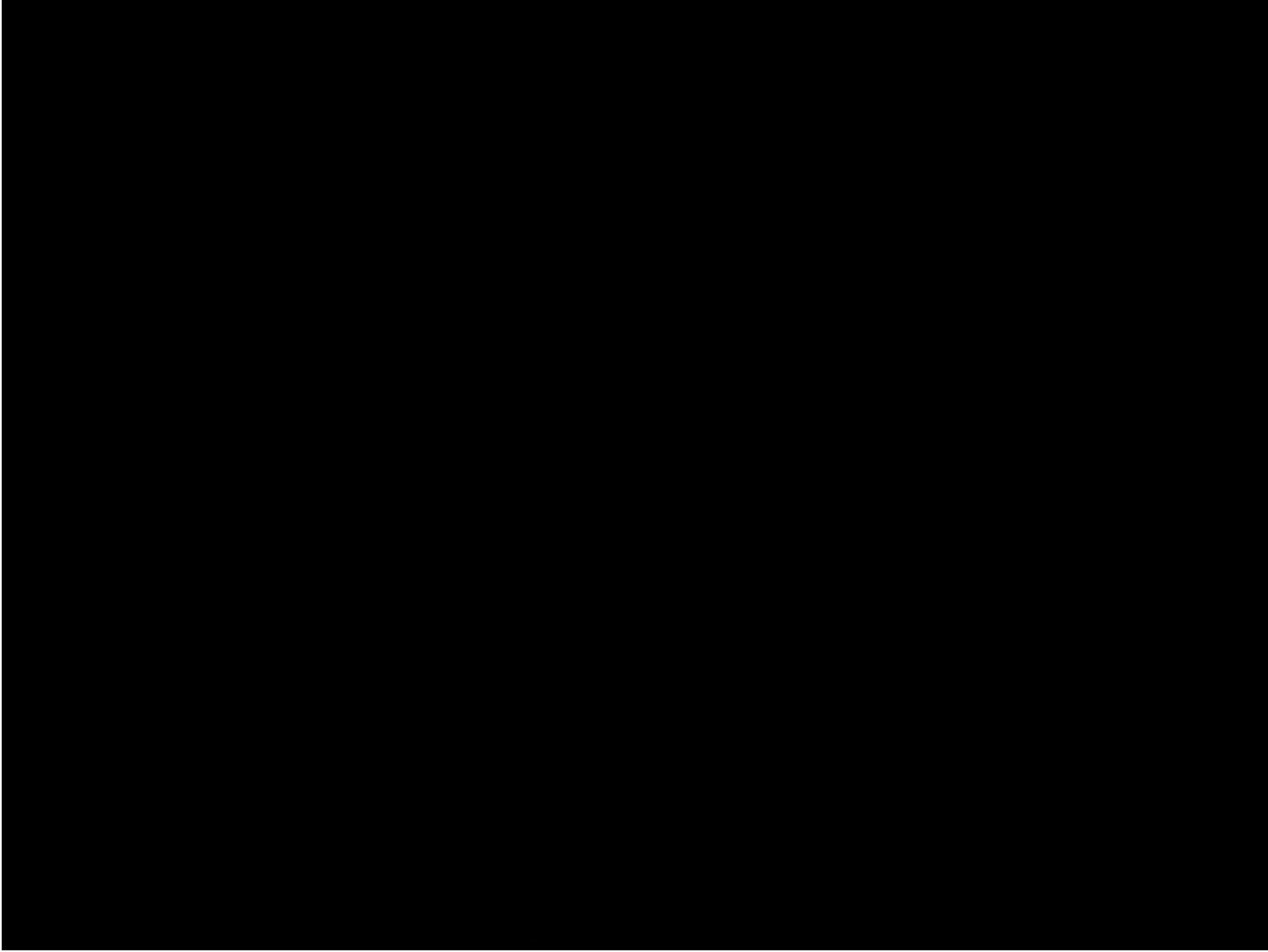


Pouca variação no tempo.

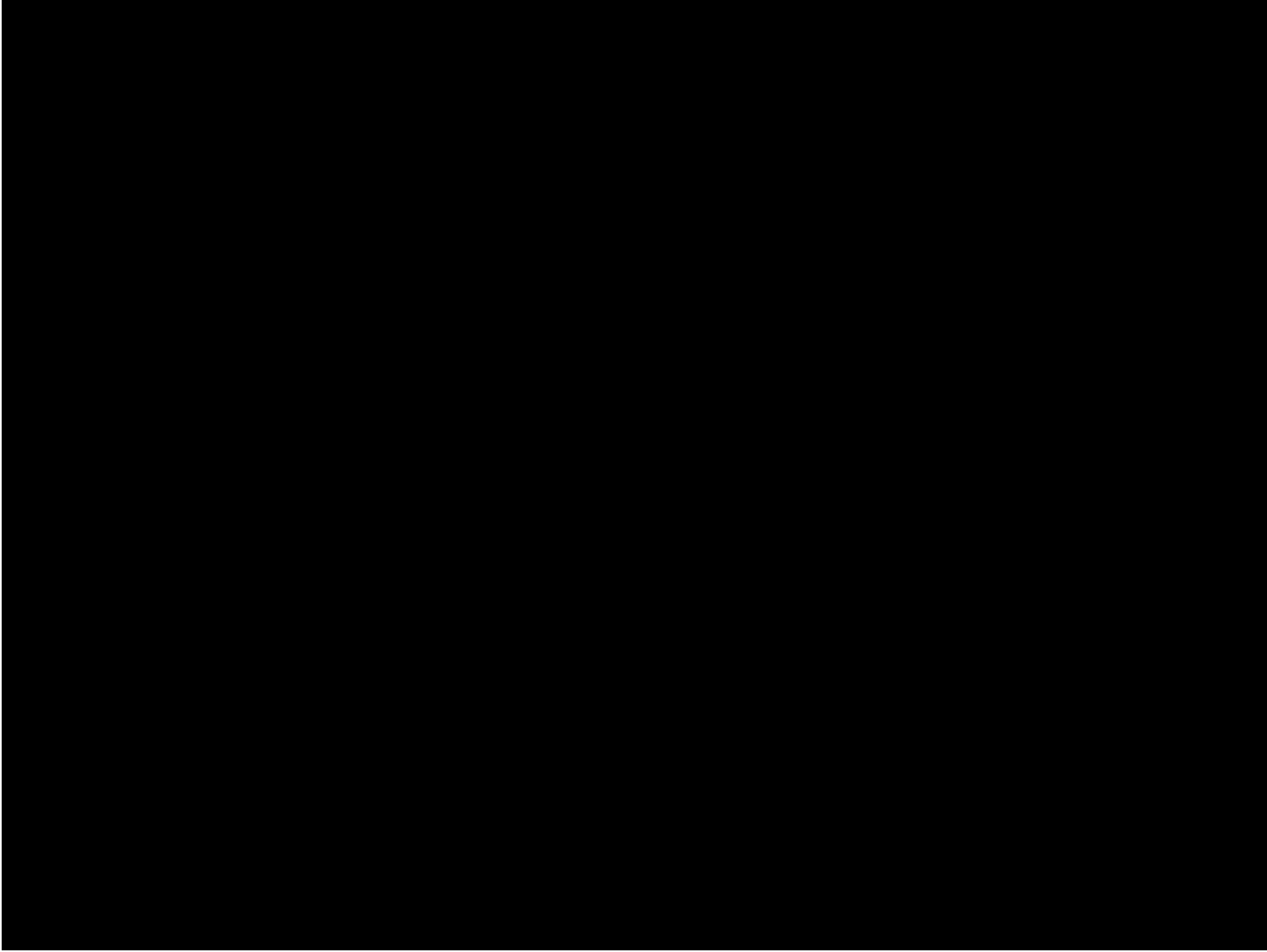


dinâmicas (amplificação ou atenuação)













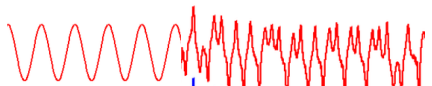


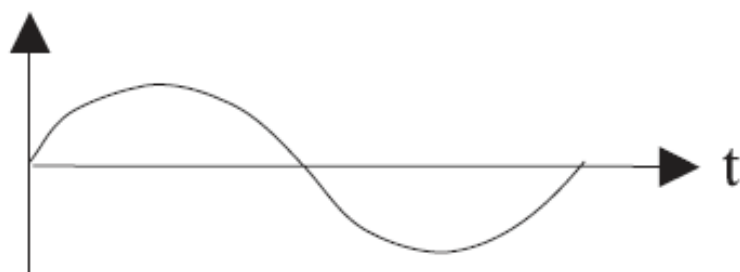
Teste Palmeiras com Pessoas

<https://globoplay.globo.com/v/3383084/>

Teste Corinthians com excitador

<https://globoplay.globo.com/v/2552657/>





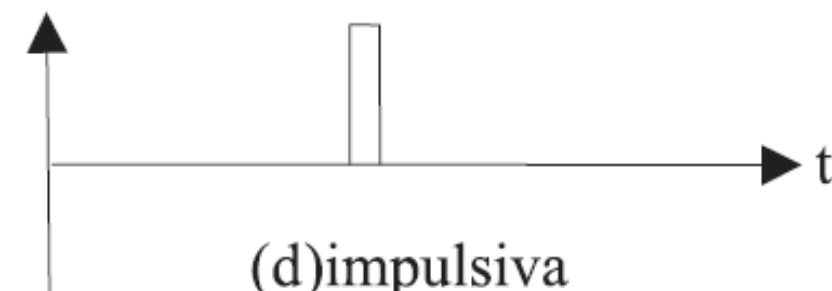
(a) harmônica



(c) transiente

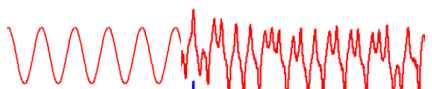


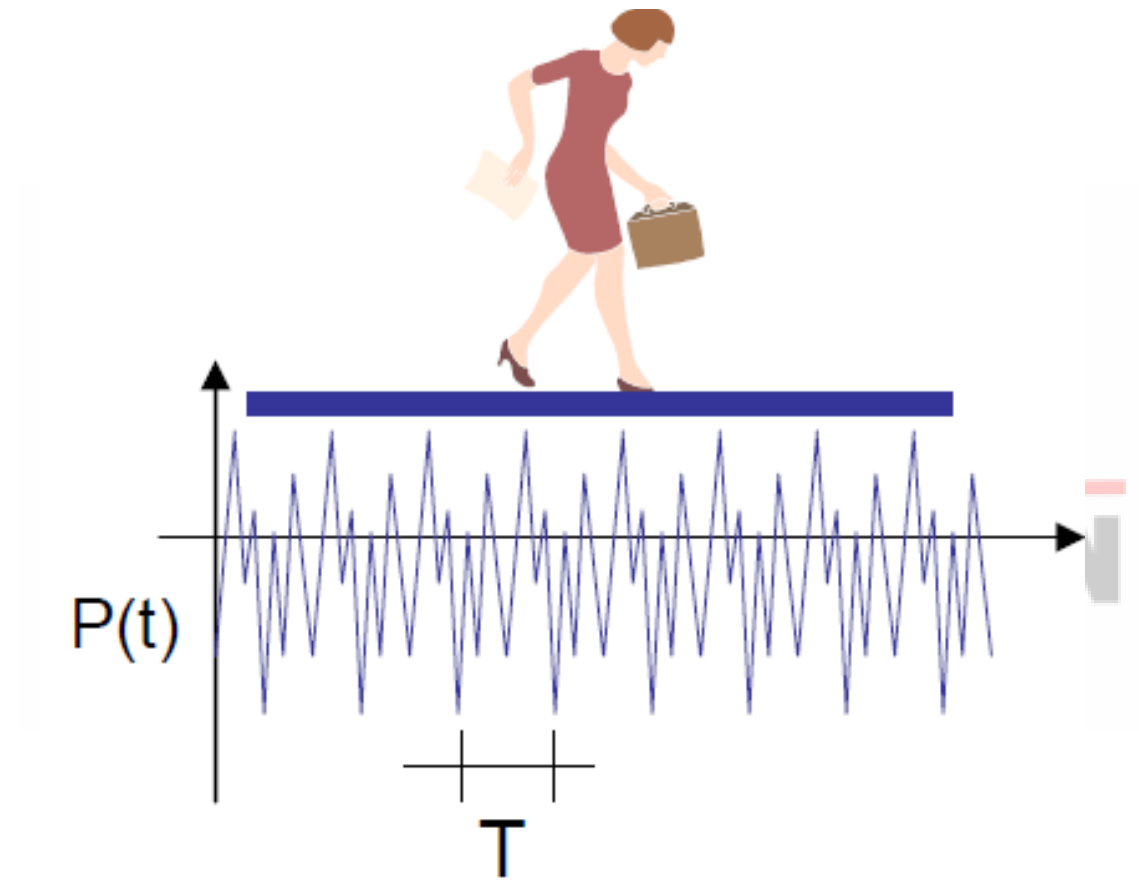
(b) periódica

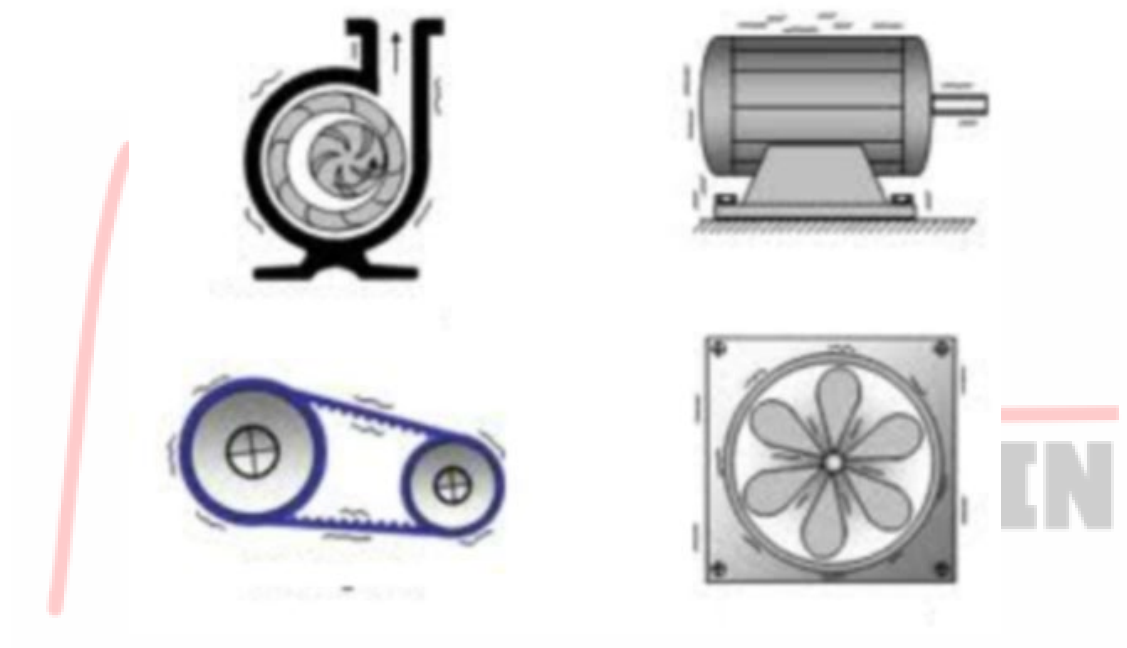


(d) impulsiva

TIPOS DE CARGAS DINÂMICAS

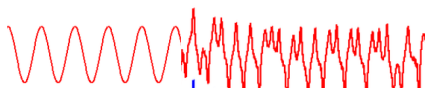
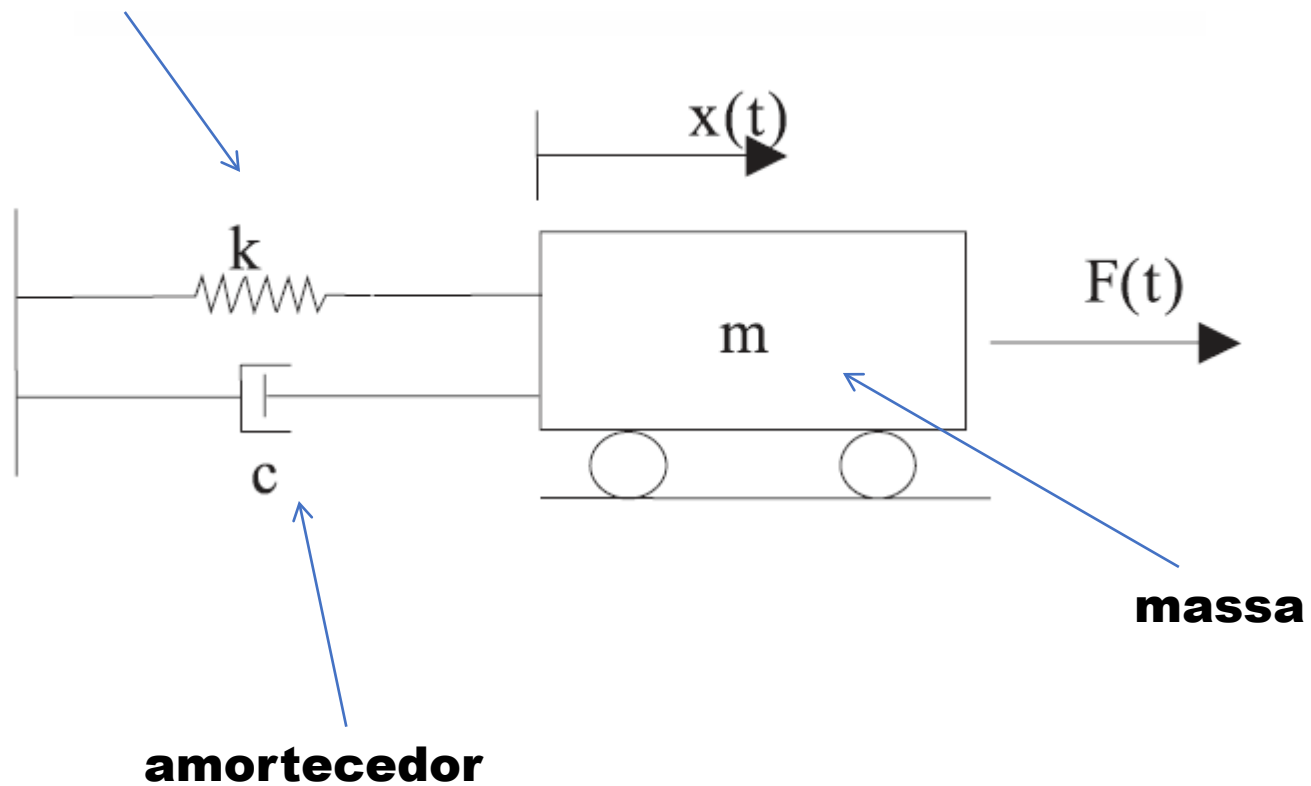




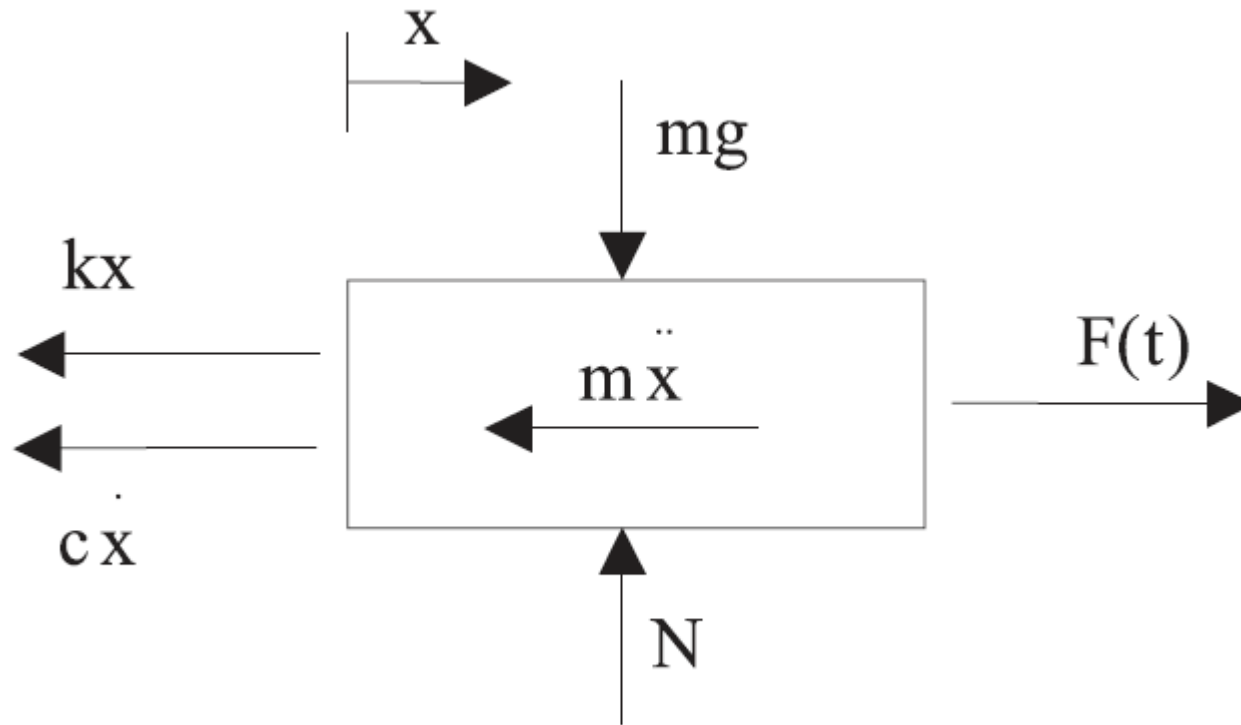


(1) SISTEMAS DE 1 GRAU DE LIBERDADE

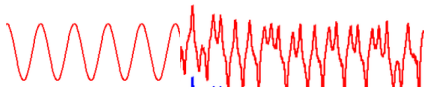
mola(rigidez)

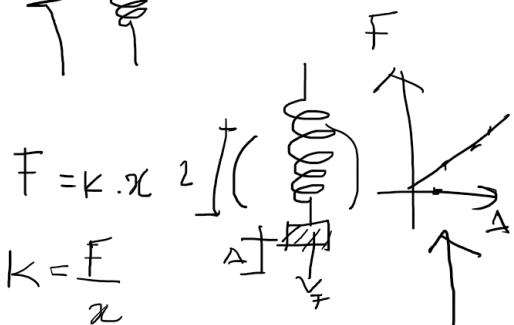
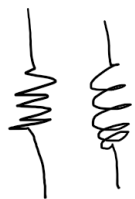
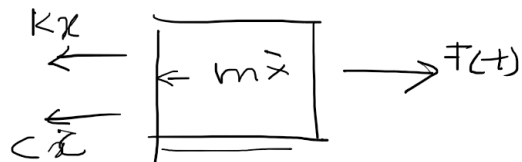


(1) SISTEMAS DE 1 GRAU DE LIBERDADE



$$m \ddot{x}(t) + c \dot{x}(t) + kx(t) = F(t)$$





$$k = \frac{F}{x}$$

$$k = \frac{F}{L} = \# L^{-1}$$

$$k = \frac{N}{mm}$$

$$\sigma = E \cdot \epsilon$$

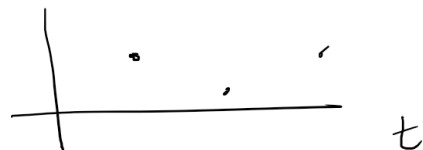
$$\frac{P}{A} = E \cdot \frac{\delta}{L}$$

$$\delta = \frac{PL}{EA}$$

$$F = k \cdot x$$

$$x = \frac{F L}{EA}$$

$$F = \frac{EA}{L} x$$



$$x(t)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = v = \dot{x}$$

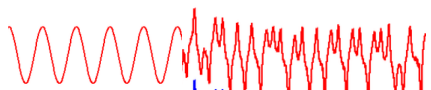
$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = a = \ddot{x}$$

EQ. DINÁMICA

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$$



EQ. ESTÁTICA



$$1^\circ \quad m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$$

Vibração Livre sem amortecimento

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$x = A \sin(\omega \cdot t)$$

$$\dot{x} = A \omega \cos(\omega t)$$

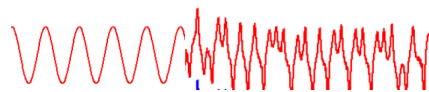
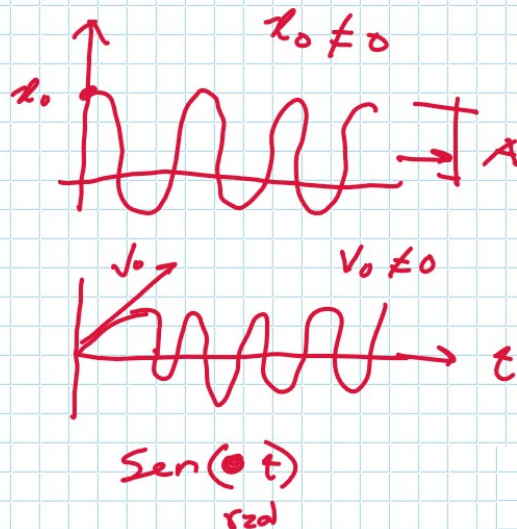
$$\ddot{x} = -A \omega^2 \sin(\omega t)$$

$$-A \omega^2 \sin(\omega t) + \frac{k}{m} A \sin(\omega t) = 0$$

$$-\omega^2 + k/m = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

freq. angular



$$K_{\text{axial}} = \frac{EA}{L} = \frac{F \cdot L^2}{L} = \frac{F}{L}$$

Análise dimensional

$$\begin{matrix} F & (N, kN) & F \\ A & (mm^2, cm^2, m^2) & L^2 \end{matrix}$$

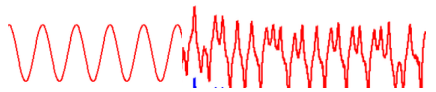
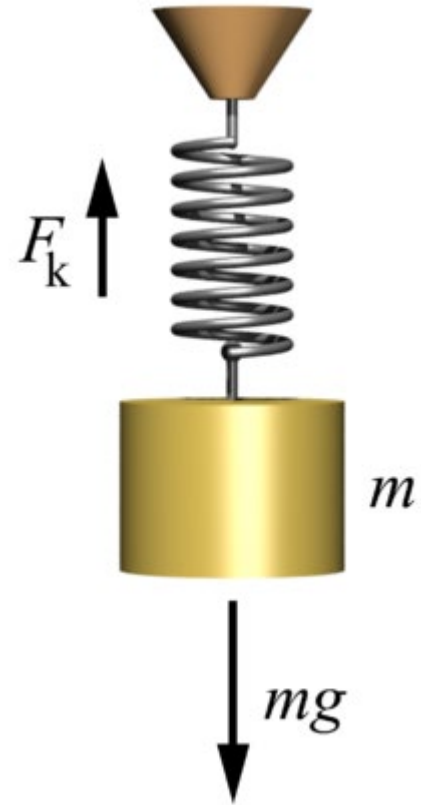
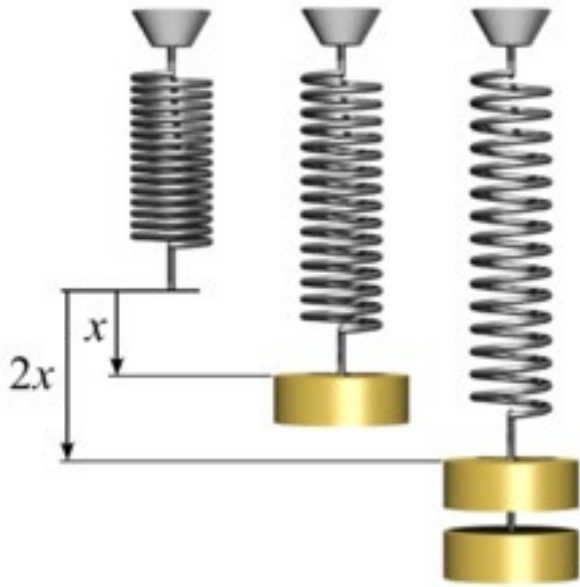
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{F/L}{F \cdot L^2/L}} = \sqrt{\frac{1}{t^2}}$$

$$F = m \cdot g = m \cdot \frac{L}{t^2}$$

$$g \rightarrow L/t^2 \quad m = \frac{F \cdot t^2}{L}$$

$\omega = \text{radianos}/s$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\text{Rad/s}}{\text{Rad}} = \frac{1}{s} \rightarrow \text{Hertz} \quad H_z$$



(1) SISTEMAS DE 1 GRAU DE LIBERDADE

VIBRAÇÃO LIVRE

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Frequência
Circular

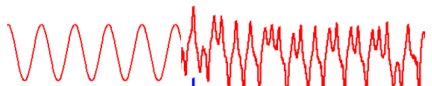
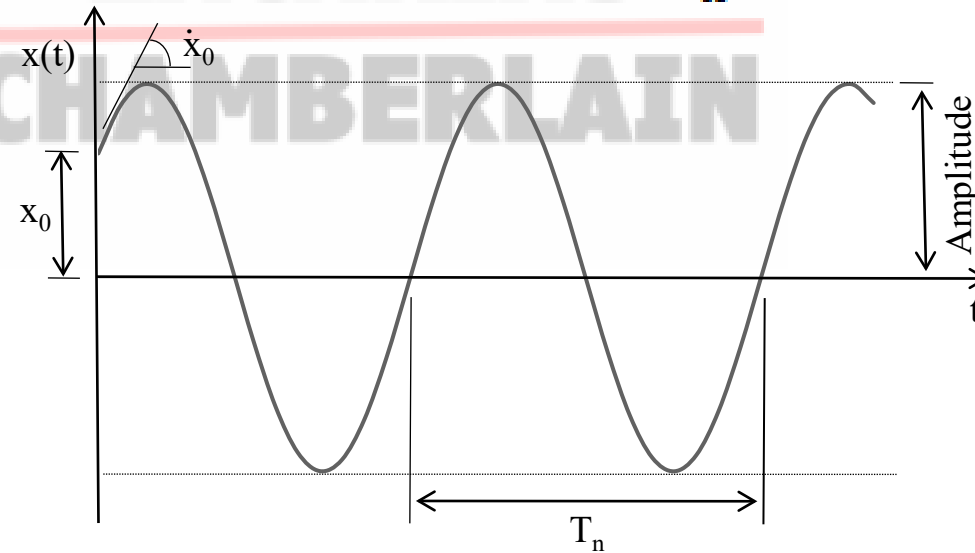
$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n}$$

Período
Natural

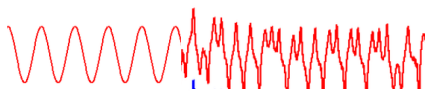
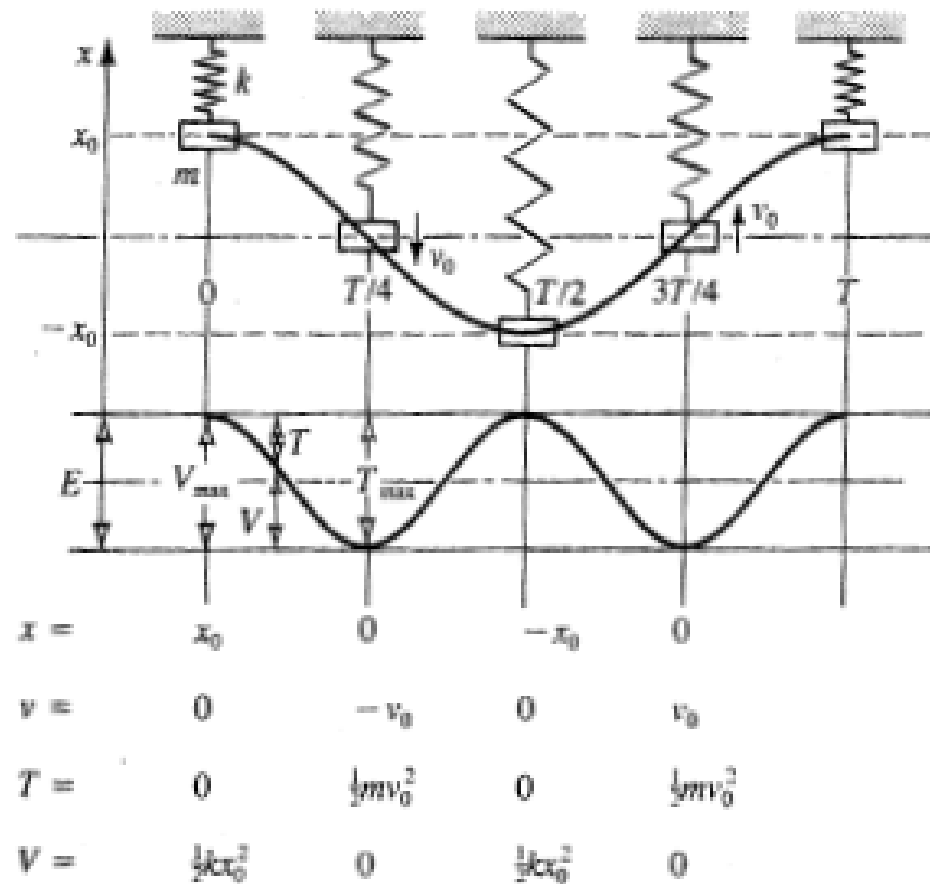
$$f_n = \frac{1}{T_n} = \frac{\omega_n}{2\pi}$$

Frequência
Natural

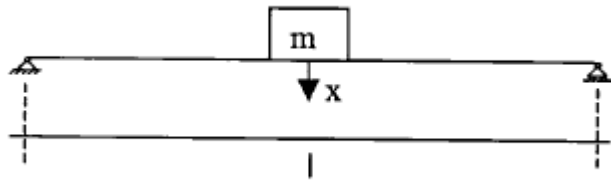
$$x(t) = x_0 \cos(\omega_n t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin(\omega_n t)$$



O oscilador não amortecido mostrado na figura tem uma amplitude x_0 .
 A posição mostra um ciclo inteiro com quatro tempos de $T/4$,
 a equação de movimento é dada por $X = x_0 \cos(\omega t)$.



Exemplo V1 – Determinar a frequência natural da viga simplesmente apoiada com vão de 6000mm, supondo sua seção central com um equipamento com massa de 760 kg, e será desconsiderado por agora o peso próprio dela. A viga é um perfil W360x44, Módulo de elasticidade do ao segundo a ABNT NBR 8800.



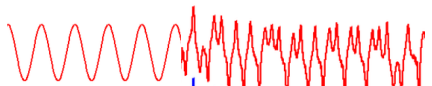
$$k = \frac{P}{\delta} = \frac{48EI}{l^3}$$

$$\delta = (7.45 \text{ kN})(600 \text{ cm})^3 / (48 \cdot 20000 \text{ kN/cm}^2 \cdot 12100 \text{ cm}^4) = 0.1385 \text{ cm}$$

$$K = P / \delta = 7.450 \text{ N} / 0,0014 \text{ m} = 5377777,7 \text{ N/m} = 5,37 \times 10^6 \text{ N/m}$$

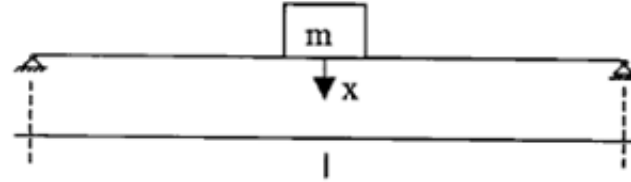
$$\omega = (k/m)^{(1/2)} = [(5377777,7 \text{ N/m}) / (760 \text{ kg})]^{(1/2)} = 84,12 \text{ rad/s}$$

$$f = \omega / (2\pi) = 13,38 \text{ Hz}$$



Exemplo V1 – Determinar a frequência natural da viga simplesmente apoiada com vão de 6000mm, supondo sua seção central com um equipamento com massa de 760 kg, e será desconsiderado por agora o peso próprio dela. A viga é um perfil W360x44, Módulo de elasticidade do ao segundo a ABNT NBR 8800.

Zacarias Chamberlain, DSc., 2021



$$m := 760 \text{ kg}$$

$$L_x := 6000 \text{ mm} \quad \text{W360x44}$$

$$m_v := 44 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$$

$$mva := m + \frac{m_v \cdot L_x}{2}$$

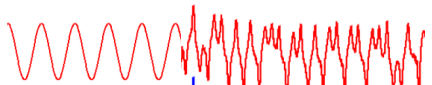
$$E_s := 200000 \text{ MPa} \quad I_x := 12100 \text{ cm}^4$$

$$K_s := \frac{48 \cdot E_s \cdot I_x}{L_x^3} = 5,38 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

+

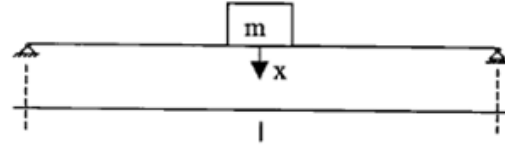
$$\omega := \sqrt{\frac{K_s}{m}} = 84,12 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$f := \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = 13,39 \text{ Hz}$$



Exemplo V1 – Determinar a frequência natural da viga simplesmente apoiada com vão de 6000mm, supondo sua seção central com um equipamento com massa de 760 kg, e será desconsiderado por agora o peso próprio dela. A viga é um perfil W360x44, Módulo de elasticidade do ao segundo a ABNT NBR 8800.

Zacarias Chamberlain, DSc., 2021



$$m := 760 \text{ kg}$$

$$L_x := 6000 \text{ mm} \quad W360x44$$

$$E_s := 200000 \text{ MPa} \quad I_x := 12100 \text{ cm}^4$$

$$m_v := 44 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$$

$$mva := m + \frac{m_v \cdot L_x}{2}$$

$$Ks := \frac{48 \cdot E_s \cdot I_x}{L_x^3} = 5,38 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$\omega := \sqrt{\frac{Ks}{m}} = 84,12 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

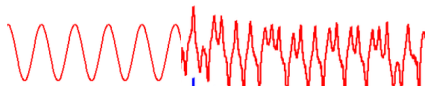
$$f := \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = 13,39 \text{ Hz}$$

+

Se adicionar a masa da viga...

$$\omega_{mva} := \sqrt{\frac{Ks}{mva}} = 77,65 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$f_{mva} := \frac{\omega_{mva}}{2 \cdot \pi} = 12,36 \text{ Hz}$$



Zacarias Chamberlain 2023

OBTENDO PERÍODOS E MODOS DE VIBRAÇÃO

SOFTWARES (MASTAN2)

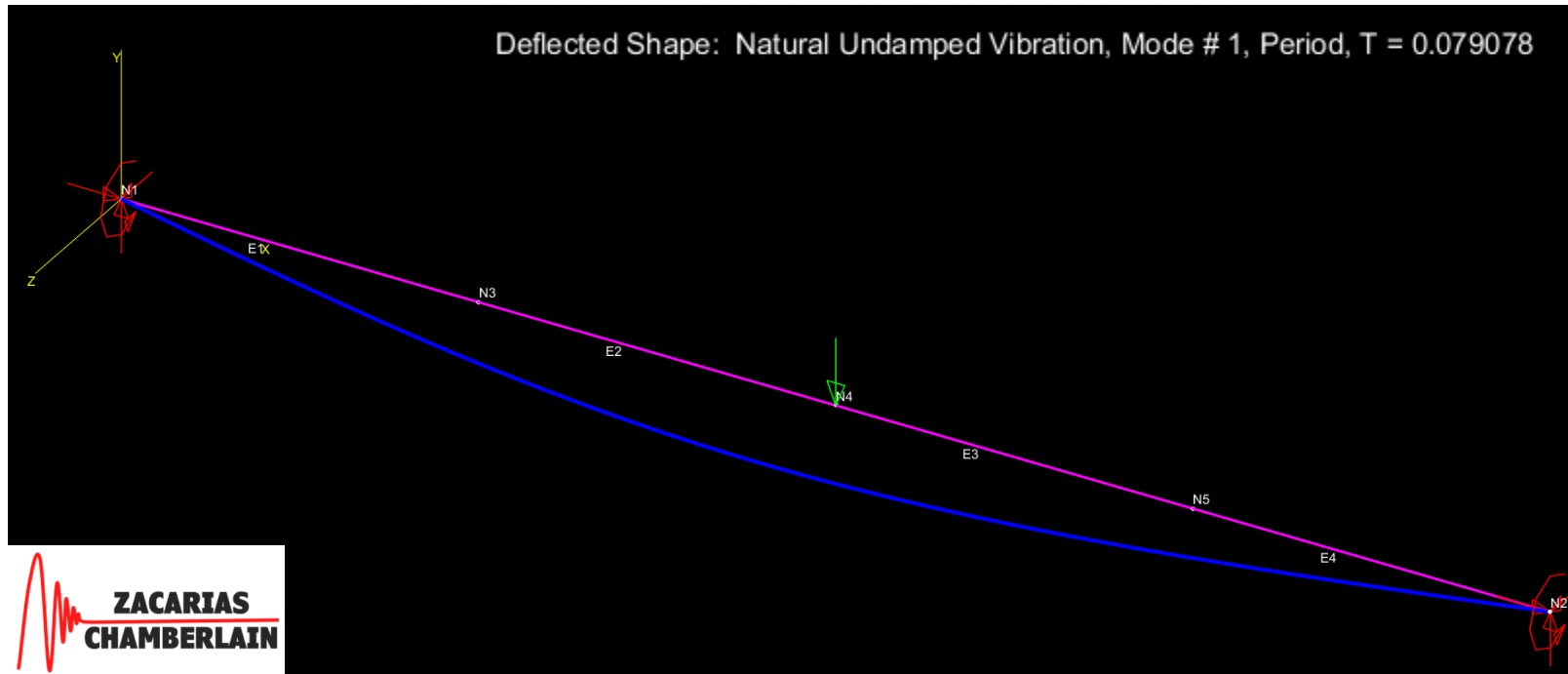
$$T = 0,07469 \text{ s}$$

$$f = 1/T$$

$$f = 13,38 \text{ Hz}$$

Dif. Relat.

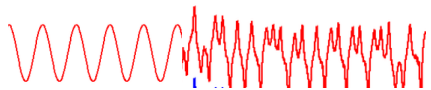
2%



$$L = 6000\text{mm}$$

$$W360x44 \quad A = 57.7 \text{ cm}^2, I = 12000\text{cm}^4$$

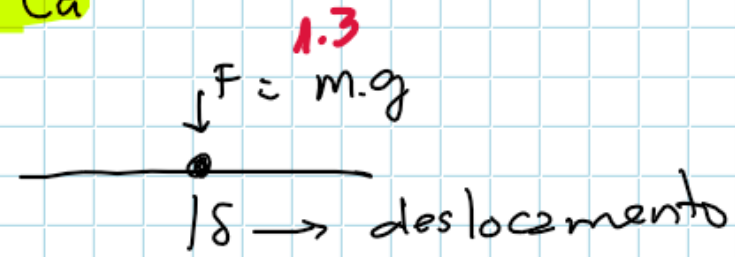
$$E = 200\,000 \text{ Mpa} \quad (20\,000 \text{ kN/cm}^2)$$



Zacarias Chamberlain 2021

Uma conclusão "prática"

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$



$$F = k \cdot \delta$$

$$1.3 mg = k \cdot \delta$$

$$\frac{1.3 g}{\delta} = \frac{k}{m}$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1.3 g}{\delta}}$$

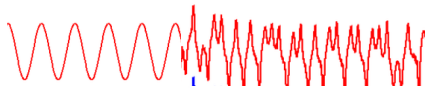
$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1.3 (9810 \text{ mm/s}^2)}{\delta (\text{mm})}}$$

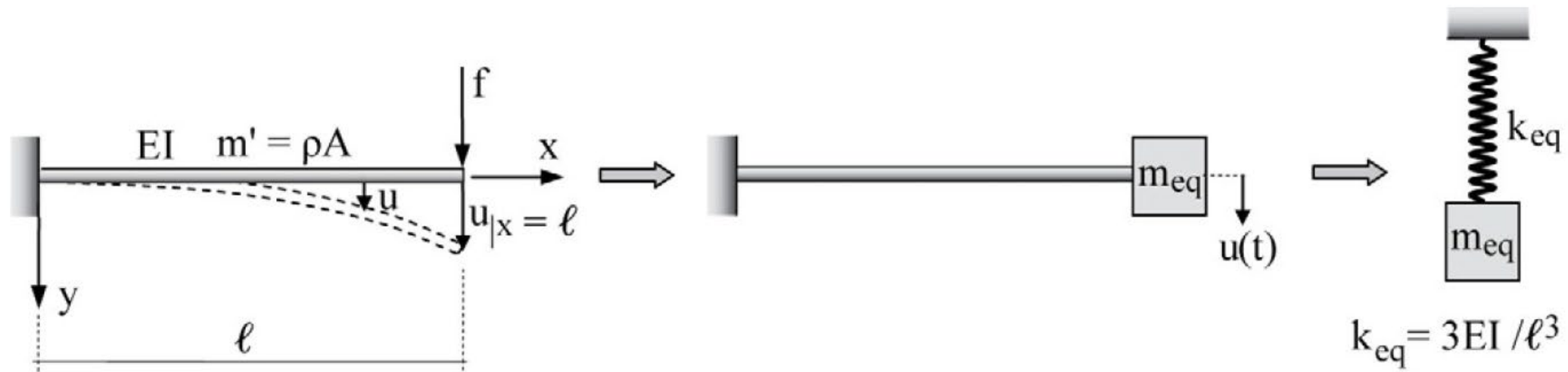
Se considerar 30% para
adicionar um pouco da
acidental

$$f = \frac{17.97}{\sqrt{\delta (\text{mm})}}$$

$$f \approx \frac{18}{\sqrt{\delta}}$$

Em mm





$$l = 5000 \text{ mm}$$

$$E = 200.000 \text{ N/mm}^2$$

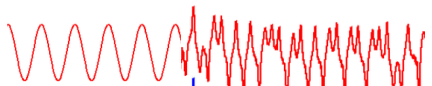
$$I = 12100 \text{ cm}^4$$

$$W360 \times 44$$

$$f = \underline{250} \text{ kg} \times 9,81 \text{ m/s}^2 = 2452,5 \text{ N} = 2,45 \text{ kN}$$

$$\delta = \frac{f \cdot l^3}{3EI} \rightarrow K = \frac{f}{\delta} = \frac{3EI}{l^3} =$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} =$$



Exemplo 1.3: Seja o pórtico plano mostrado na Figura E1.2, onde supõe-se que a viga tem propriedades de rigidez axial e de flexão infinitas, as colunas não têm deformação axial e a massa é considerada concentrada ao nível da viga. Nestas condições o único deslocamento possível é na direção x . Sendo as colunas de concreto, com módulo de elasticidade $E=30$ GPa e seção transversal com momento de inércia $I=19175\text{cm}^4$, pede-se calcular a frequência natural. Considerar a massa total $m = 36000$ kg concentrada no topo do andar. o vão l igual a 6.0m e a altura do andar h igual a 3.0 m.

Ao se impor um deslocamento ao topo do andar, as duas colunas terão deslocamentos iguais. Assim sendo a constante de mola do sistema é igual a soma das constantes de mola das duas colunas, formando um sistema de molas em paralelo. Como a viga é suposta infinitamente rígida, as colunas são consideradas bi-engastadas, sendo a constante de mola de cada uma dada por:

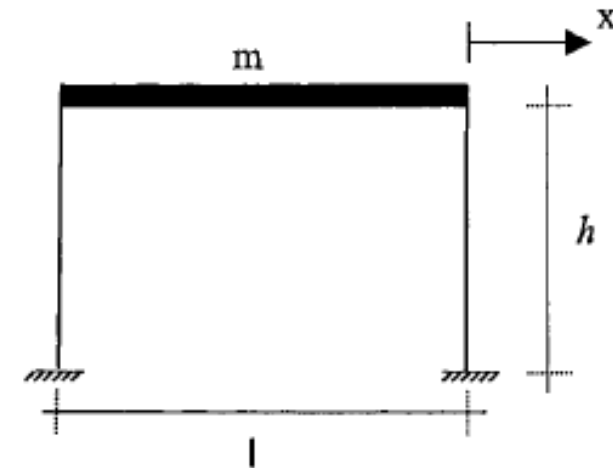
$$k_c = \frac{12EI}{h^3} = 2,557 \cdot 10^6 \text{ (N/m)}$$

Logo, a constante de mola do sistema é dada por:

$$k = 2 \cdot 2,557 \cdot 10^6 = 5,113 \cdot 10^6 \text{ (N/m)}$$

Para a frequência natural tem-se:

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{5,113 \cdot 10^6}{36000}} = 1,897 \text{ Hz}$$



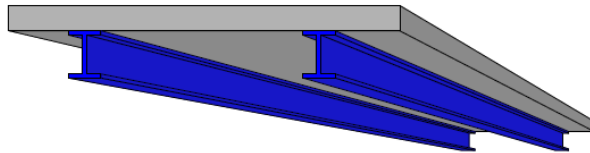
RFS2-CT-2007-00033



Filvoss

Human induced Vibrations of Steel Structures

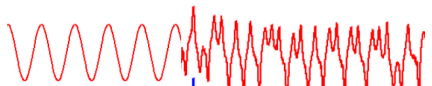
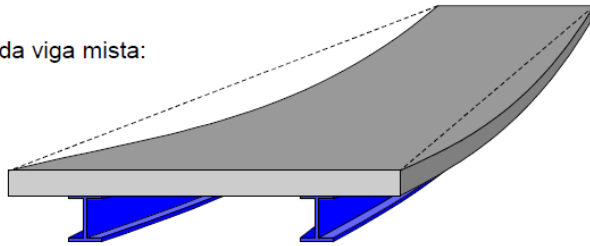
Sistema inicial:



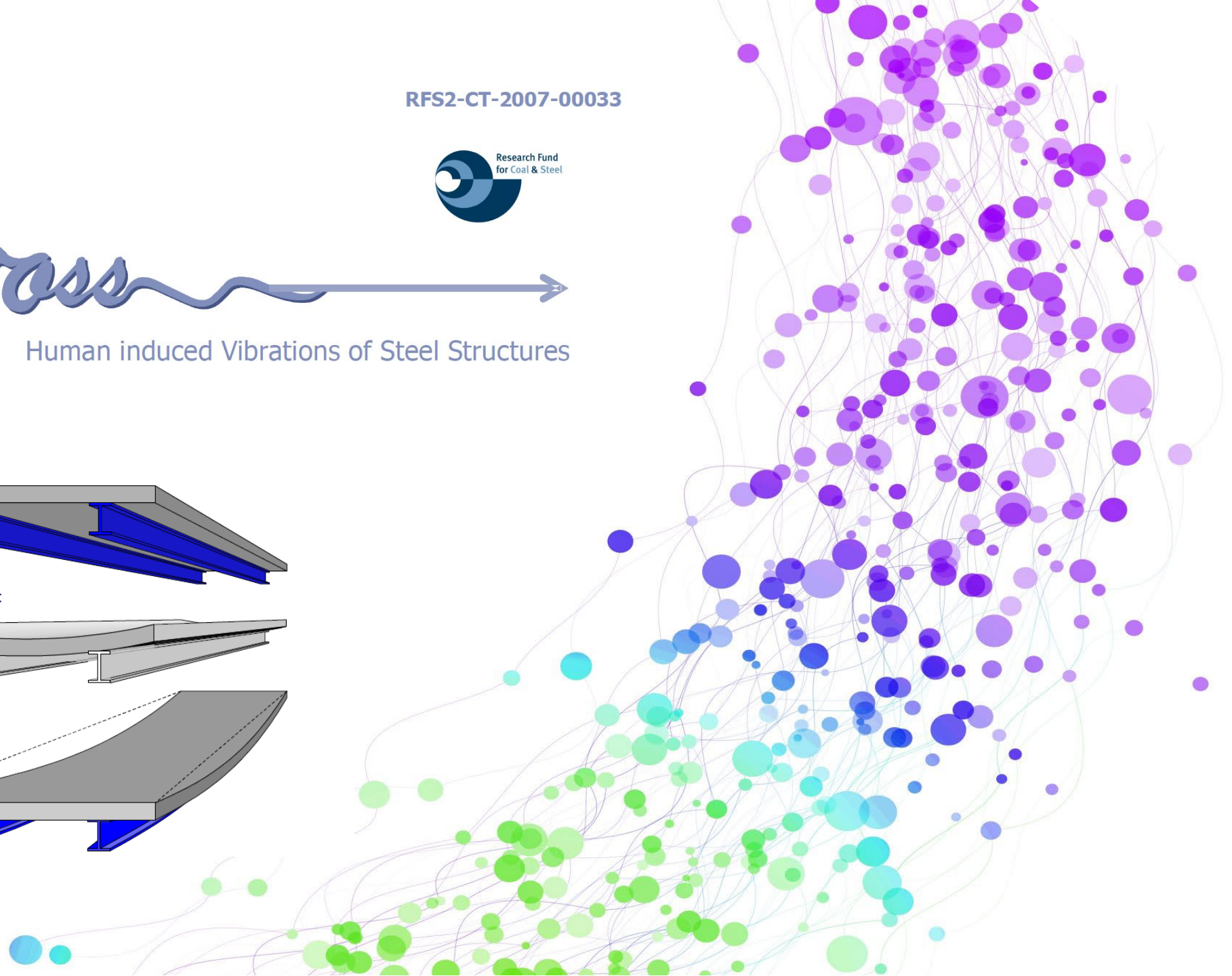
Modo de vibração da laje de betão:



Modo de vibração da viga mista:



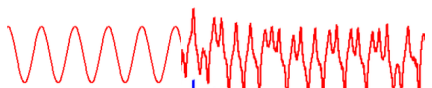
Zacarias Chamberlain 2023





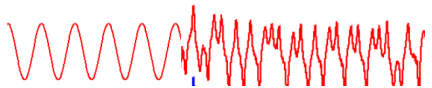
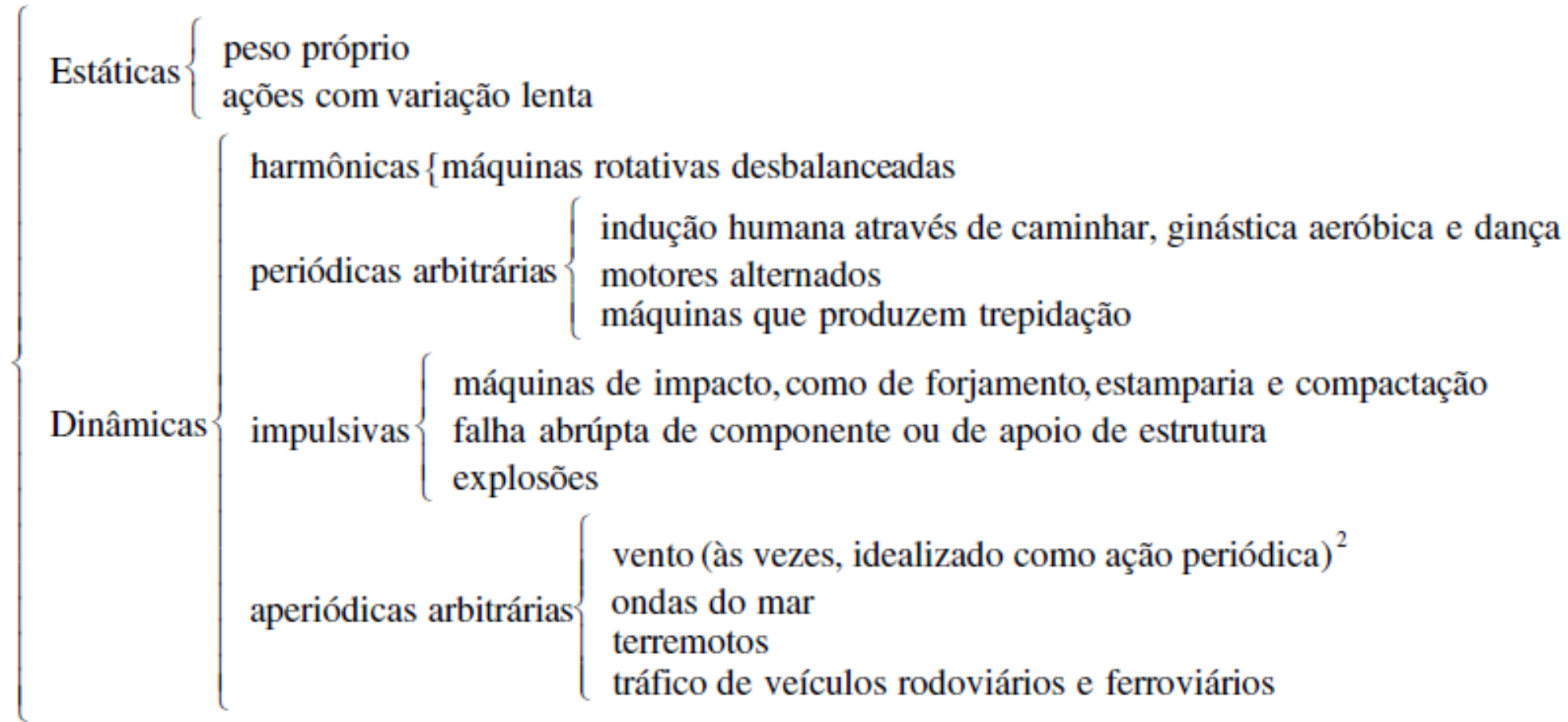
ABNT/CB-02-002125.003
PROJETO DE REVISÃO ABNT NBR 8800
NOVEMBRO 2022

Anexo I
(normativo)
Vibrações em pisos

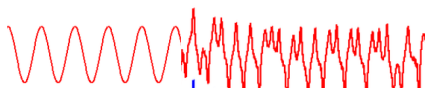
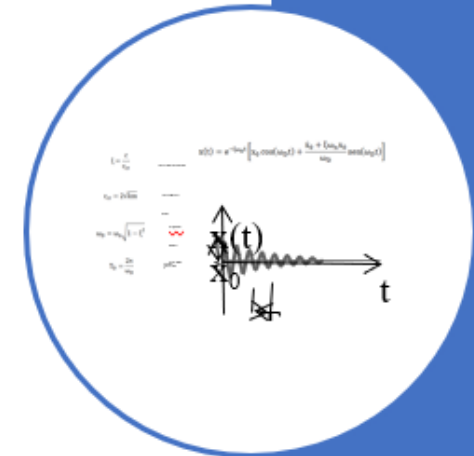
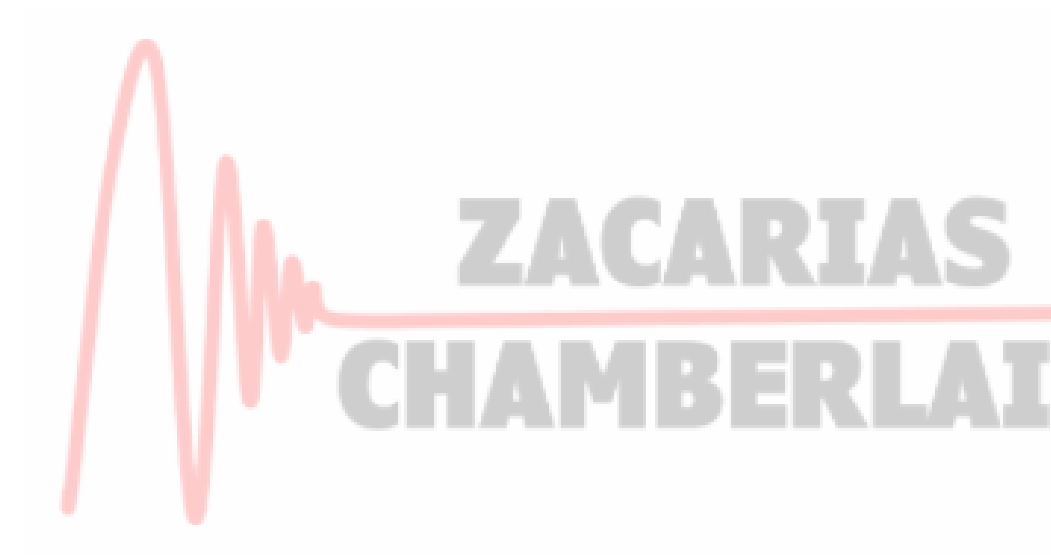


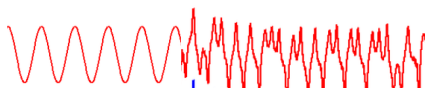
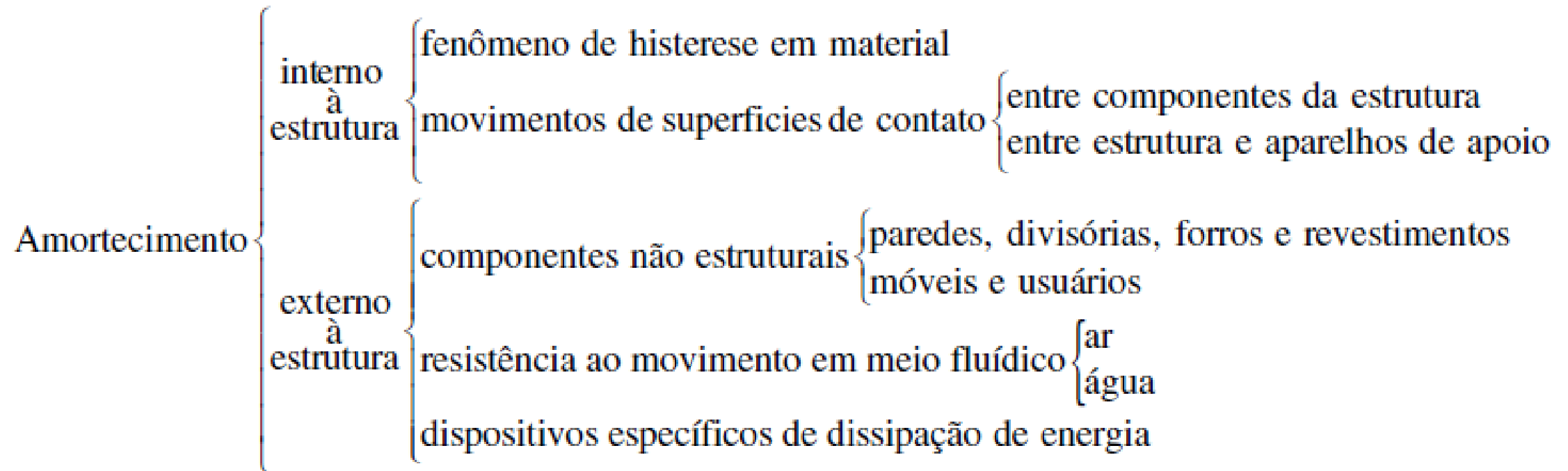
Zacarias Chamberlain 2023

O esquema a seguir apresenta as principais fontes de forças externas em estruturas.



VIBRAÇÃO LIVRE AMORTECIDA





O amortecimento viscoso em estrutura tem expressão semelhante à do fenômeno de oposição ao movimento lento de corpos imersos em fluido, quando então essa oposição é considerada como proporcional à velocidade relativa entre corpo e fluido.⁴ Assim, escreve-se:⁵

$$f_a(t) = c\dot{u}(t) \quad (3-1.2)$$

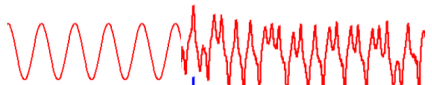
onde c é o coeficiente de amortecimento viscoso de unidade N·s/m.

O *amortecimento de Coulomb* é o de atrito entre duas superfícies secas ou de lubrificação insuficientes, que se deslocam entre si. Ocorre em interfaces entre elementos estruturais e de componentes não estruturais, assim como em aparelhos de apoio.⁶ A correspondente força é paralela a essas superfícies e expressa por:

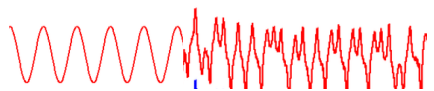
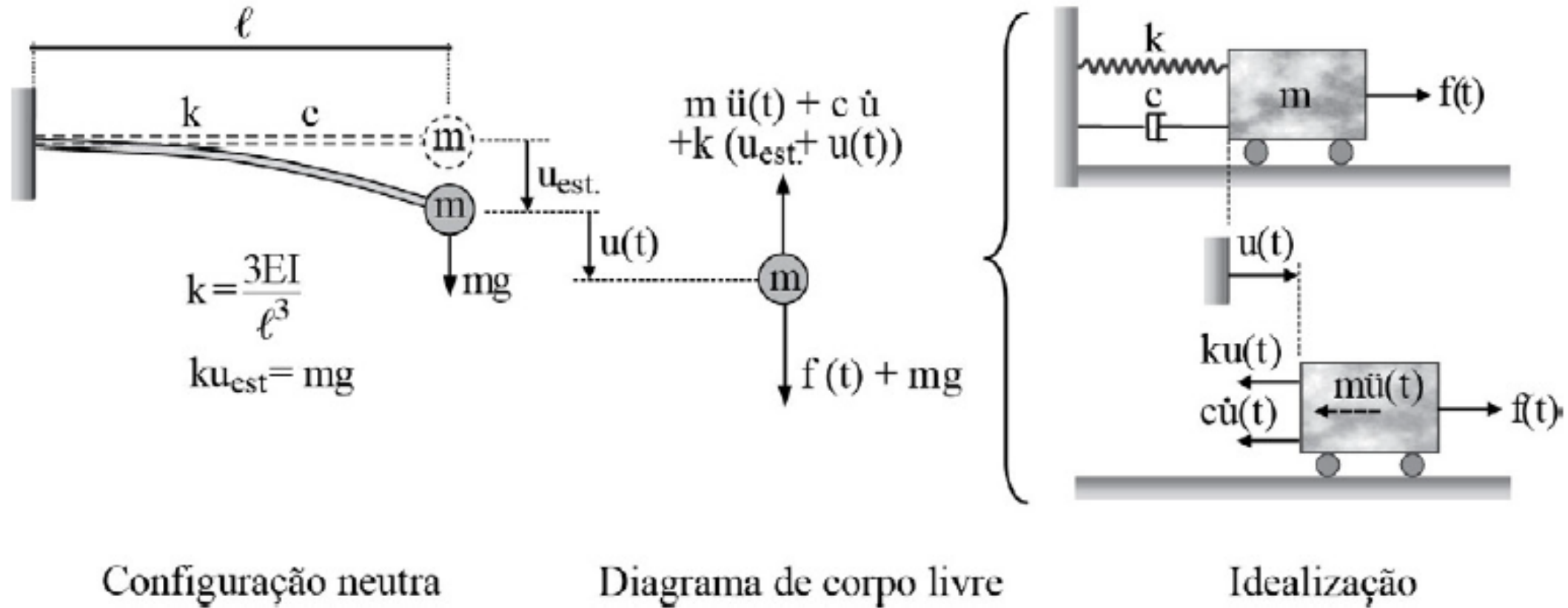
$$f_a(t) = (\text{sinal da velocidade})\mu N \quad (3-1.3)$$

onde μ é o *coeficiente de atrito cinemático* (adimensional) e N , a *força compressiva* normal às referidas superfícies.

Já o *amortecimento estrutural*, também denominado *histerético* ou *sólido*, é a idealização da dissipação de energia em materiais durante comportamento elástico, em interação molecular de plastificação microscópica que provoca curvas tensão-deformação de carregamento e de descarregamento não coincidentes.⁷ Assim, não inclui a plastificação macroscópica de material que deve ser considerada em análise de estrutura com a concepção de comportamento



EQUAÇÃO DE MOVIMENTO COM AMORTECIMENTO VISCOZO



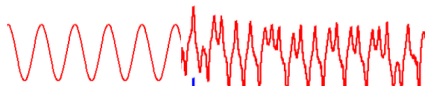
No caso do oscilador simples amortecido em vibração (de translação) livre, a equação de movimento particulariza-se para a forma homogênea:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = 0$$

Essa equação admite a solução:

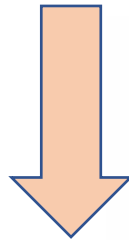
$$(mp^2 + cp + k = 0) \quad \xrightarrow{\quad} \quad p_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

$u(t) = be^{pt}$

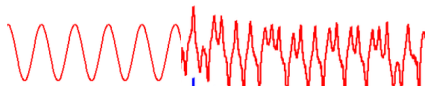
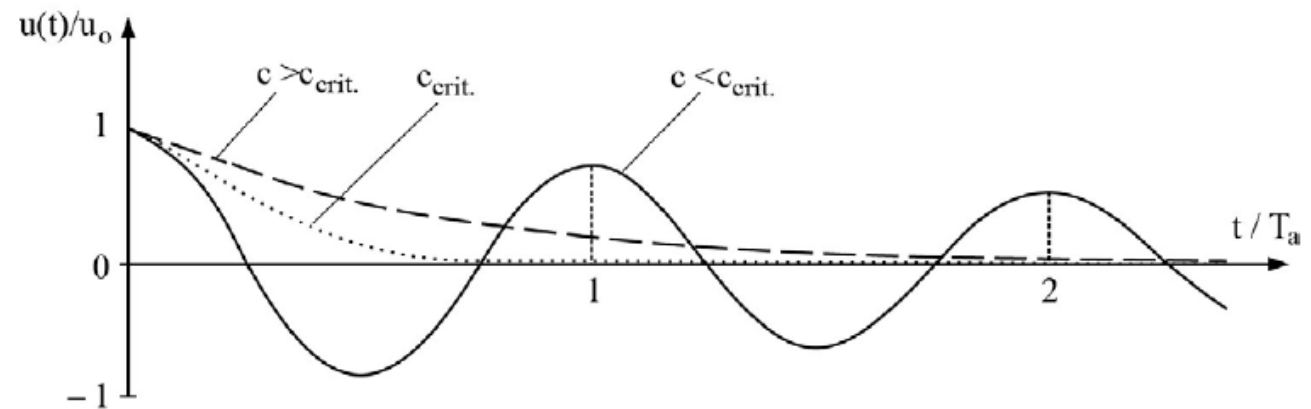


amortecimento crítico

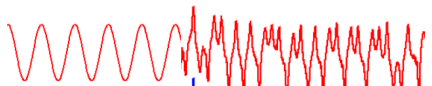
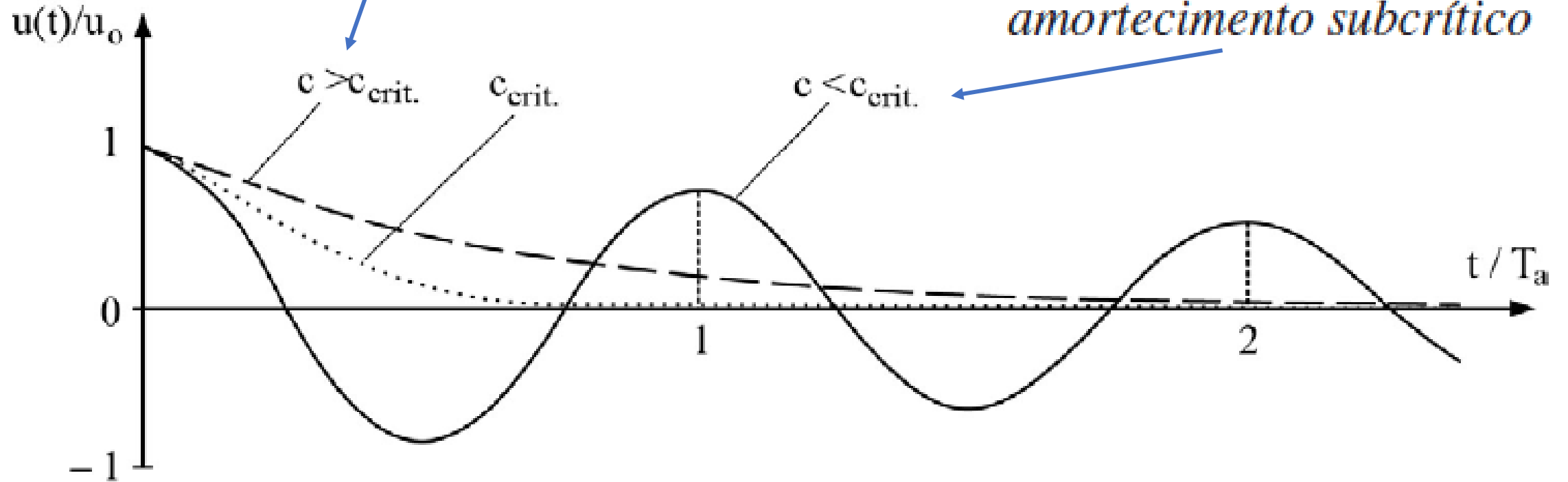
$$p_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$



$$\left(\frac{c}{2m}\right)^2 = \frac{k}{m} \rightarrow \boxed{c = c_{\text{crit.}} = 2\sqrt{km}}$$



amortecimento supercrítico



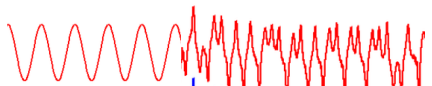
Em caso de amortecimento subcrítico, as soluções da equação característica são os números complexos conjugados:

$$p_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm i \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}$$

$$u(t) = b_1 e^{(-\frac{c}{2m} + i \omega_a) t} + b_2 e^{(-\frac{c}{2m} - i \omega_a) t}$$

$$\omega_a = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} \rightarrow \boxed{\omega_a = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

frequência natural amortecida



razão, fator ou fração de amortecimento,

$$\xi = \frac{c}{c_{\text{crit.}}}$$

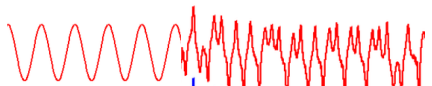


$$\xi = \frac{c}{2\sqrt{km}}$$



$$\xi = \frac{c}{2m\omega_n}$$

ϵ = Épsilon

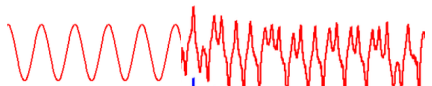


$$u(t) = e^{-\xi\omega_n t} \left(u_o \cos(\omega_a t) + \frac{u_o \xi \omega_n + v_o}{\omega_a} \sin(\omega_a t) \right)$$

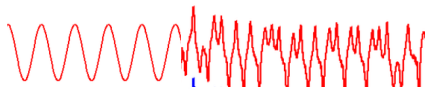
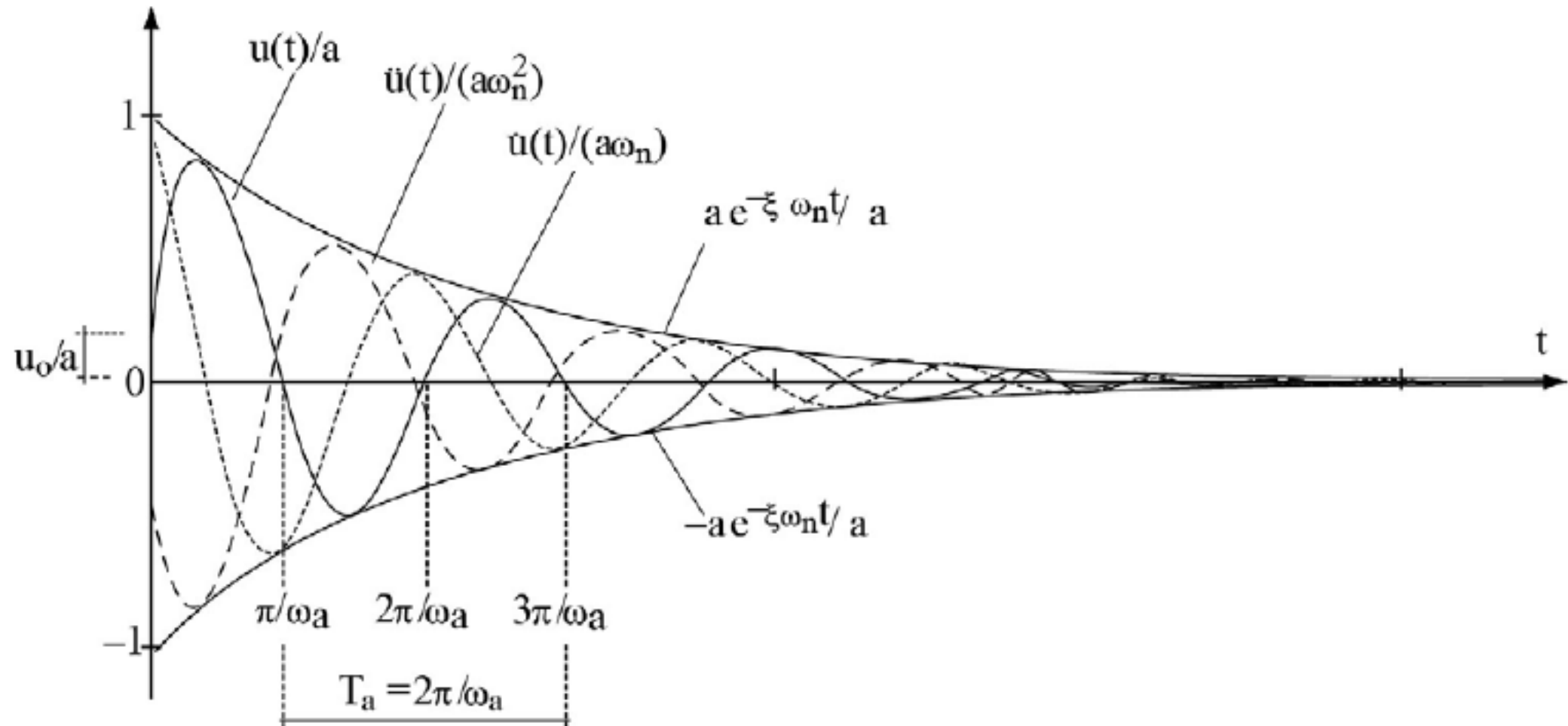
$$\omega_a = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

ZACARIAS

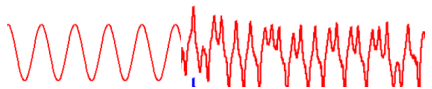
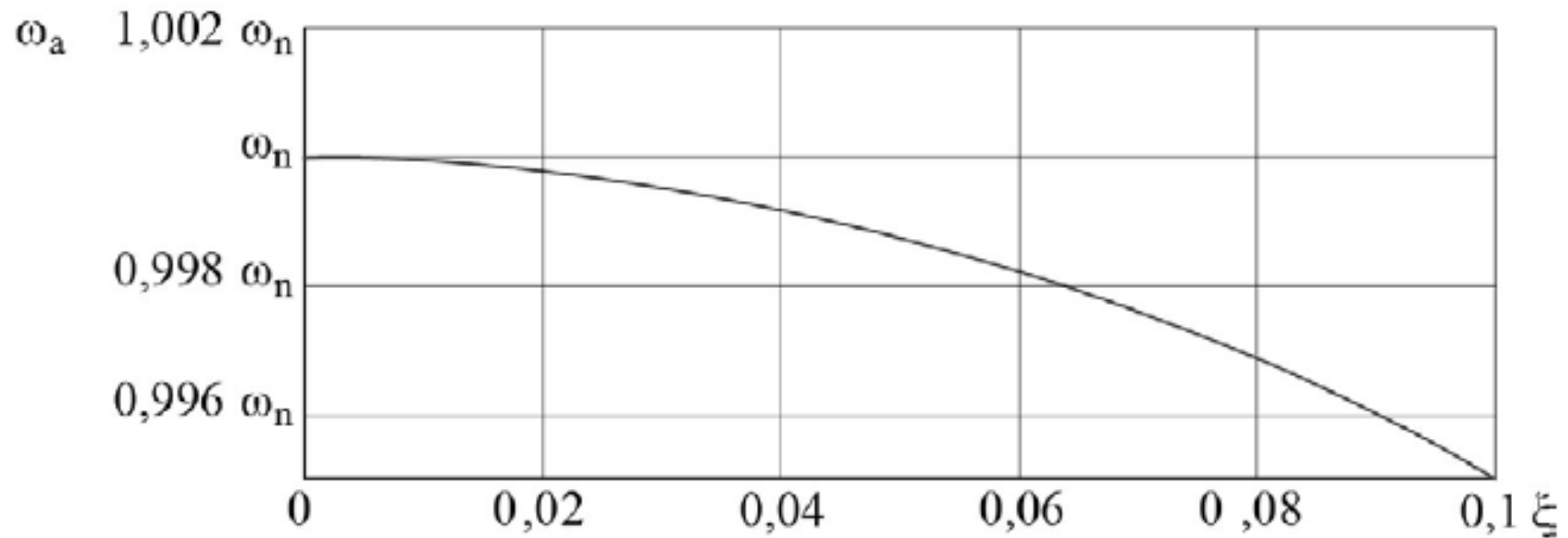
AMBERLAIN



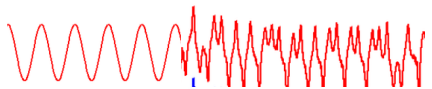
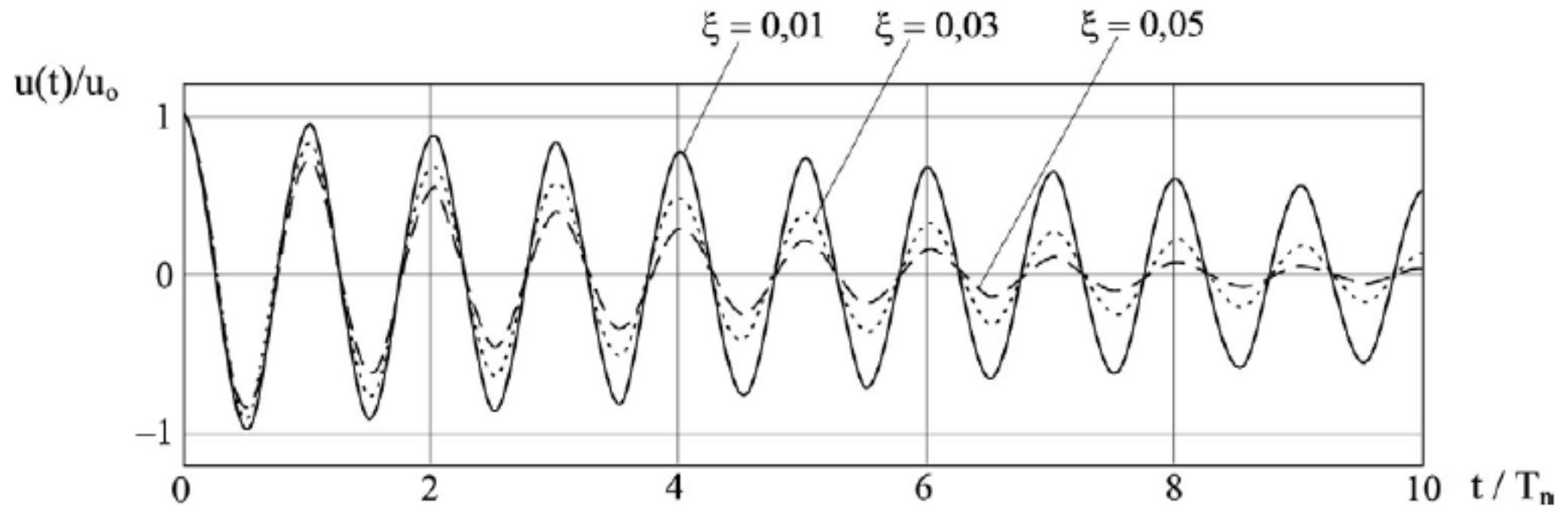
Soluções normalizadas em caso de condições iniciais $u_0 \neq 0$ e $v_0 \neq 0$.



Frequência angular amortecida *versus* razão de amortecimento.



Vibrações livres com as condições iniciais ($u_0 \neq 0$) e ($v_0 = 0$).



VIBRAÇÃO LIVRE AMORTECIDA

$$\xi = \frac{c}{c_{cr}}$$

**Amortecimento
Relativo**

$$c_{cr} = 2\sqrt{km}$$

**Amortecimento
Crítico**

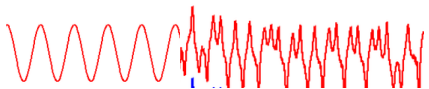
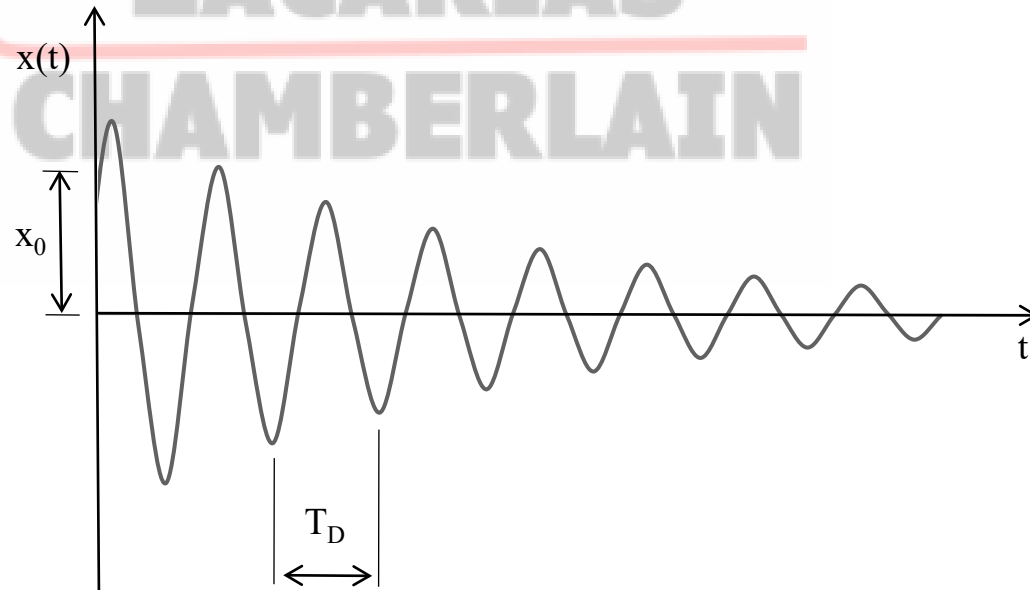
$$\omega_D = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

**Frequência
Circular
Amortecida**

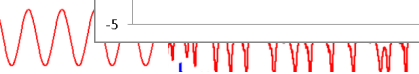
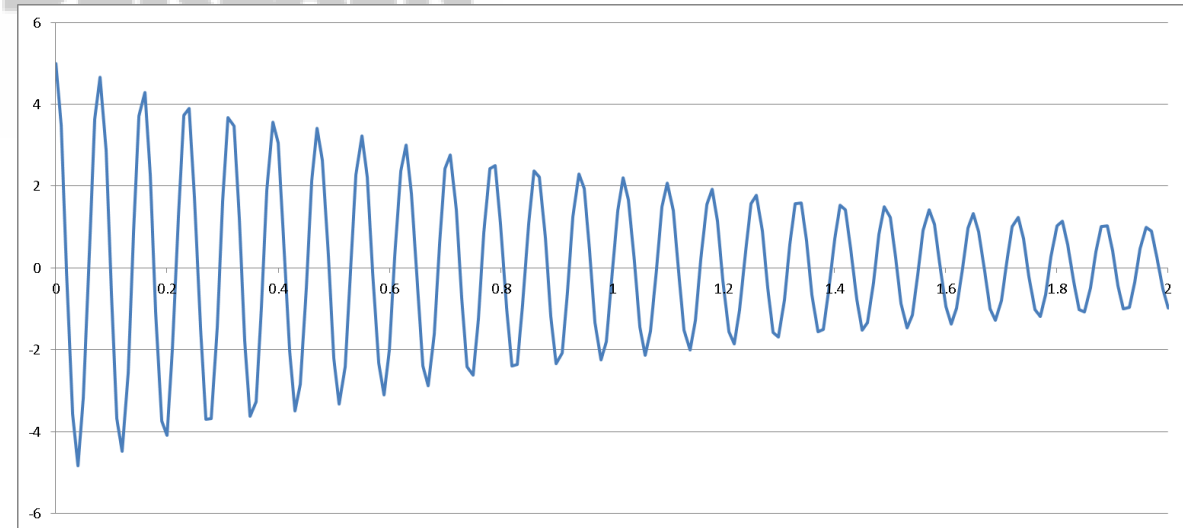
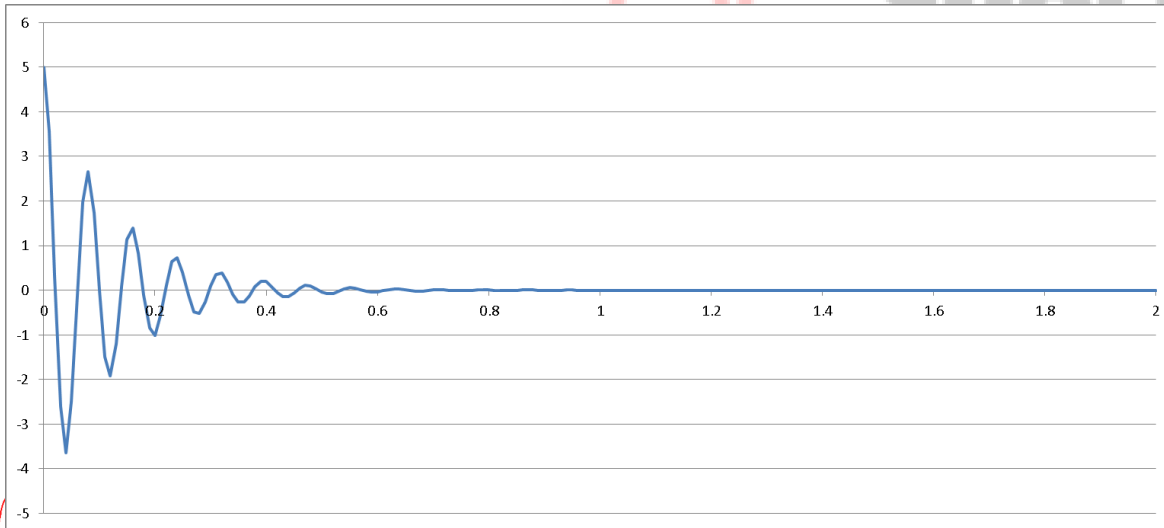
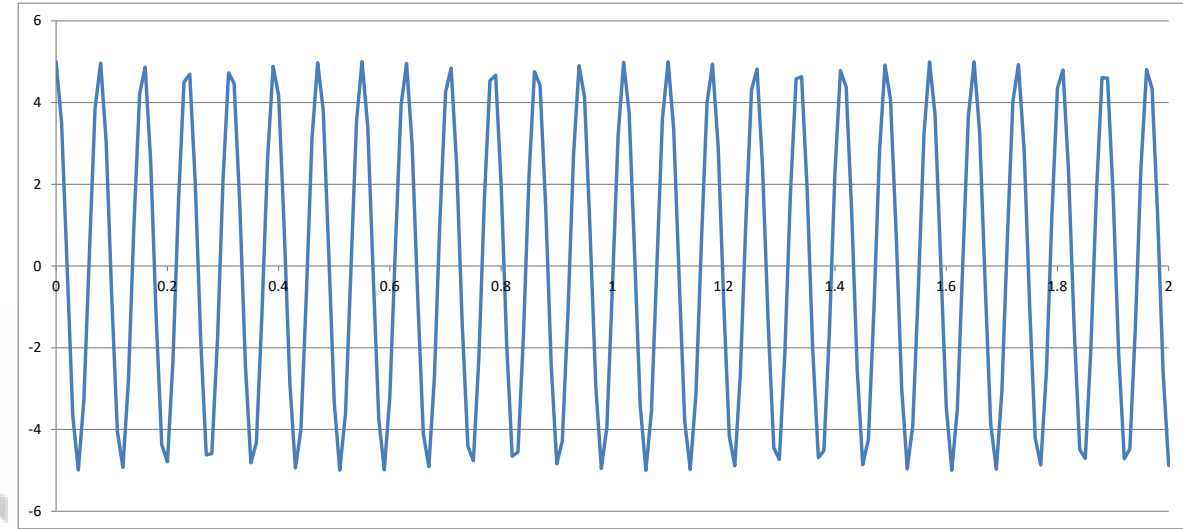
$$T_D = \frac{2\pi}{\omega_D}$$

**Período
Amortecido**

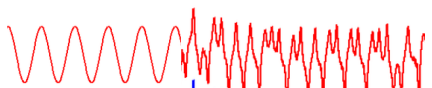
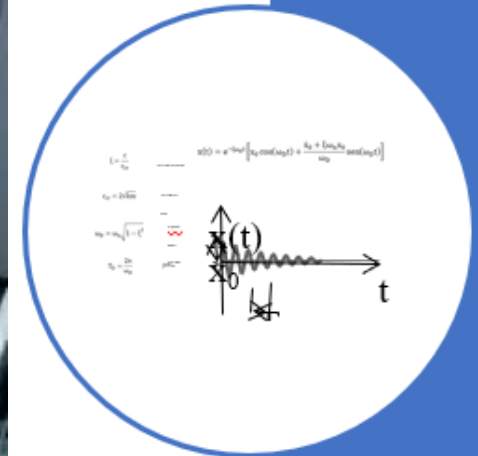
$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t} \left[x_0 \cos(\omega_D t) + \frac{\dot{x}_0 + \xi\omega_n x_0}{\omega_D} \sin(\omega_D t) \right]$$



VIBRAÇÃO LIVRE AMORTECIDA



VIBRAÇÃO SOB FORÇA HARMÔNICA



VIBRAÇÃO SOB FORÇA HARMÔNICA

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = f_o \cos(\omega t)$$

onde f_o é *amplitude* e ω é *frequência angular*, ambas da ação externa. Essa frequência corresponde ao período ($T = 2\pi/\omega$).

 ZACARIAS

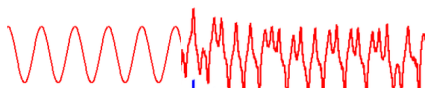
$$u(t) = e^{-\xi\omega_n t} (a_1 \cos(\omega_a t) + a_2 \sin(\omega_a t)) + \frac{u_{est.}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\xi)^2}} \cos(\omega t - \phi)$$

$$r = \omega/\omega_n$$

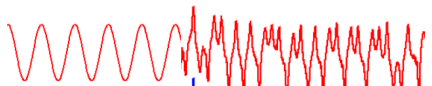
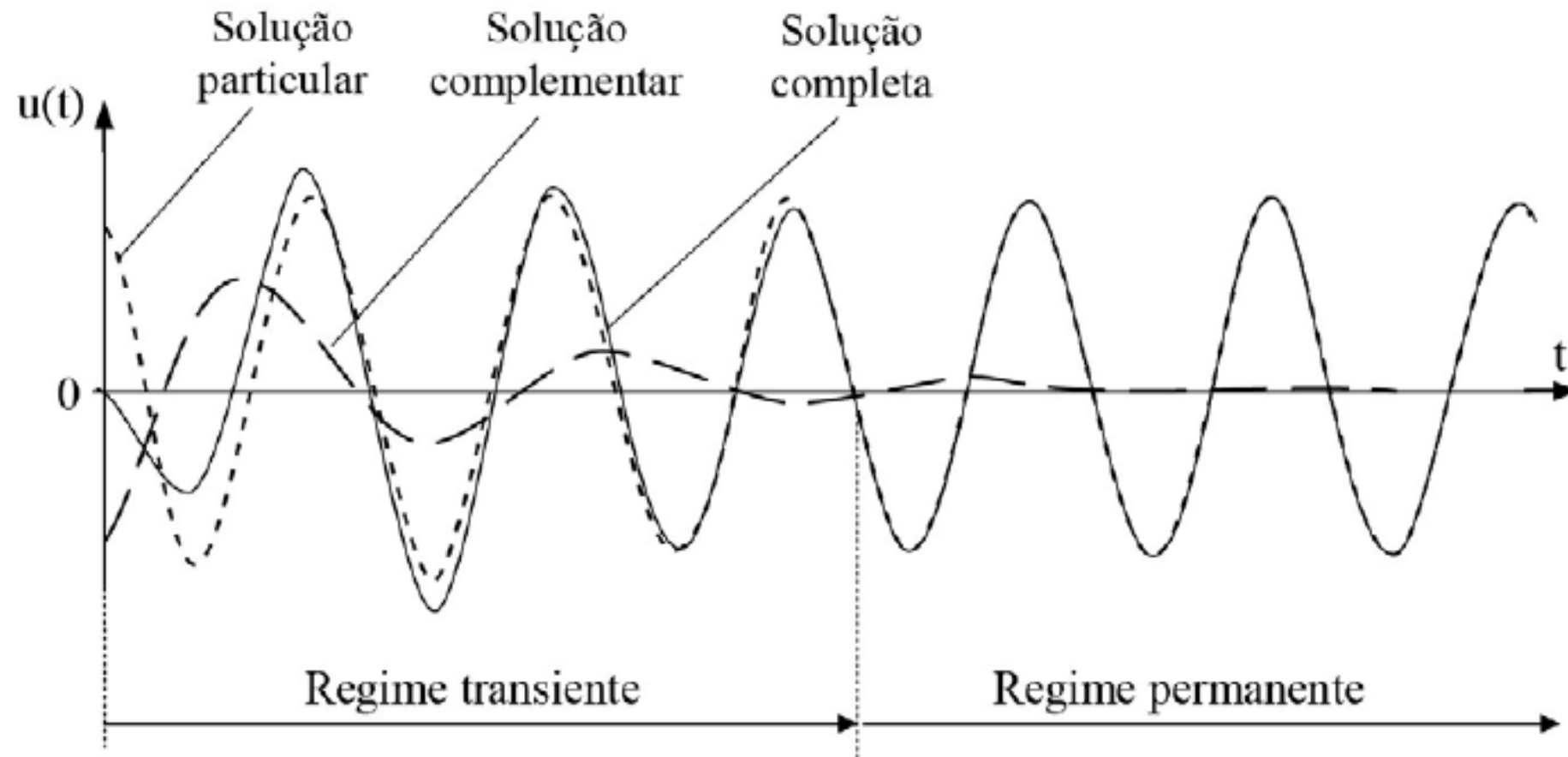
$$u_{est.} = f_o/k$$

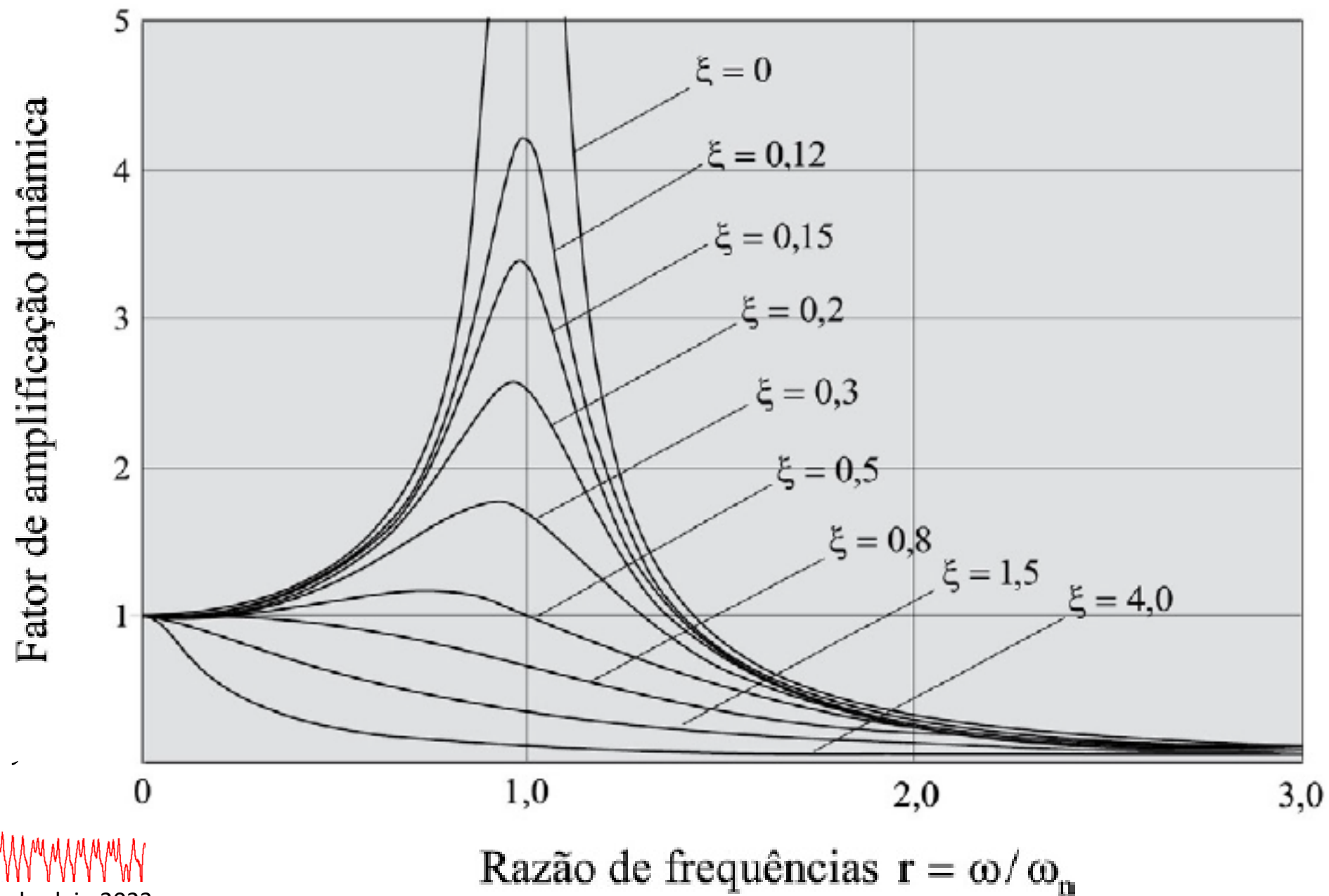
$$A_d = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\xi)^2}}$$

$$\phi = \arctg \frac{2r\xi}{1-r^2}$$

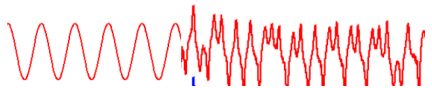


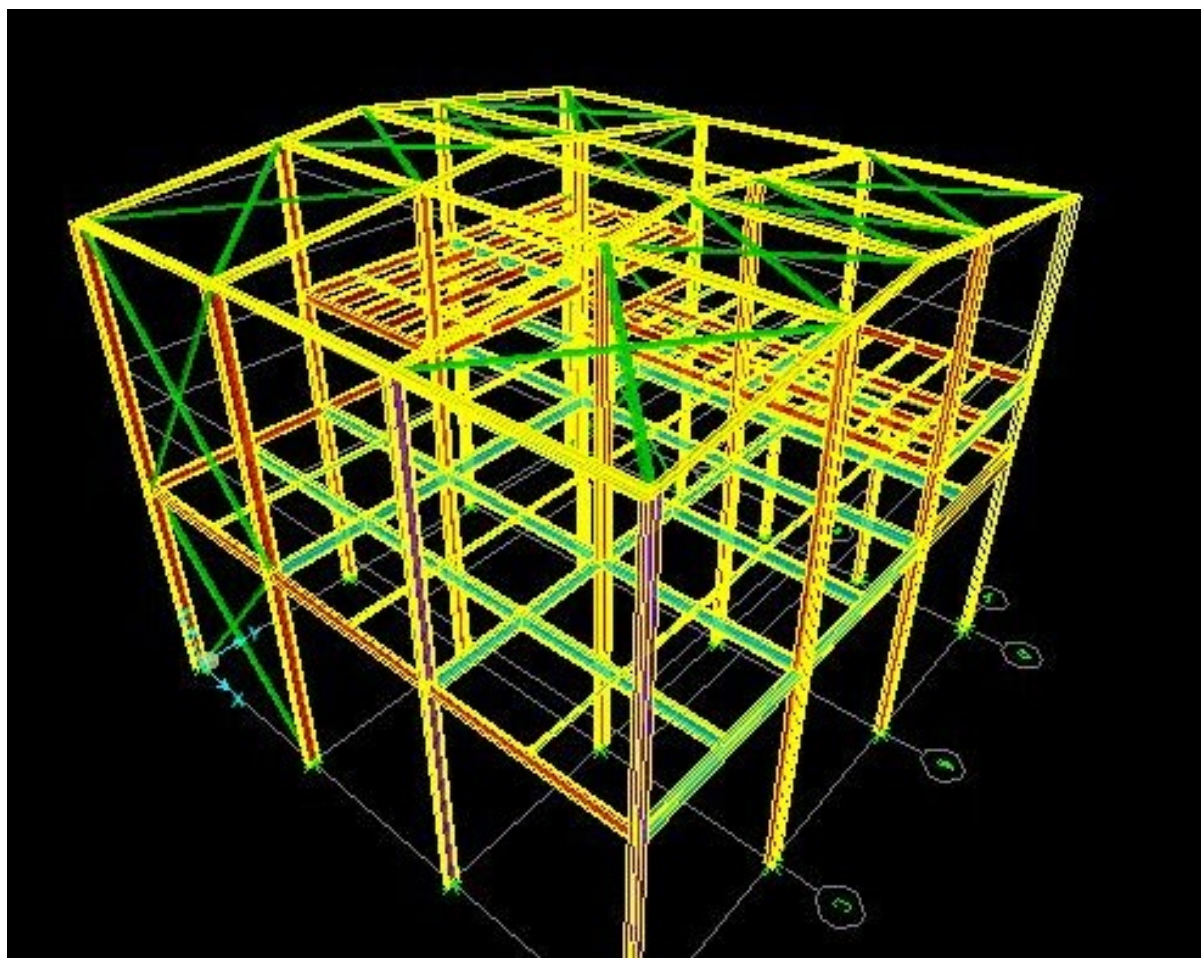
Composição da solução completa sob força harmônica no caso de $u_0=0$ e $v_0=0$.

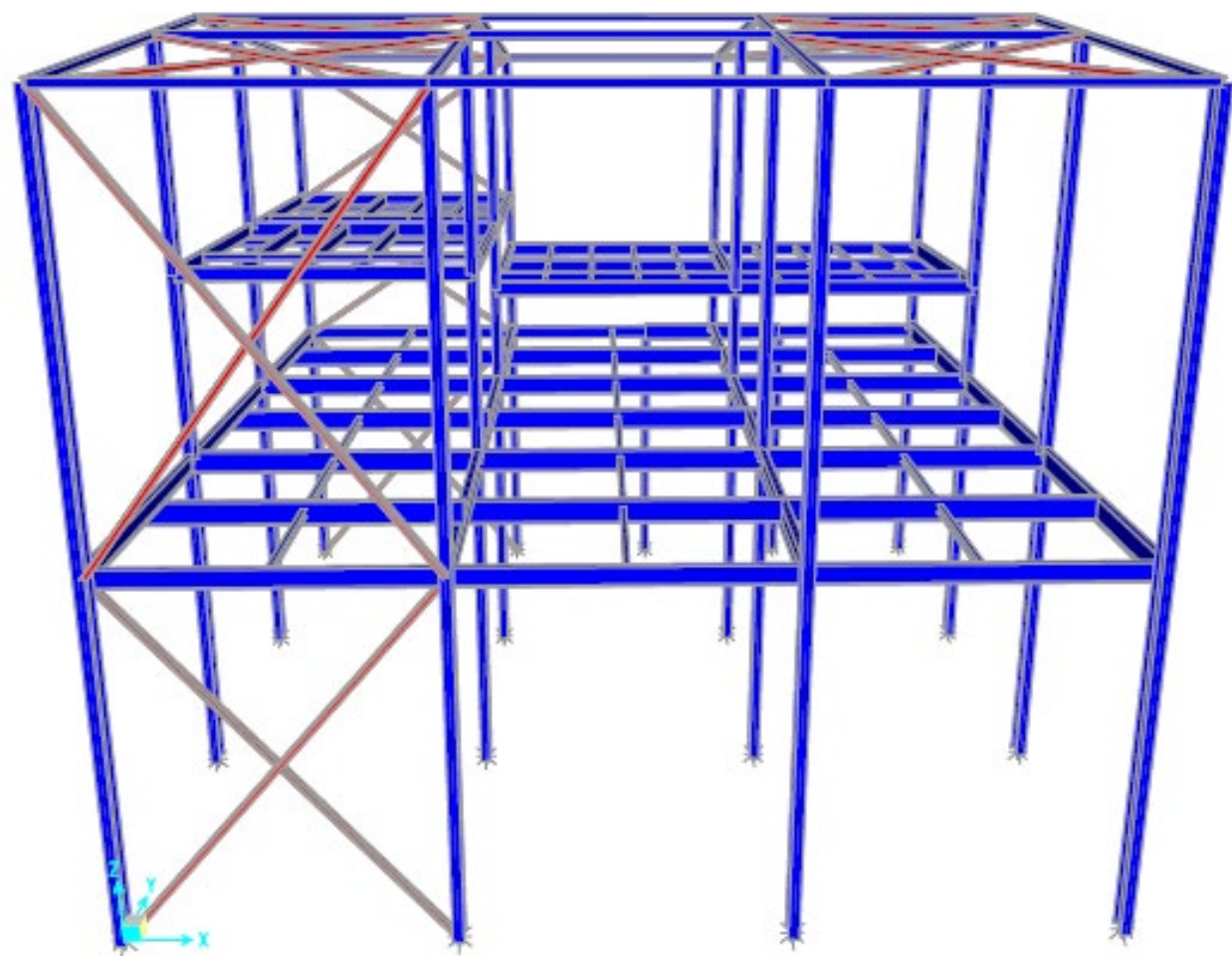




A ressonância é destrutiva;
ruína imediata da estrutura;
Acelera processo de falha por fadiga;
Cria desconforto aos usuários

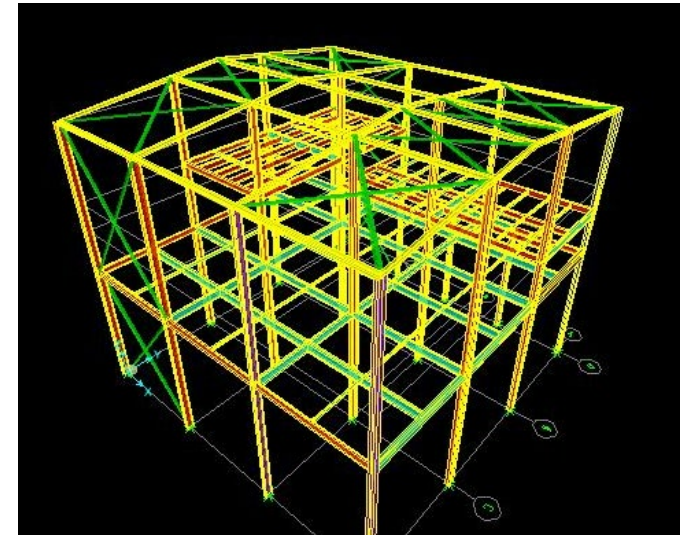






Análise Estática

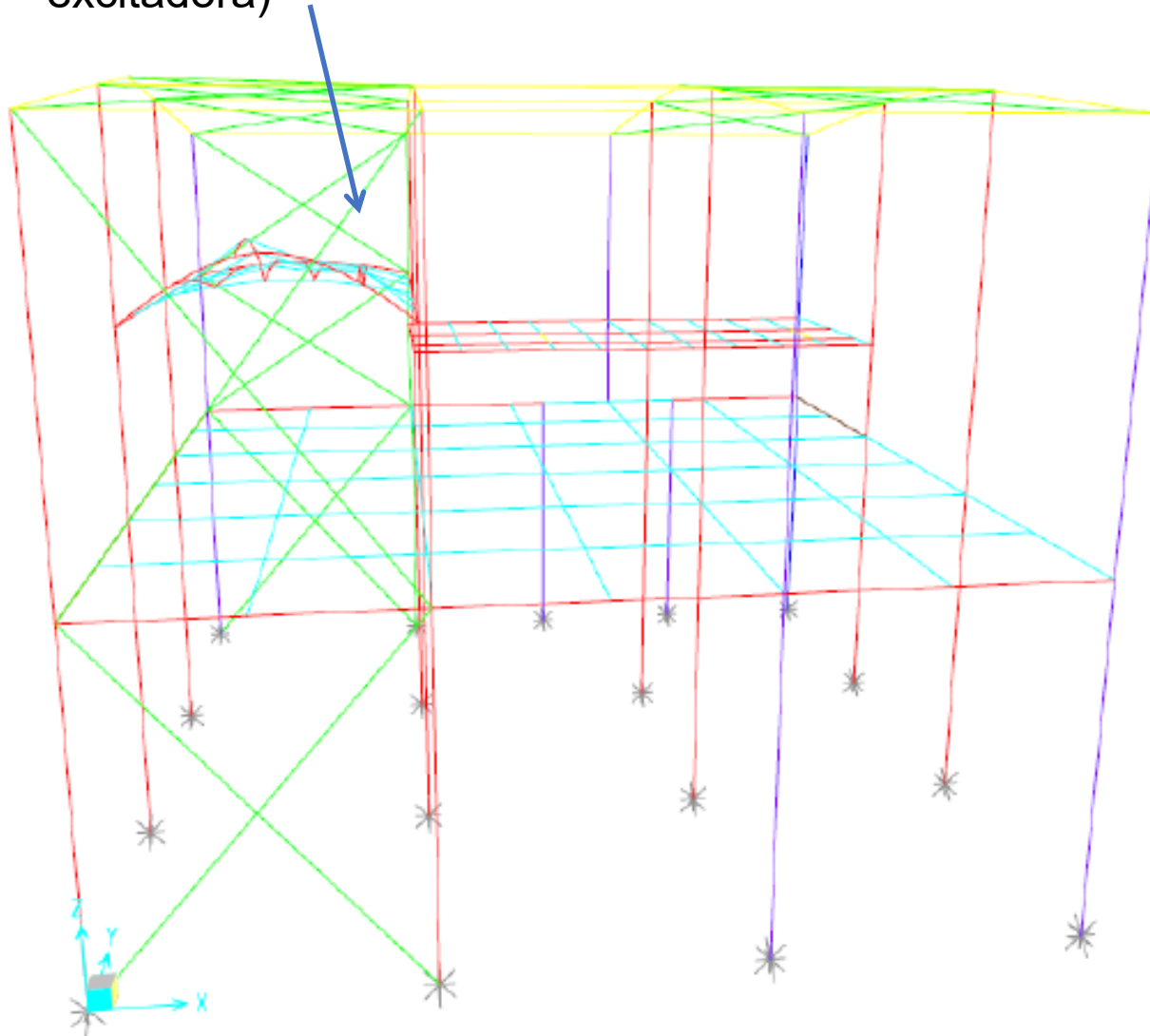
- Análise de 2ª ordem e elástica
- Utilizado o programa SAP2000 para a análise estrutural
- Dimensionamento pelo método dos estados limites conforme NBR8800:2008



Análise Dinâmica:

- Realizada no programa SAP2000
- Obtenção das frequências naturais da estrutura
- Avaliação dos modos de vibração da estrutura
- Inserção das cargas do equipamento

- Equipamento:
 - $f = 14,67\text{Hz}$ (frequência)
 - $\omega = 92,15\text{rad/s}$ (frequência circular excitadora)



Modo 29:
 $T = 0,12043\text{s}$
 $f = 8,30343\text{Hz}$

$$r = \frac{\omega}{\omega_n}$$

Modo 29: 0,57
Modo 32: 0,62
Modo 40: 0,85
Modo 42: 0,90

- Análise Estática:

Axial = 41,6kN

Momento = 646,7kN.m

Cortante = 426,2kN

- Análise Dinâmica:

Axial = 41,6kN

Momento = 657,1kN.m

Cortante = 430,4kN

- Primeira Análise:

Axial = 41,6kN

Momento = 657,1kN.m

Cortante = 430,4kN

**- Segunda Análise com efeito
ressonante:**

Axial = 41,7 kN

Momento = 919,1kN.m

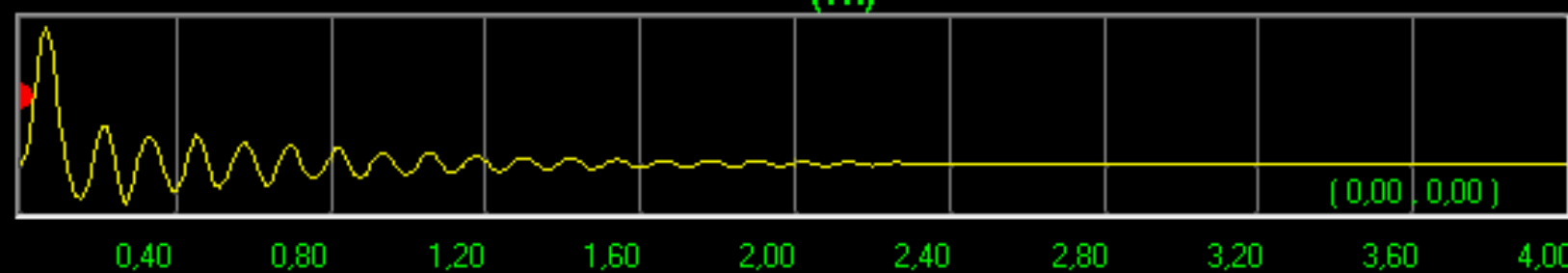
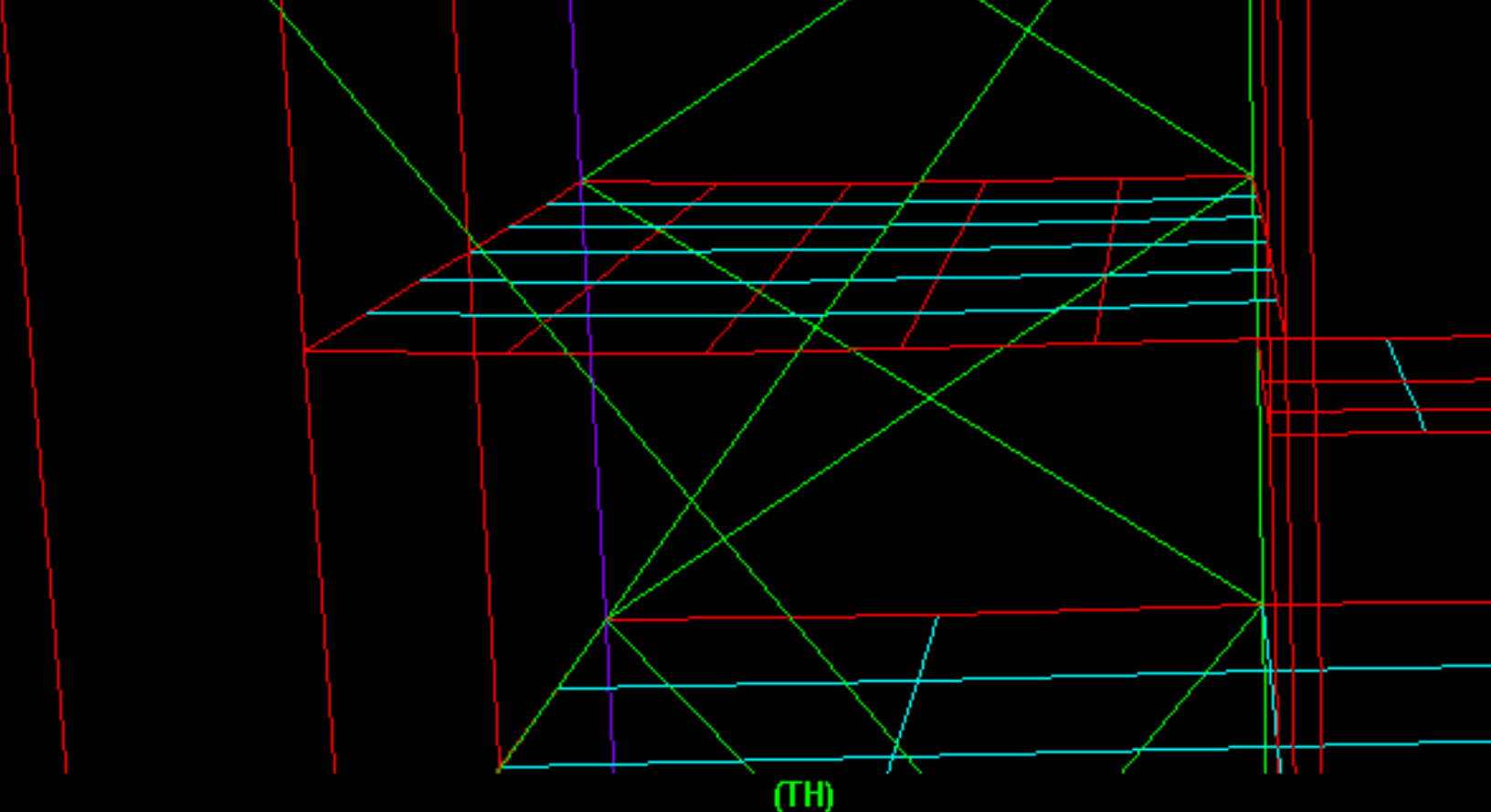
Cortante = 566,4kN

SAP2000

Filename: Predio Equipamento_CargaDinamica_08.11.sdb

Deformed Shape

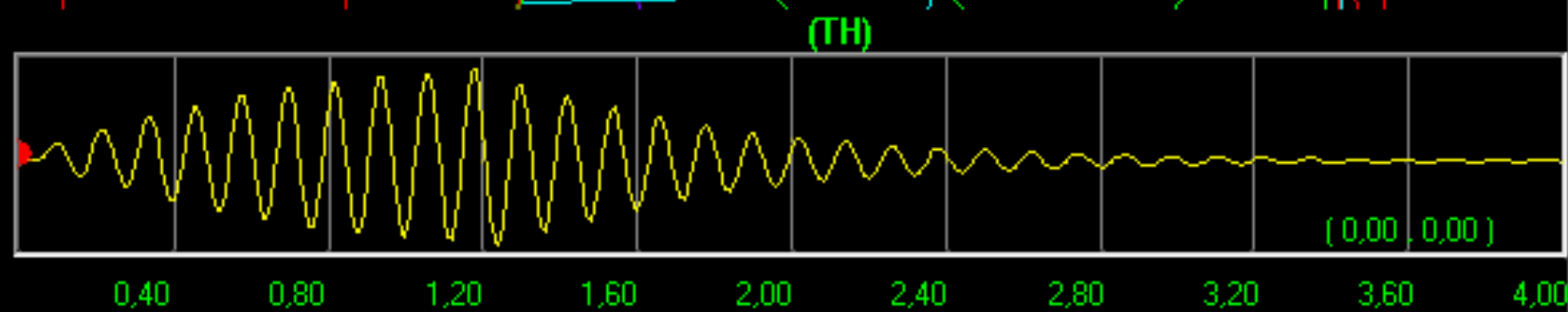
Case: Carga



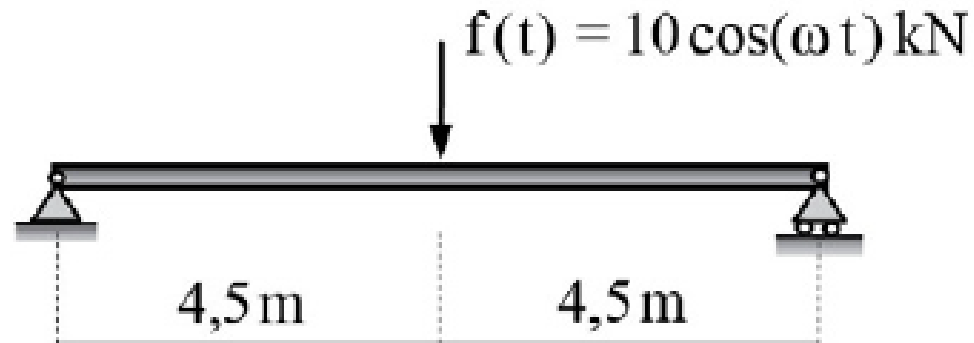
SAP2000

Filename: Predio Equipamento_CargaDinamica_Amplificação_16.11.sdb

Deformed Shape



Viga biapoiada sob força harmônica.



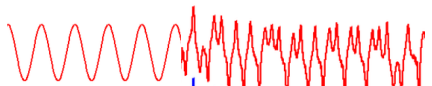
$$k_{eq} = 128,6 \text{ kN/m}$$

$$m_{eq} = 114,75 \text{ kg}$$

$$\omega_n = 33,477 \text{ rad/s}$$

$$T_n = 0,188 \text{ s}$$

$$u(t) = e^{-\xi \omega_n t} (a_1 \cos(\omega_a t) + a_2 \sin(\omega_a t)) + \frac{u_{est.}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\xi)^2}} \cos(\omega t - \phi)$$



Resposta Transiente

Resposta Permanente

$$u(t) = e^{-\xi \omega_n t} (a_1 \cos(\omega_a t) + a_2 \sin(\omega_a t)) + \frac{u_{\text{est.}}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\xi)^2}} \cos(\omega t - \phi)$$

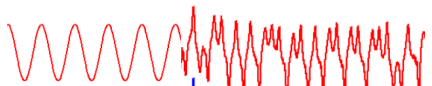
$$\begin{cases} a_1 = u_o - \frac{u_{\text{est.}} \cos \phi}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\xi)^2}} \\ a_2 = \frac{1}{\omega_a} \left(v_o + a_1 \xi \omega_n - \frac{u_{\text{est.}} \omega}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\xi)^2}} \sin \phi \right) \end{cases}$$

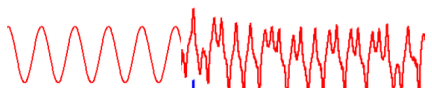
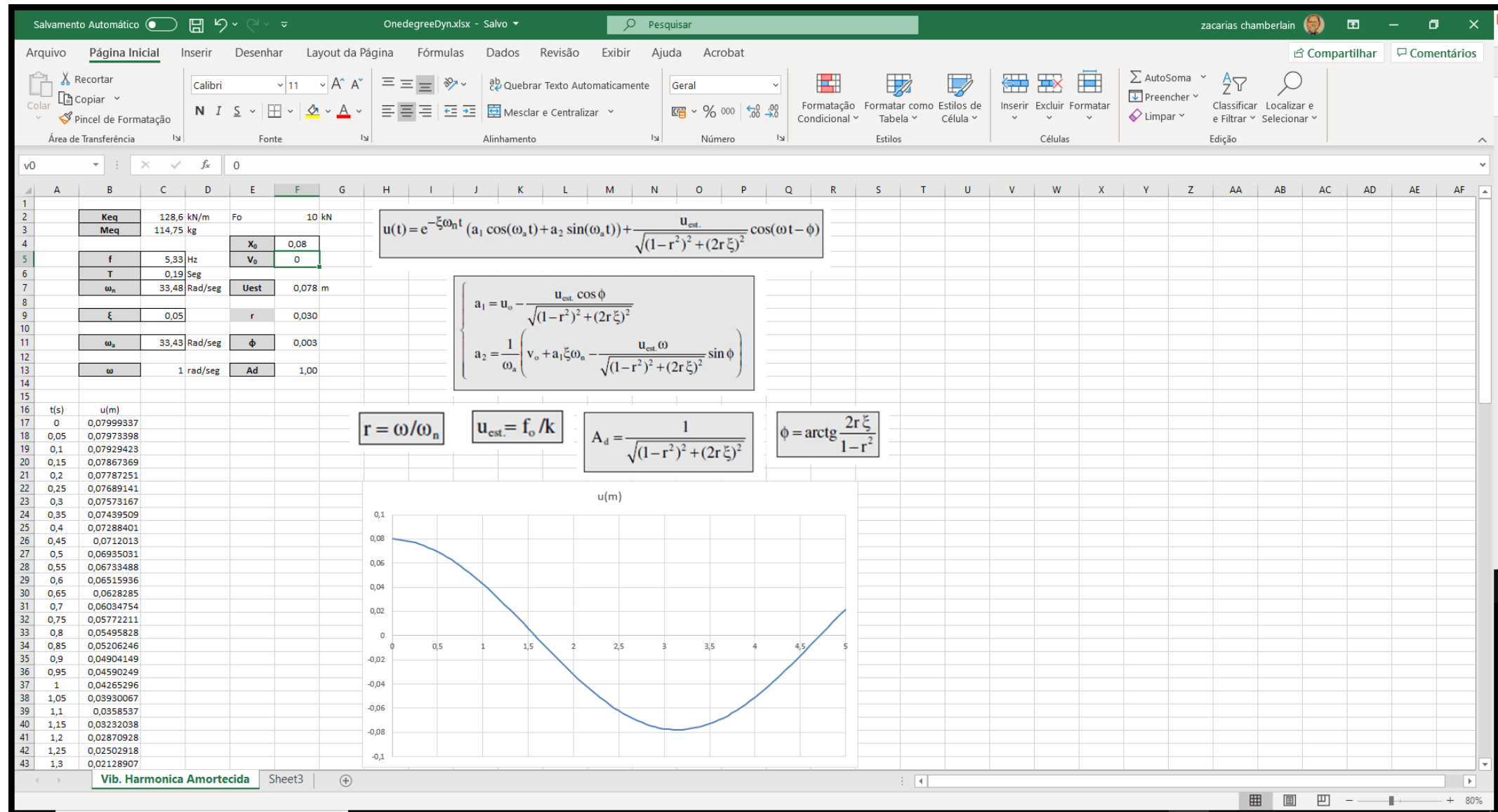
$$r = \omega / \omega_n$$

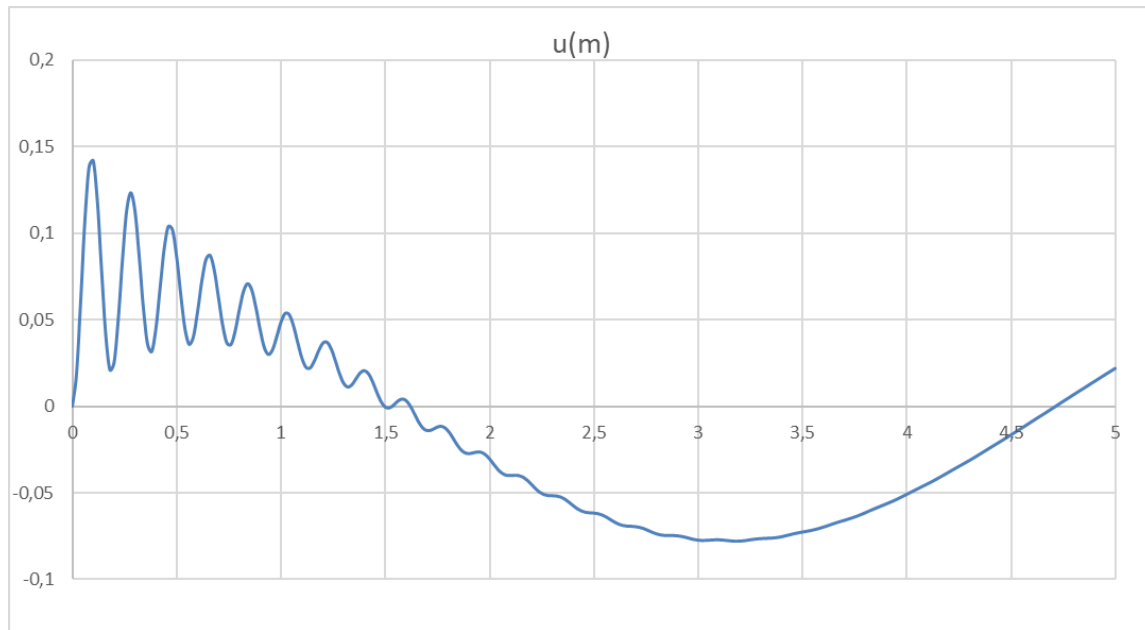
$$u_{\text{est.}} = f_o / k$$

$$A_d = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\xi)^2}}$$

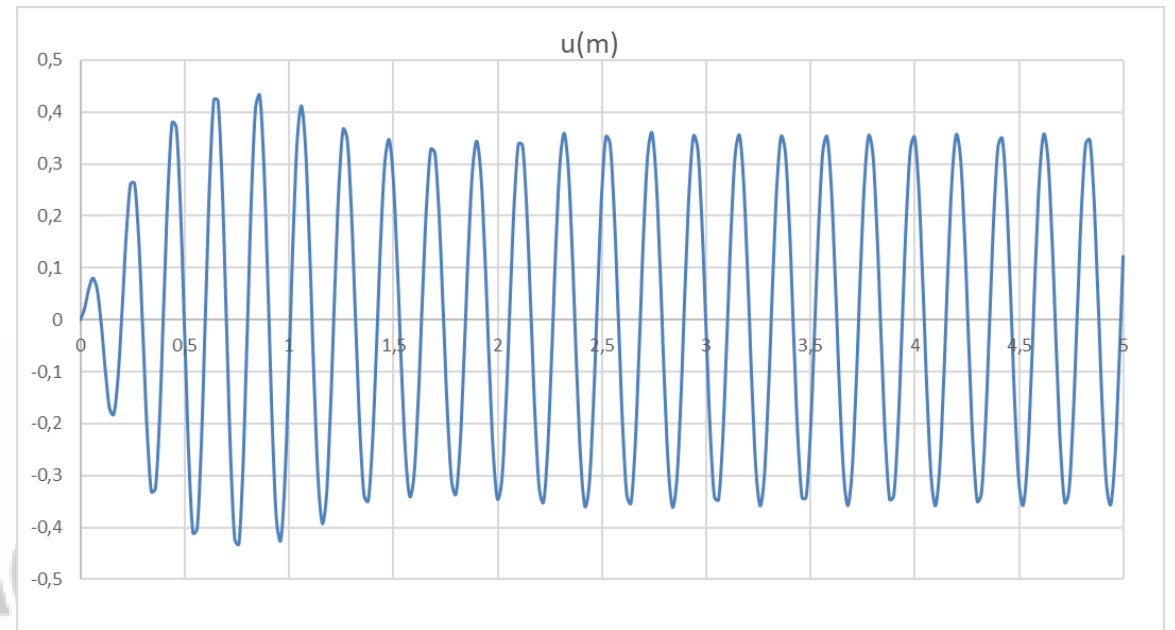
$$\phi = \arctg \frac{2r\xi}{1-r^2}$$



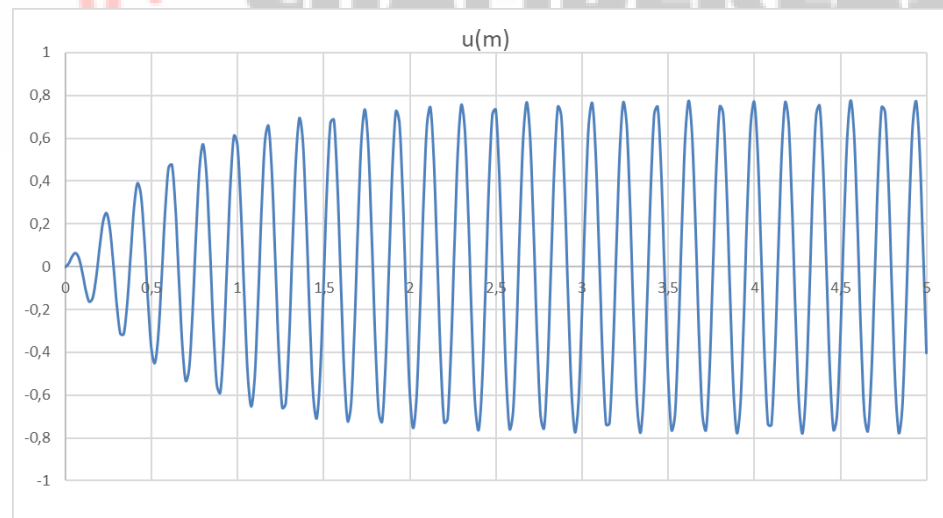




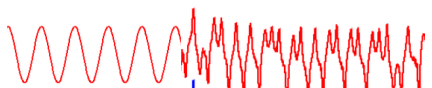
$W = 1 \text{ Rad/s}$, $Ad = 1$



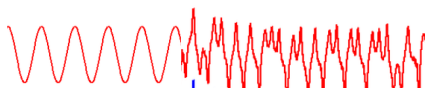
$W = 30 \text{ Rad/s}$, $Ad = 4,62$



$W = 33,4 \text{ Rad/s}$, $Ad = 10,01$

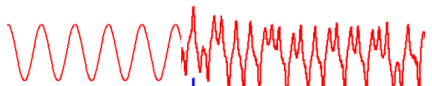
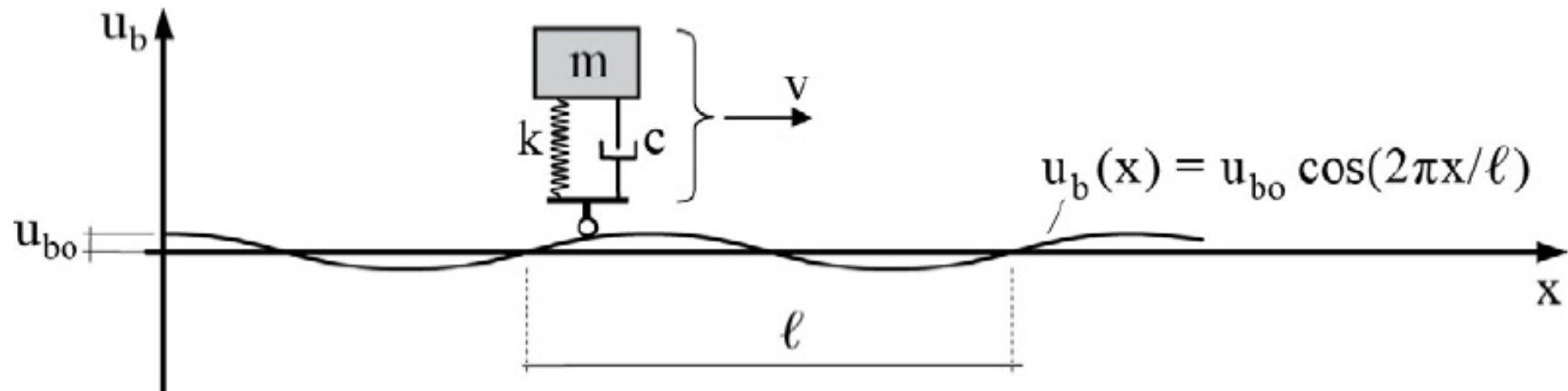


Tipo de estrutura	ξ
Edifício até cerca de 100 metros de altura sob ações usuais:	
– Em concreto armado	0,020 – 0,030
– Em aço	0,015 – 0,025
Edifício acima de 100 metros de altura sob ações usuais:	
– Em concreto armado	0,010 – 0,020
– Em aço	0,007 – 0,013
Edifício sob ação sísmica:	
– Até 6 graus na escala Richter	0,020 – 0,050
– A partir de 6 graus na escala Richter	0,050 – 0,100
(Os códigos sísmicos costumam recomendar $\xi=0,05$ em caso de edificações sem sistema de isolamento de vibração)	
Passarelas:	
– Em concreto armado	0,008 – 0,020
– Em concreto protendido	0,005 – 0,017
– Em aço	0,002 – 0,004
Pontes de vãos maiores do que 20 metros:	
– Em concreto armado	0,020
– Em concreto protendido	0,010
– Em aço/concreto	0,005
Pisos para atividades esportivas:	
– Em concreto armado	0,014 – 0,035
– Em concreto protendido	0,010 – 0,030
– Mistos em aço e concreto	0,006 – 0,020
Chaminés:	
– Com alvenaria	0,070 – 0,100
– Em aço	0,015 – 0,040



Um veículo idealizado como oscilador simples subamortecido desloca-se com velocidade horizontal constante v , em um piso irregular idealizado em forma cossenoidal, como esquematizado r

Obtêm-se a equação de movimento desse oscilador e o esforço máximo na mola.



A frequência natural do oscilador é ($\omega_n = (k/m)^{1/2}$), e a distância percorrida é ($x = vt$). Logo, têm-se o período ($T = \ell/v$) e o deslocamento imposto pela base ($u_b(t) = u_{bo}\cos(\omega t)$), onde ($\omega = 2\pi v/\ell$). Assim, a partir da Equação (A) chega-se à equação do movimento do oscilador em termos do deslocamento relativo:

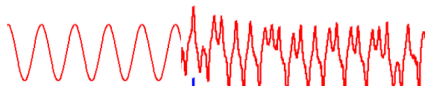
$$m\ddot{w}(t) + c\dot{w}(t) + kw(t) = mu_{bo}\left(\frac{2\pi v}{\ell}\right)^2 \cos\left(\frac{2\pi v}{\ell}t\right)$$

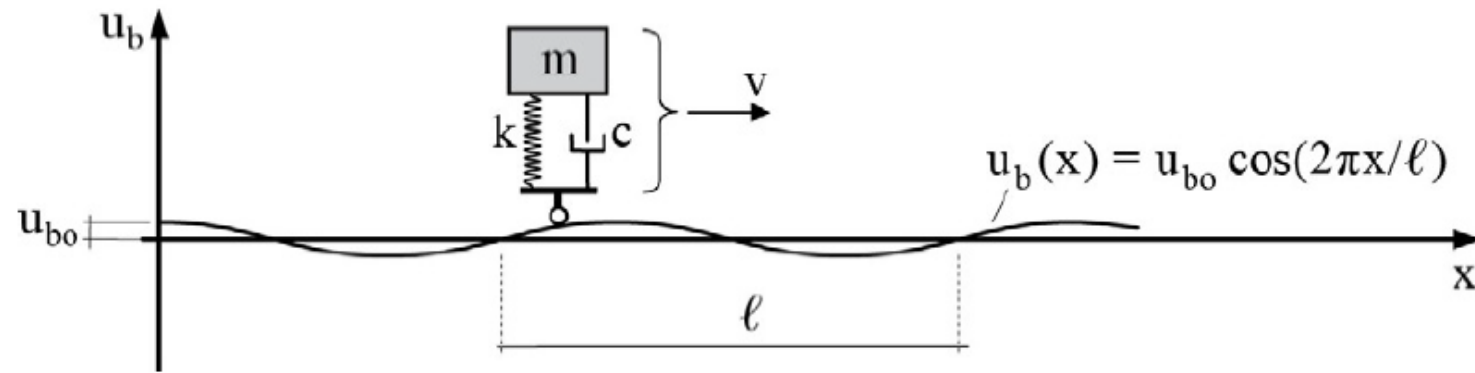
Com base na Equação (B) tem-se o deslocamento relativo máximo:

$$w_{\text{máx.}} = \frac{u_{bo}r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\xi)^2}}$$

(A) $m\ddot{w}(t) + c\dot{w}(t) + kw(t) = mu_{bo}\omega^2 \cos(\omega t)$

(B) $\frac{w_{\text{máx.}}}{u_{bo}} = A_d r^2 = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\xi)^2}}$





Logo, o encurtamento máximo da mola é:

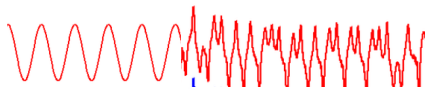
$$u_{\text{est.}} + w_{\text{máx.}} = \frac{mg}{k} + \frac{u_{bo} r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\xi)^2}}$$

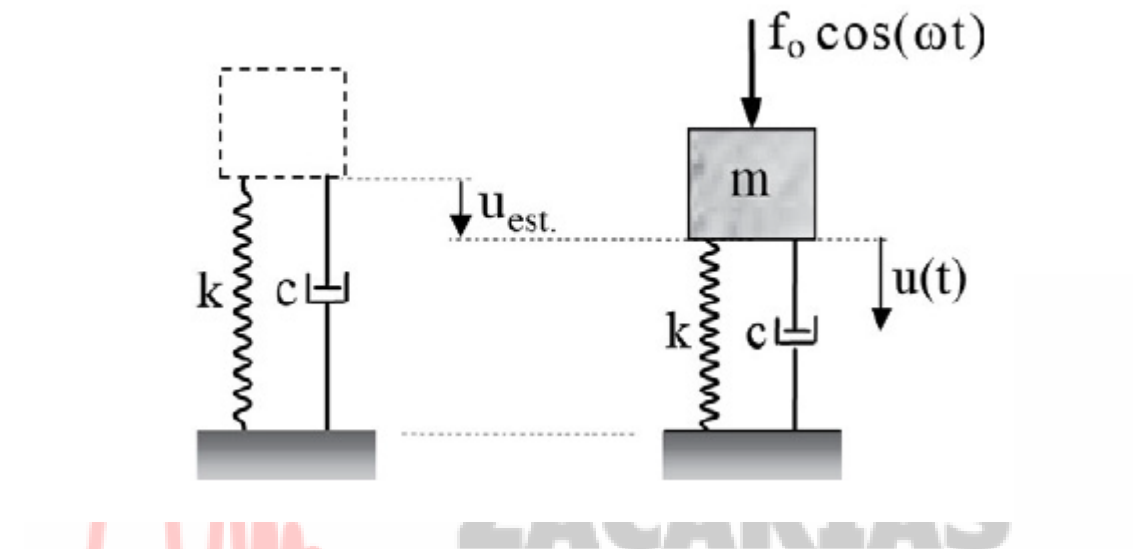
Esse encurtamento fornece a força elástica compressiva máxima:

$$f_{el} = k(u_{\text{est.}} + w_{\text{máx.}}) \rightarrow \boxed{f_{el} = mg + \frac{ku_{bo} r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\xi)^2}}}$$

em que:

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{2\pi v}{\ell} \sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{e} \quad \xi = \frac{c}{2\sqrt{km}}$$





Esse oscilador tem a seguinte resposta em regime permanente:

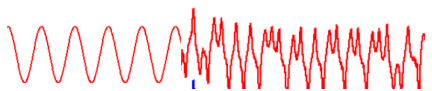
$$u(t) = \frac{f_0}{k} A_d \cos(\omega t - \phi)$$

Assim, a correspondente força elástica exercida sobre a base é:

$$f_{el}(t) = ku(t) = f_0 A_d \cos(\omega t - \phi)$$

que tem como valor máximo:

$$f_{el/m\acute{a}x.} = f_0 A_d$$



A partir da Equação 3-8.16, escreve-se a velocidade da massa em relação à base, que no presente caso é indeslocável:

$$\dot{u}(t) = -\frac{f_o}{k} A_d \omega \sin(\omega t - \phi)$$

Assim, a força de amortecimento ($c\dot{u}(t) = 2m\omega_n \xi \dot{u}(t)$) exercida sobre a base tem a expressão:

$$f_a(t) = -2m\omega_n \xi \frac{f_o}{k} A_d \omega \sin(\omega t - \phi) \rightarrow f_a(t) = -2f_o \xi r A_d \sin(\omega t - \phi)$$

que corresponde ao valor máximo:

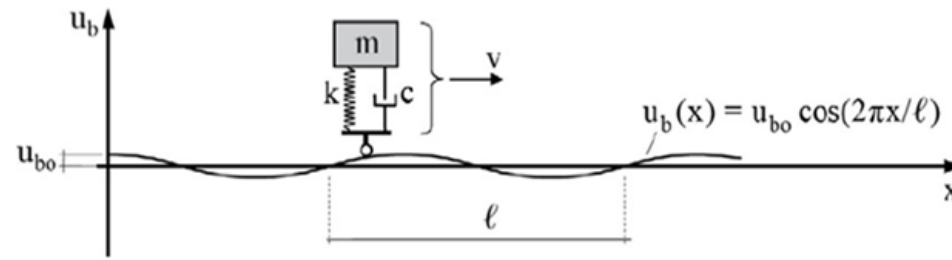
$$f_{a/m\acute{a}x.} = 2f_o \xi r A_d$$

Logo, como a força dinâmica transmitida à base é ($f_{el}(t) + f_a(t)$) e a força de amortecimento é defasada de $\pi/2$ em relação à força elástica, a amplitude daquela força tem a forma:

$$f_{m\acute{a}x.} = \sqrt{f_{el/m\acute{a}x.}^2 + f_{a/m\acute{a}x.}^2} \rightarrow f_{m\acute{a}x.} = f_o A_d \sqrt{1 + (2r \xi)^2}$$

A razão entre essa força máxima e a amplitude da força harmônica excitadora é chamada de *fator de transmissibilidade* ou, simplesmente, *transmissibilidade*, e se escreve:

$$TR = \frac{f_{m\acute{a}x.}}{f_o} \rightarrow TR = A_d \sqrt{1 + (2r \xi)^2} = \frac{\sqrt{1 + (2r \xi)^2}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2r \xi)^2}}$$



O pavimento de uma ponte apresenta irregularidades, por desgastes, em média podem ser Representados por uma curva senoidal com amplitude de 20,0 mm (U_{bo}) e com esse picos espaçados de 5,0 m ($\ell=5000$ mm). O maior veículo permitido é de 300kN, cuja suspensão Tem rigidez de $4,0 \cdot 10^6$ N/m e amortecimento viscoso equivalente de 35%. A velocidade máxima da rodovia na ponte é de 60 km/h, qual a força máxima na mola. Assumir que a Rigidez k já leva em conta a deformabilidade dos pneus e que as rodas não percam contato com o pavimento.

$$F_o := 300 \text{ kN}$$

$$x_o := 2 \text{ cm}$$

Massa do veículo:

$$m_v := \frac{F_o}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 30581,04 \text{ kg} \quad K_m := 4 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Velocidade do veículo $V_v := 60 \frac{\text{km}}{\text{hr}} = 16,67 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \xi := 0,35$

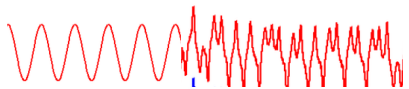
$$w := 2 \cdot \pi \cdot \frac{V_v}{\ell} = 20,94 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

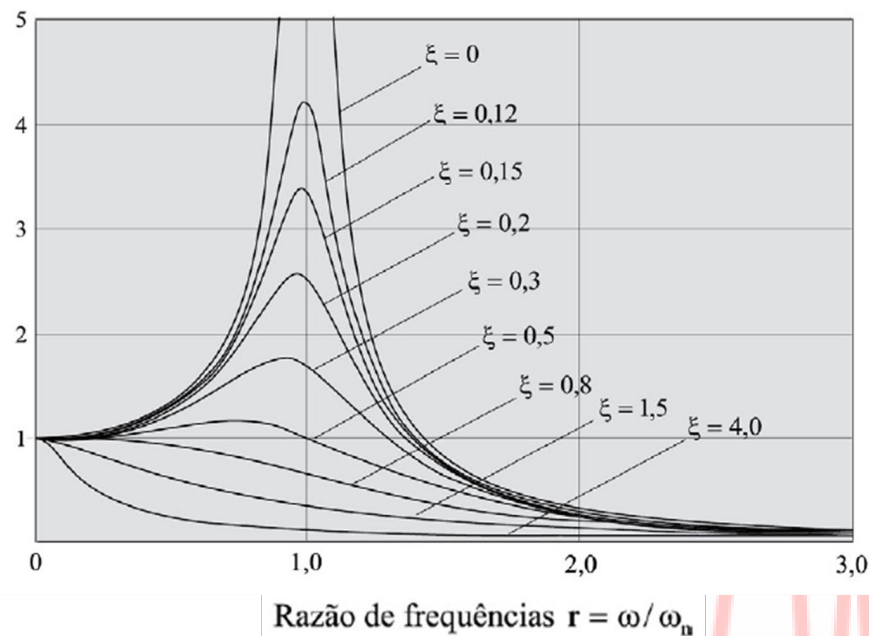
Frequência Circular do veículo $\omega_v := \sqrt{\frac{K_m}{m_v}} = 11,44 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

+ Relação de frequências

$$r := \frac{w}{\omega_v} = 1,83$$

$$F_{\max \text{ Pav}} := F_o + K_m \cdot x_o \cdot \frac{\sqrt{1 + (2 \cdot \xi \cdot r)^2}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot r)^2}} = 348,53 \text{ kN}$$





ZACARIAS

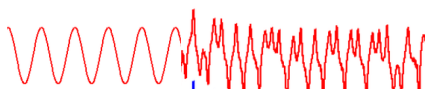
Em caso de $\omega/\omega_n > \sqrt{2}$, pode parecer conveniente eliminar o amortecimento para reduzir o referido fator de transmissibilidade que, então, se particulariza em:

$$TR = \frac{1}{r^2 - 1} \quad (C)$$

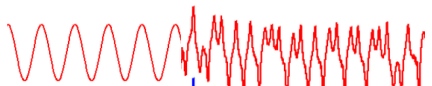
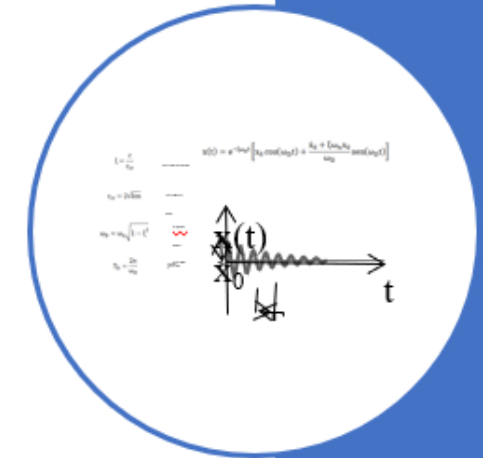
Além disso, para avaliar a transmissão de vibração na condição de $\omega/\omega_n > \sqrt{2}$, a partir da Equação (C), define-se a *eficiência de um isolamento de vibração* como:

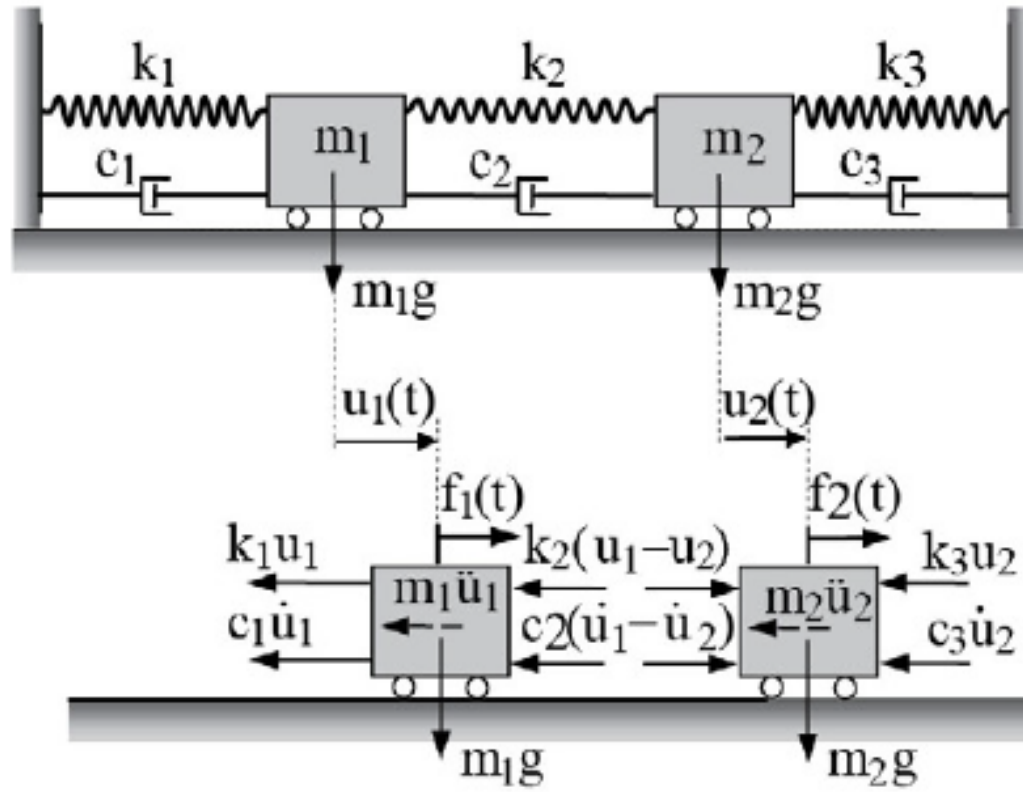
$$EIS = 1 - TR = \frac{r^2 - 2}{r^2 - 1}$$

Um perfeito isolamento, que é hipotético, corresponde a ($EIS = 1$) e nenhum isolamento é expresso por ($EIS = 0$).

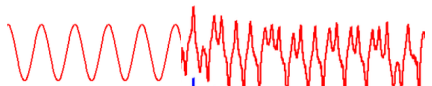


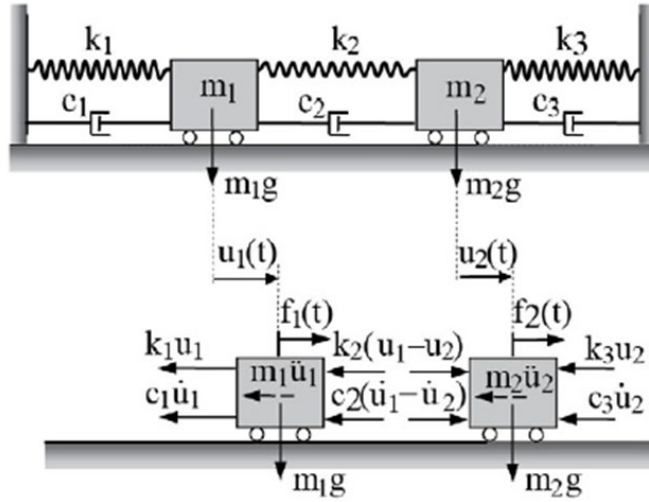
SISTEMAS MÚLTIPLOS GRAUS DE LIBERDADE





ZACARIAS
CHAMBERLAIN





$$\begin{cases} m_1 \ddot{u}_1 + c_1 \dot{u}_1 + c_2 (\dot{u}_1 - \dot{u}_2) + k_1 u_1 + k_2 (u_1 - u_2) = f_1(t) \\ m_2 \ddot{u}_2 - c_2 (\dot{u}_1 - \dot{u}_2) + c_3 \dot{u}_2 - k_2 (u_1 - u_2) + k_3 u_2 = f_2(t) \end{cases}$$

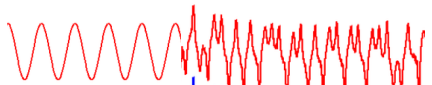
$$\rightarrow \begin{cases} m_1 \ddot{u}_1 + (c_1 + c_2) \dot{u}_1 - c_2 \dot{u}_2 + (k_1 + k_2) u_1 - k_2 u_2 = f_1(t) \\ m_2 \ddot{u}_2 - c_2 \dot{u}_1 + (c_2 + c_3) \dot{u}_2 - k_2 u_1 + (k_2 + k_3) u_2 = f_2(t) \end{cases}$$

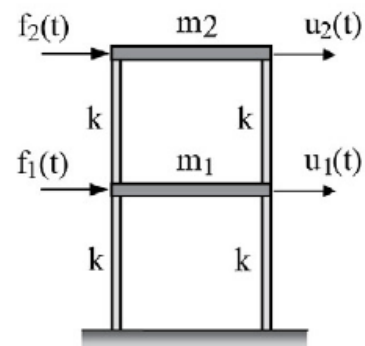
Esse sistema escreve-se sob a forma matricial:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

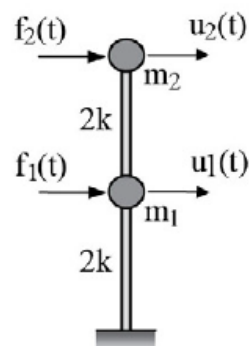
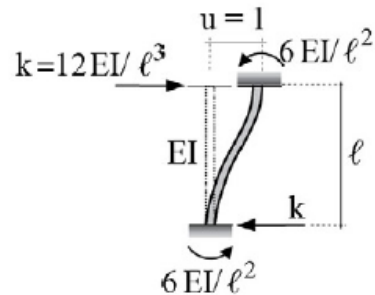
$$\rightarrow \boxed{\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}}$$

onde **M**, **C** e **K** são, respectivamente, as matrizes de massa (diagonal), de amortecimento (simétrica) e de rigidez (simétrica)





$$\begin{cases} k = 0,5 \cdot 10^{10} \text{ N/m} \\ m_1 = m_2 = 10^8 \text{ kg} \end{cases}$$

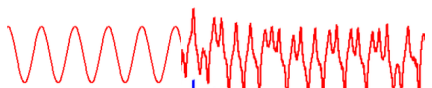


Por observação das forças atuantes nas massas, escreve-se o sistema de equilíbrio estático:

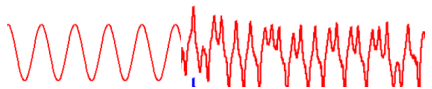
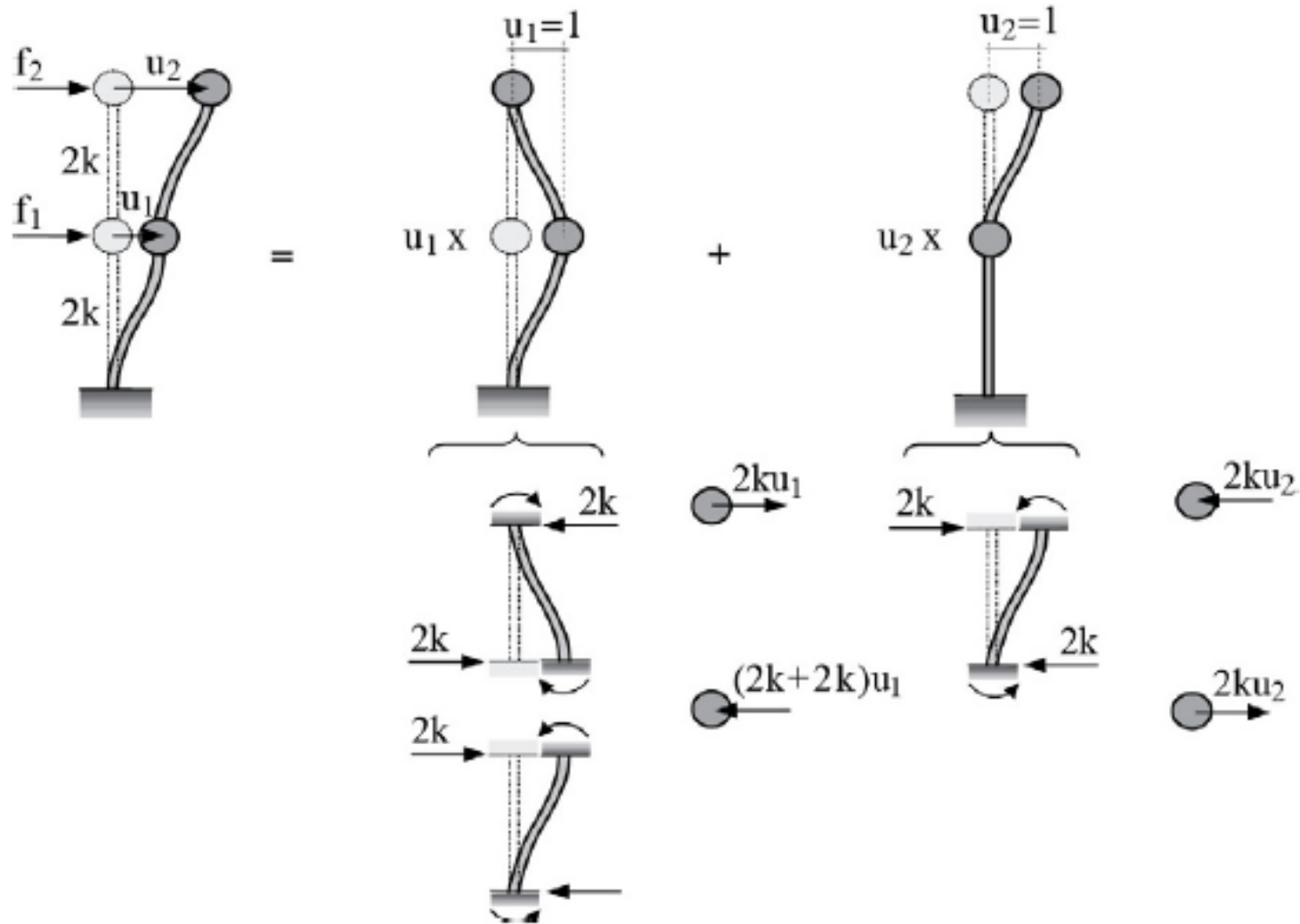
$$\begin{cases} (2k + 2k)u_1 - 2ku_2 = f_1 \\ -2ku_1 + 2ku_2 = f_2 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 4k & -2k \\ -2k & 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

Logo, com a inclusão das forças de inércia no sistema anterior, obtêm-se as equações de movimento:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 4k & -2k \\ -2k & 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{Bmatrix}$$



$$10^8 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + 10^{10} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$



Além disso, o problema de autovalor expresso na Equação 4-2.5 toma a forma:

$$\left(\begin{bmatrix} 200 & -100 \\ -100 & 100 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \omega_j^2 \right) \hat{\phi}_j = 0$$

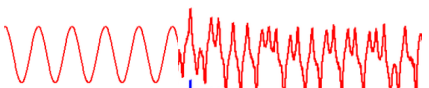
ue, de acordo com a Equação 4-2.10, fornece as frequências naturais:

$$\left. \begin{matrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \end{matrix} \right\} = \frac{200 + 100}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{200 + 100}{1} \right)^2 - 4 \frac{200 \cdot 100 - 100^2}{1}}$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{matrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 38,197 \\ 261,80 \end{matrix} \right\} \rightarrow \boxed{\left\{ \begin{matrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 6,1804 \\ 16,180 \end{matrix} \right\} \text{ rad/s}}$$

a partir dessas frequências, obtêm-se os períodos naturais:

$$\boxed{\left\{ \begin{matrix} T_1 \\ T_2 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 1,0166 \\ 0,38833 \end{matrix} \right\} \text{ s}}$$

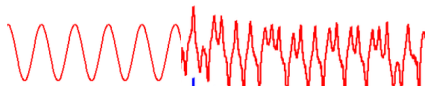
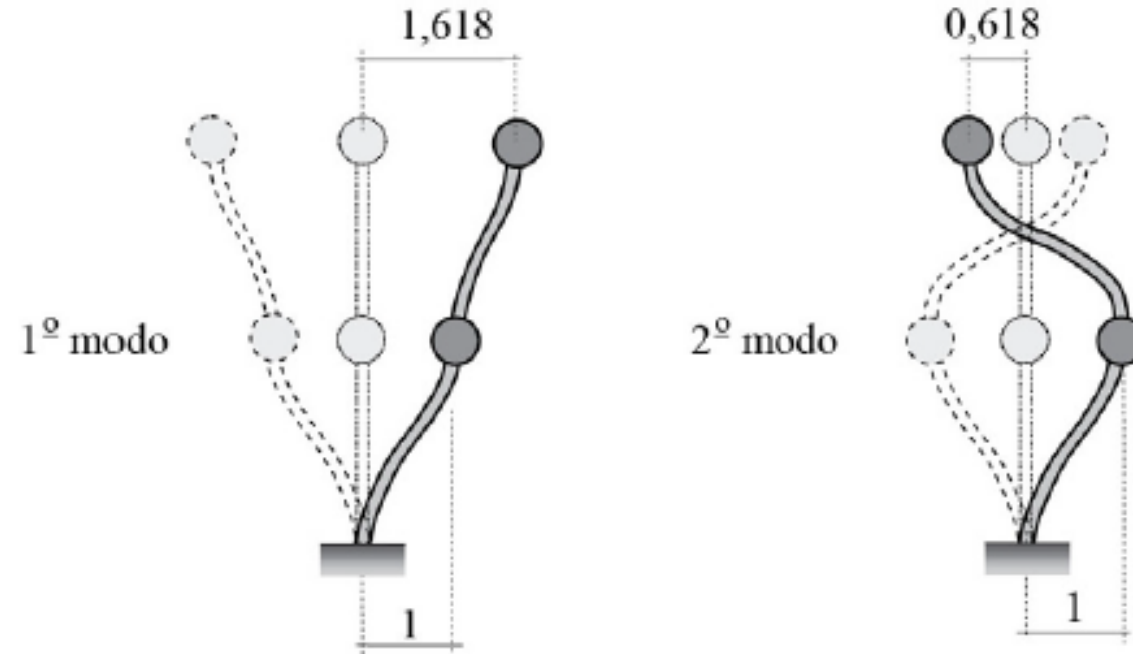


$$\begin{cases} r_1 = \frac{-100}{1 \cdot 38,197 - 100} = 1,618 \\ r_2 = \frac{-100}{1 \cdot 261,80 - 100} = -0,618 \end{cases}$$

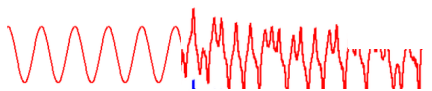
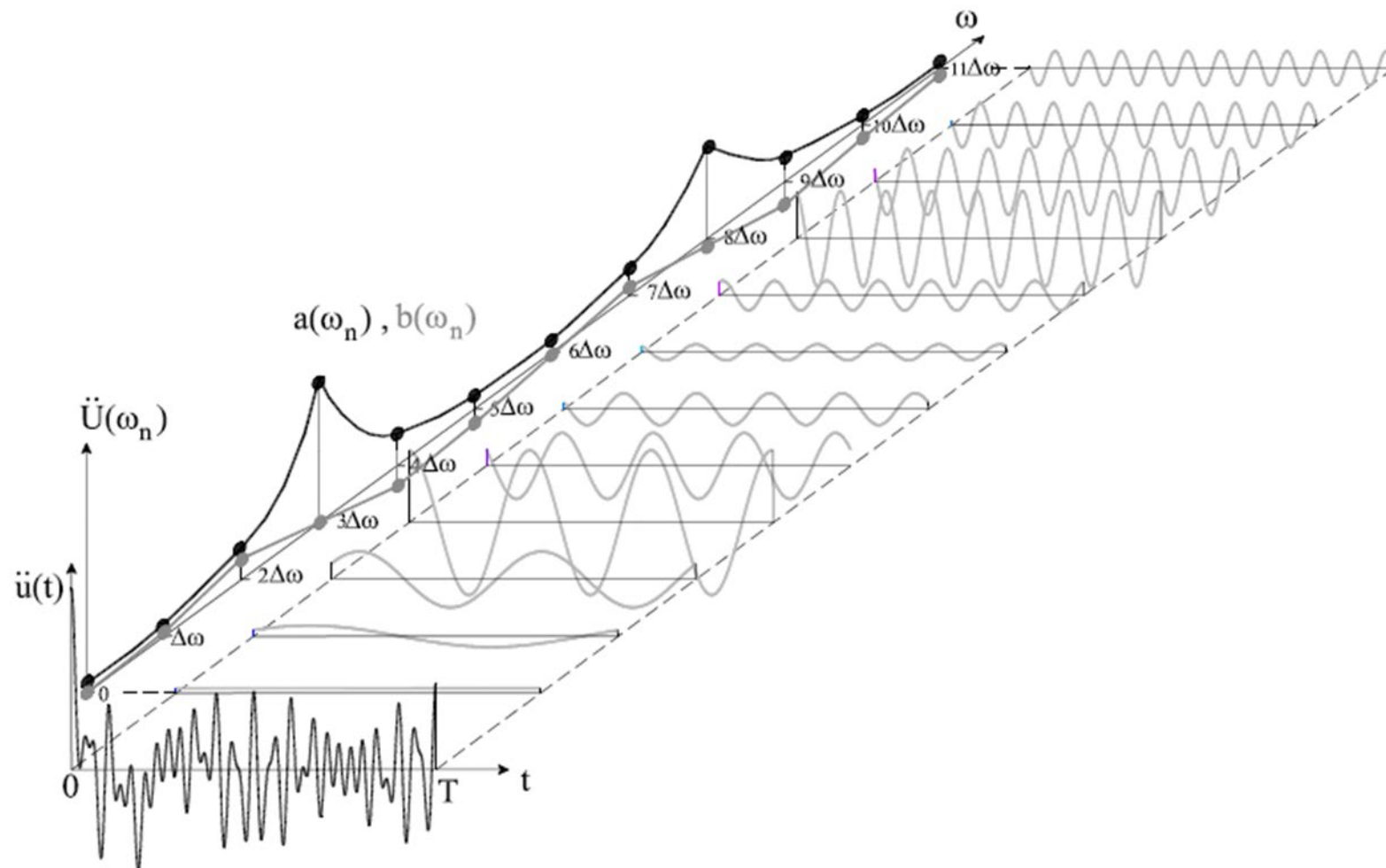
que conduzem aos seguintes modos naturais de vibração:

$$\begin{cases} \hat{\phi}_1 \pm \begin{Bmatrix} 1 \\ 1,618 \end{Bmatrix} \\ \hat{\phi}_2 \pm \begin{Bmatrix} 1 \\ -0,618 \end{Bmatrix} \end{cases}$$

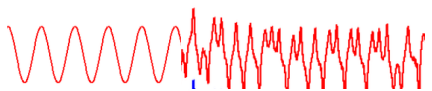
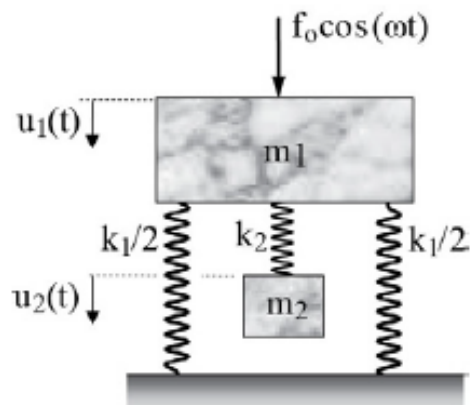
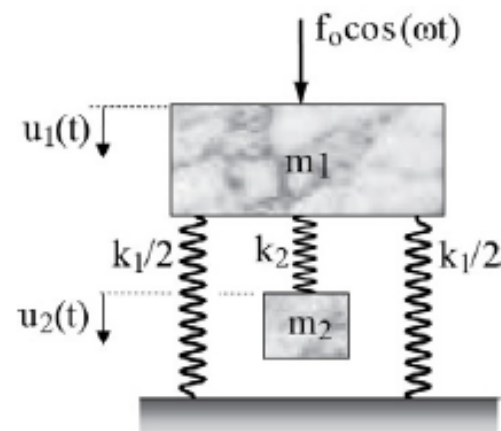
A Figura 10.10 mostra as representações desses modos.



RESPOSTA NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

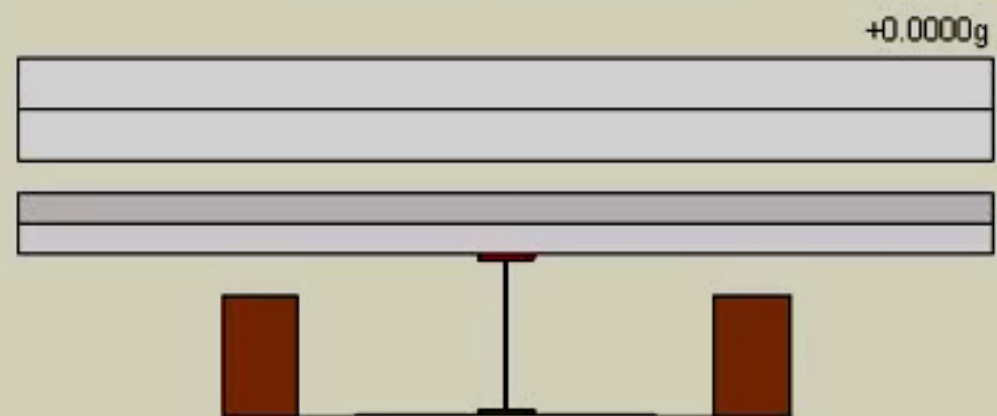
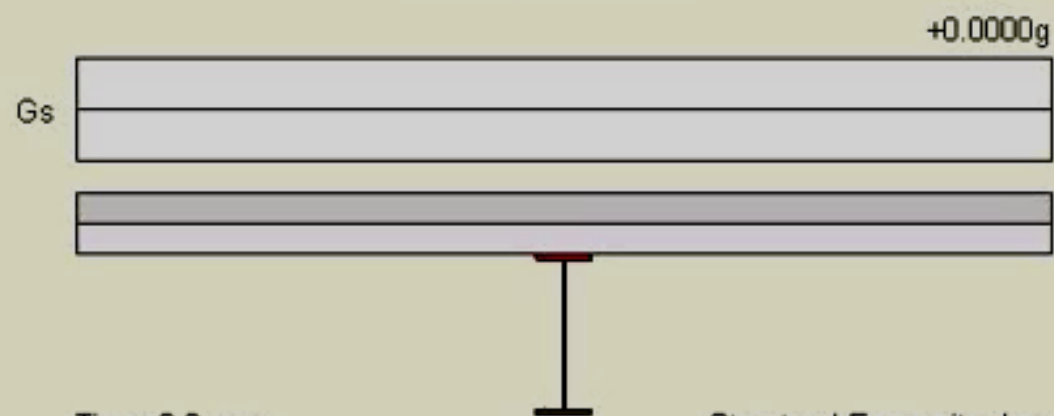


AMORTECEDOR NÃO AMORTECIDO DE MASSA SINTONIZADA



Existing Structure

With Tuned-Mass Damper



Time: 0.0 sec

Displacements 350 times actual

Structural Engenuity, Inc.

www.structuralengenuity.com

O sistema composto tem as equações de movimento:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_o \\ 0 \end{Bmatrix} \cos(\omega t)$$

de solução particular expressa na Equação 4-4.2, que se repete por conveniência:

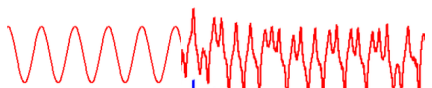
$$\begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \cos(\omega t)$$

Essa solução tem amplitudes que se escrevem com base na Equação 4-4.4:

$$\begin{cases} a_1 = \frac{(k_2 - m_2 \omega^2) f_o}{(k_1 + k_2 - m_1 \omega^2)(k_2 - m_2 \omega^2) - k_2^2} \\ a_2 = \frac{k_2 f_o}{(k_1 + k_2 - m_1 \omega^2)(k_2 - m_2 \omega^2) - k_2^2} \end{cases}$$

Além disso, com as notações:

$$\begin{cases} \omega_1^* = \sqrt{k_1 / m_1} \\ \omega_2^* = \sqrt{k_2 / m_2} \\ \mu = m_2 / m_1 \end{cases}$$

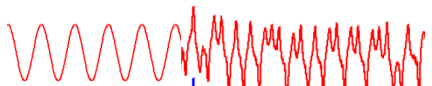


as referidas amplitudes tomam as novas formas:

$$\begin{cases} a_1 = \frac{f_o}{k_1} \frac{1 - (\omega / \omega_2^*)^2}{\left(1 + m(\omega_2^* / \omega_1^*)^2 - (\omega / \omega_1^*)^2\right) \left(1 - (\omega / \omega_2^*)^2\right) - m(\omega_2^* / \omega_1^*)^2} \\ a_2 = \frac{f_o}{k_1} \frac{1}{\left(1 + m(\omega_2^* / \omega_1^*)^2 - (\omega / \omega_1^*)^2\right) \left(1 - (\omega / \omega_2^*)^2\right) - m(\omega_2^* / \omega_1^*)^2} \end{cases}$$

A primeira expressão do par anterior mostra que, com $(\omega_2^* = \omega)$, a amplitude do sistema principal se anula. Isto é, esse sistema fica imóvel, o que ocorre na condição de:

$$m_2 = \frac{k_2}{\omega^2}$$



$$(E) \quad \begin{cases} a_1 = \frac{f_o}{k_1} \frac{1 - (\omega / \omega_2^*)^2}{\left(1 + m(\omega_2^* / \omega_1^*)^2 - (\omega / \omega_1^*)^2\right) \left(1 - (\omega / \omega_2^*)^2\right) - m(\omega_2^* / \omega_1^*)^2} \\ a_2 = \frac{f_o}{k_1} \frac{1}{\left(1 + m(\omega_2^* / \omega_1^*)^2 - (\omega / \omega_1^*)^2\right) \left(1 - (\omega / \omega_2^*)^2\right) - m(\omega_2^* / \omega_1^*)^2} \end{cases}$$

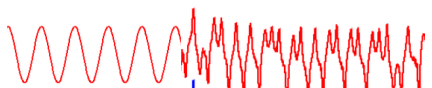
Diz-se, então, que o sistema secundário está em *sintonia* com o principal, condição em que a segunda das expressões da Equação (E) fornece:

$$a_2 = \frac{f_o}{k_1 - m(\omega_2^* / \omega_1^*)^2} \rightarrow a_2 = -\frac{f_o}{k_2}$$

Logo, obtém-se a força atuante na massa do sistema secundário:

$$f_2(t) = k_2 u_2(t) = k_2 a_2 \cos(\omega t) \rightarrow \boxed{f_2(t) = -f_o \cos(\omega t)}$$

Assim, na referida condição, o sistema secundário exerce sobre o principal uma força igual e contrária à força externa aplicada à massa m_1 , o que explica o fato de essa ficar imóvel.



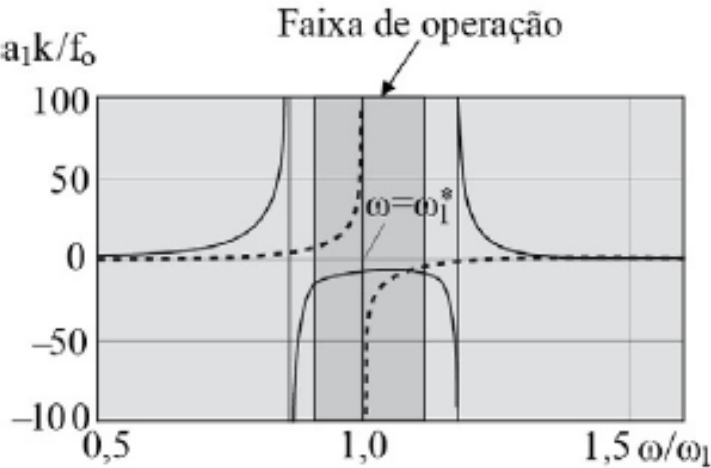
Como ilustração, com $(\omega_1^* = \omega_2^*)$, a primeira das expressões da Equação 2-3.3 fornece a função de resposta em frequência:

$$(E) \begin{cases} a_1 = \frac{f_o}{k_1} \frac{1 - (\omega / \omega_2^*)^2}{(1 + \mu(\omega_2^* / \omega_1^*)^2 - (\omega / \omega_1^*)^2)(1 - (\omega / \omega_2^*)^2) - \mu(\omega_2^* / \omega_1^*)^2} \\ a_2 = \frac{f_o}{k_1} \frac{1}{(1 + \mu(\omega_2^* / \omega_1^*)^2 - (\omega / \omega_1^*)^2)(1 - (\omega / \omega_2^*)^2) - \mu(\omega_2^* / \omega_1^*)^2} \end{cases}$$

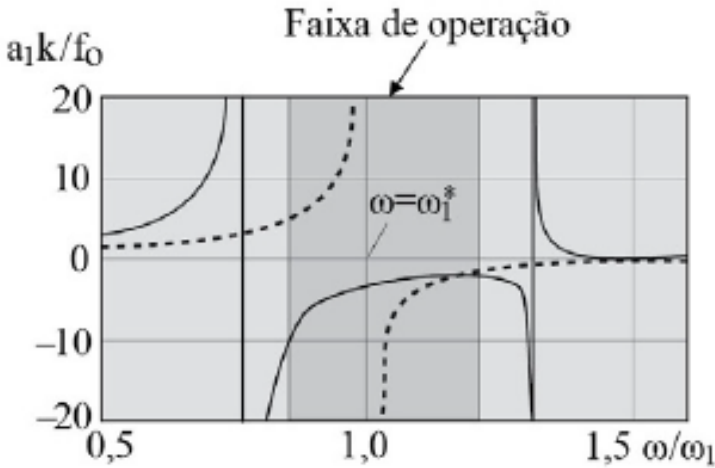
$$\frac{a_1 k_1}{f_o} = \frac{1 - (\omega / \omega_1^*)^2}{1 - (2 + \mu)(\omega / \omega_1^*)^2 + (\omega / \omega_1^*)^4}$$

A Figura 2-3.4 mostra, em linha contínua, as representações dessa função nos casos de $(\mu = 0,1)$ e $(\mu = 0,3)$. Também mostra, em pontilhado, as representações da amplitude normalizada do sistema principal na ausência do secundário, o que é obtido com base na Equação 2-3.4 e que, com as notações atuais, se escreve:

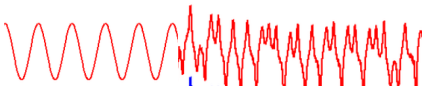
$$\frac{a_1 k_1}{f_o} = \frac{1}{1 - (\omega / \omega_1^*)^2}$$

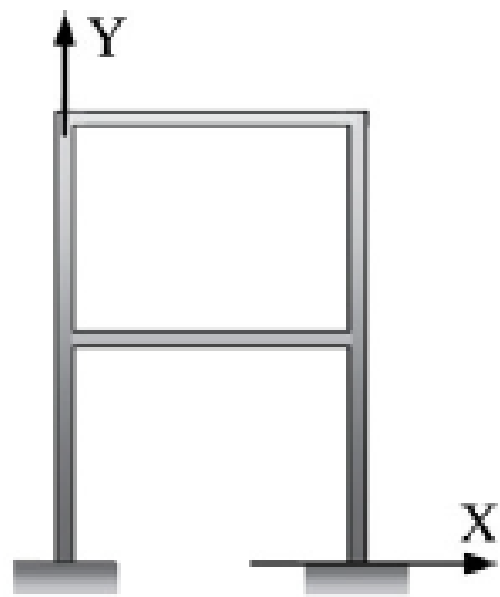


$\mu = 0,1$

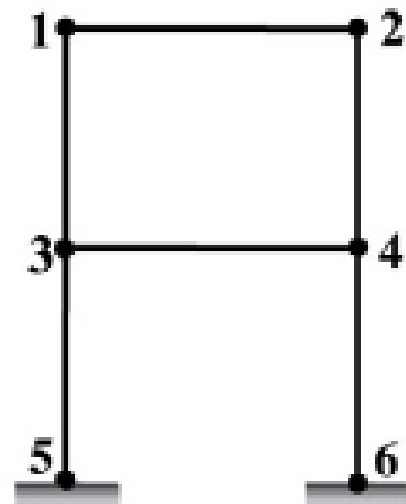


$\mu = 0,3$

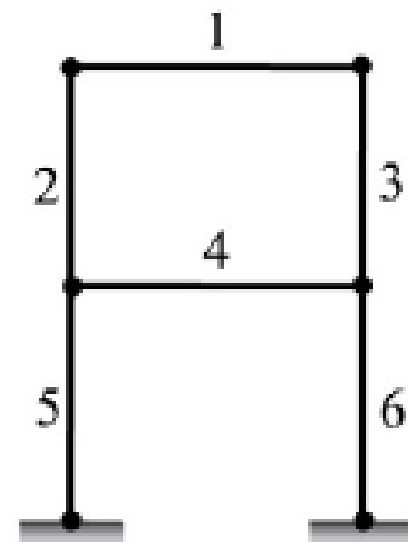




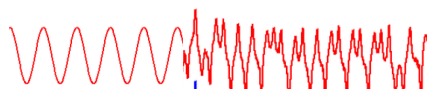
No referencial global

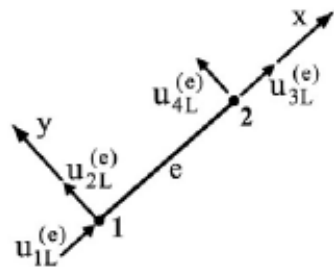


Pontos nodais

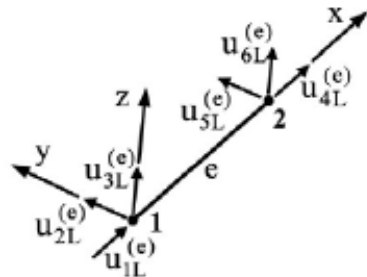


Elementos

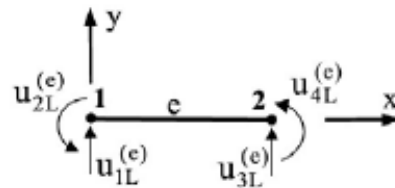




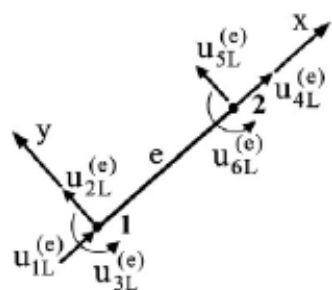
Treliça plana



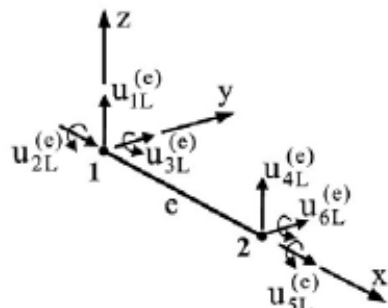
Treliça espacial



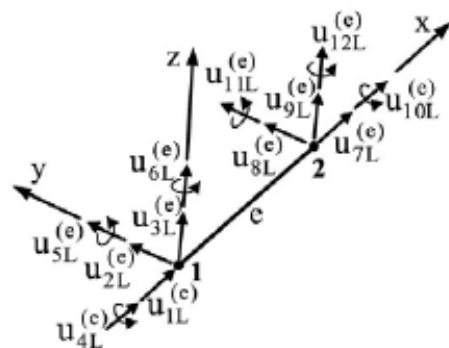
Viga



Pórtico plano

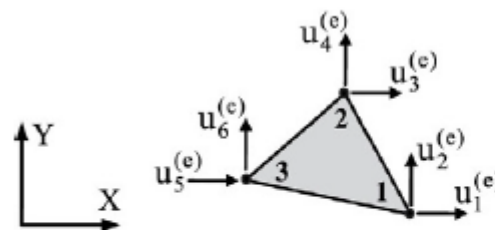


Grelha

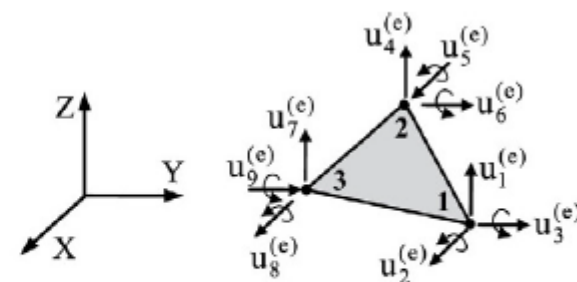


Pórtico espacial

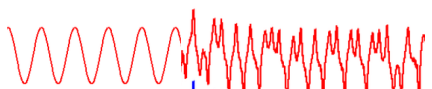
IAS
RLAIN



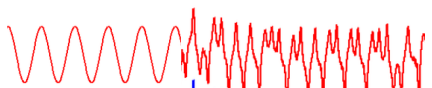
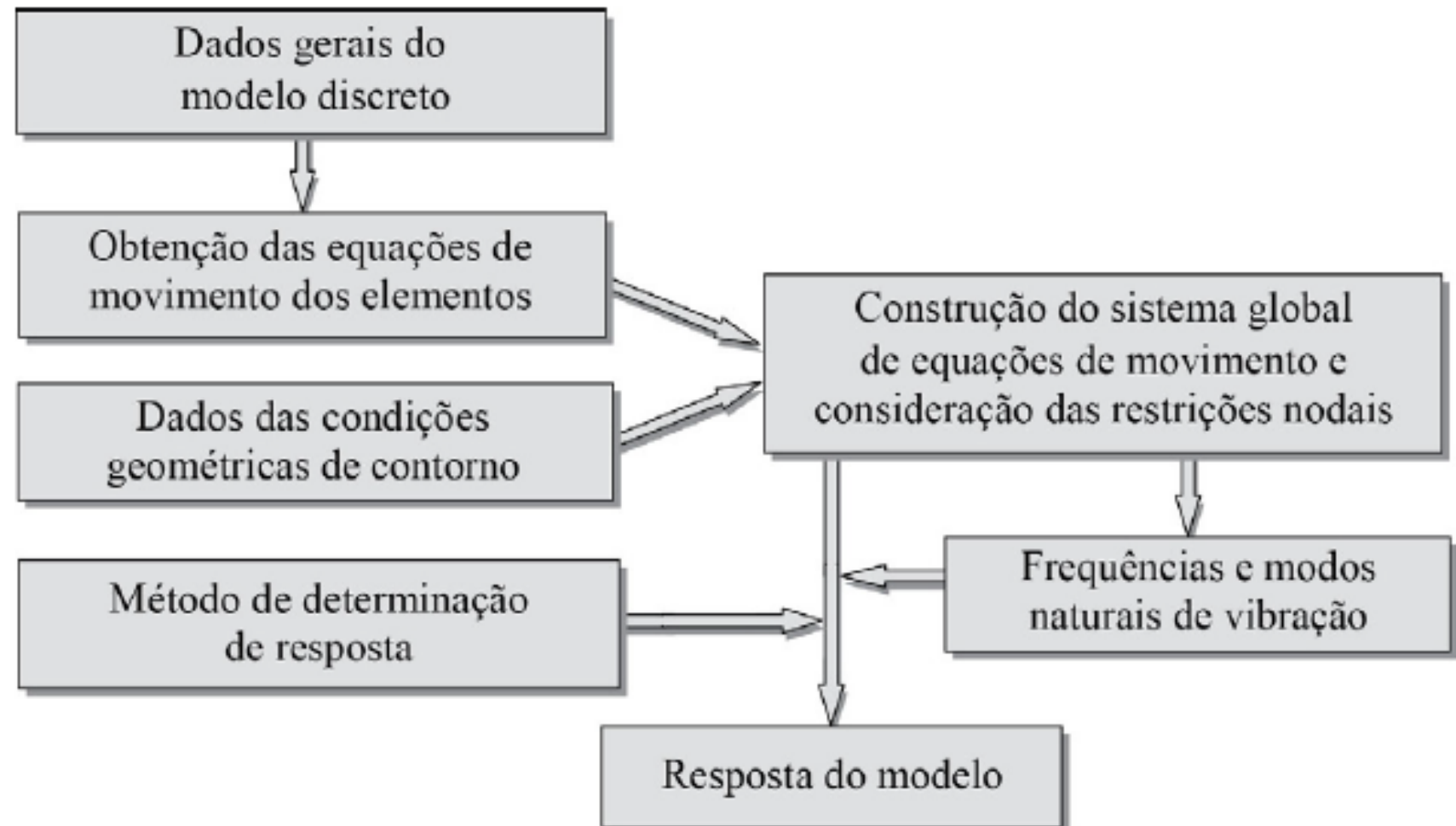
Estados planos de tensão
e de deformação

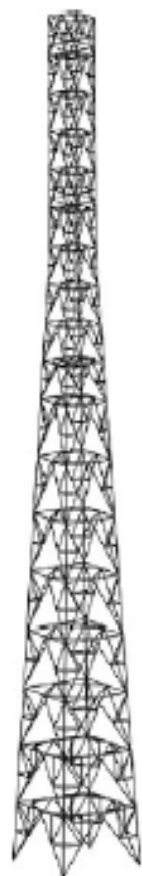


Flexão de placa,
no plano XY

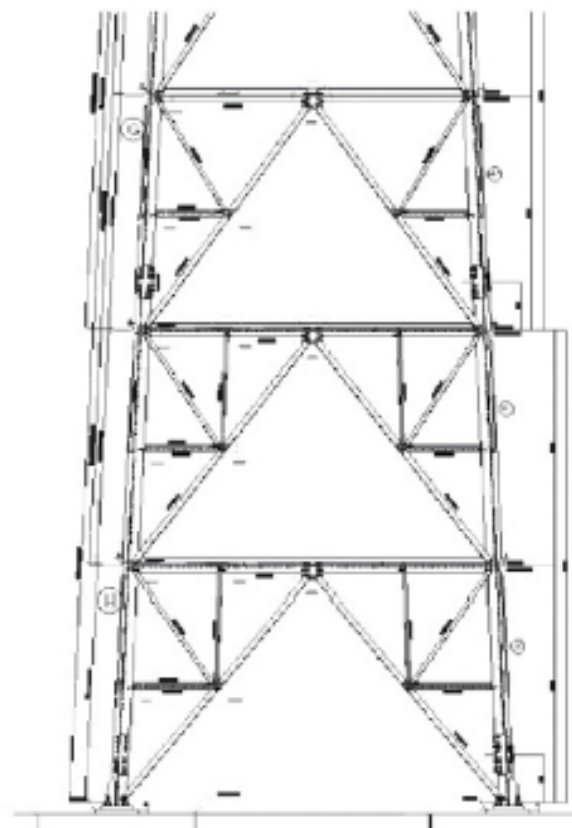


$$\mathbf{M}^{(e)} \ddot{\mathbf{u}}^{(e)}(t) + \mathbf{C}^{(e)} \dot{\mathbf{u}}^{(e)}(t) + \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)}(t) = \mathbf{f}^{(e)}(t)$$

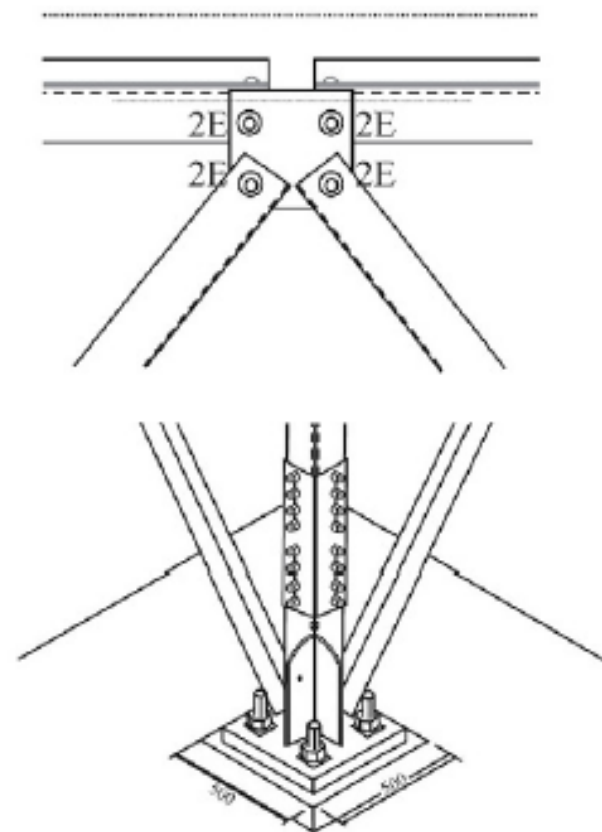




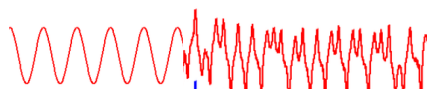
Perspectiva

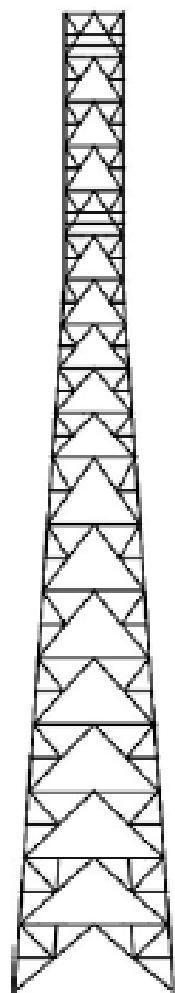


Vista lateral da parte inferior

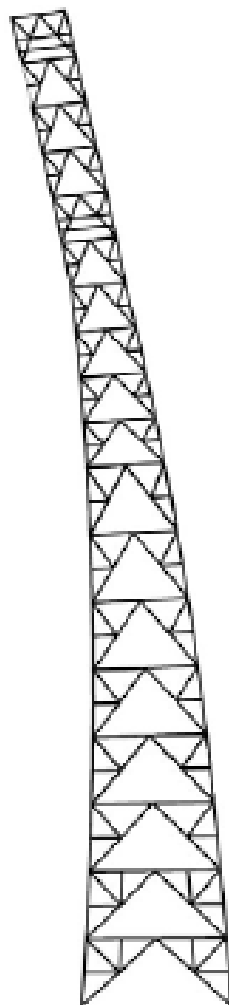


Detalhes

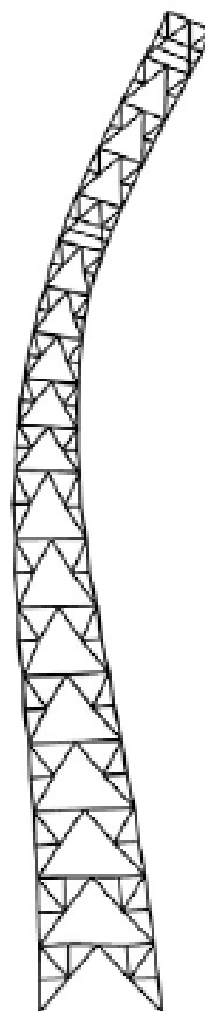




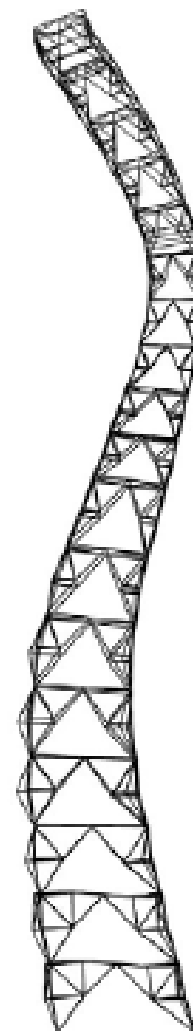
Vista
frontal



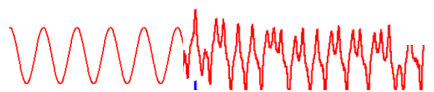
1º e 2º modos
 $T = 0,42 \text{ s}$

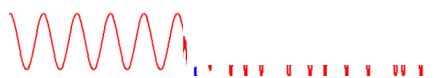
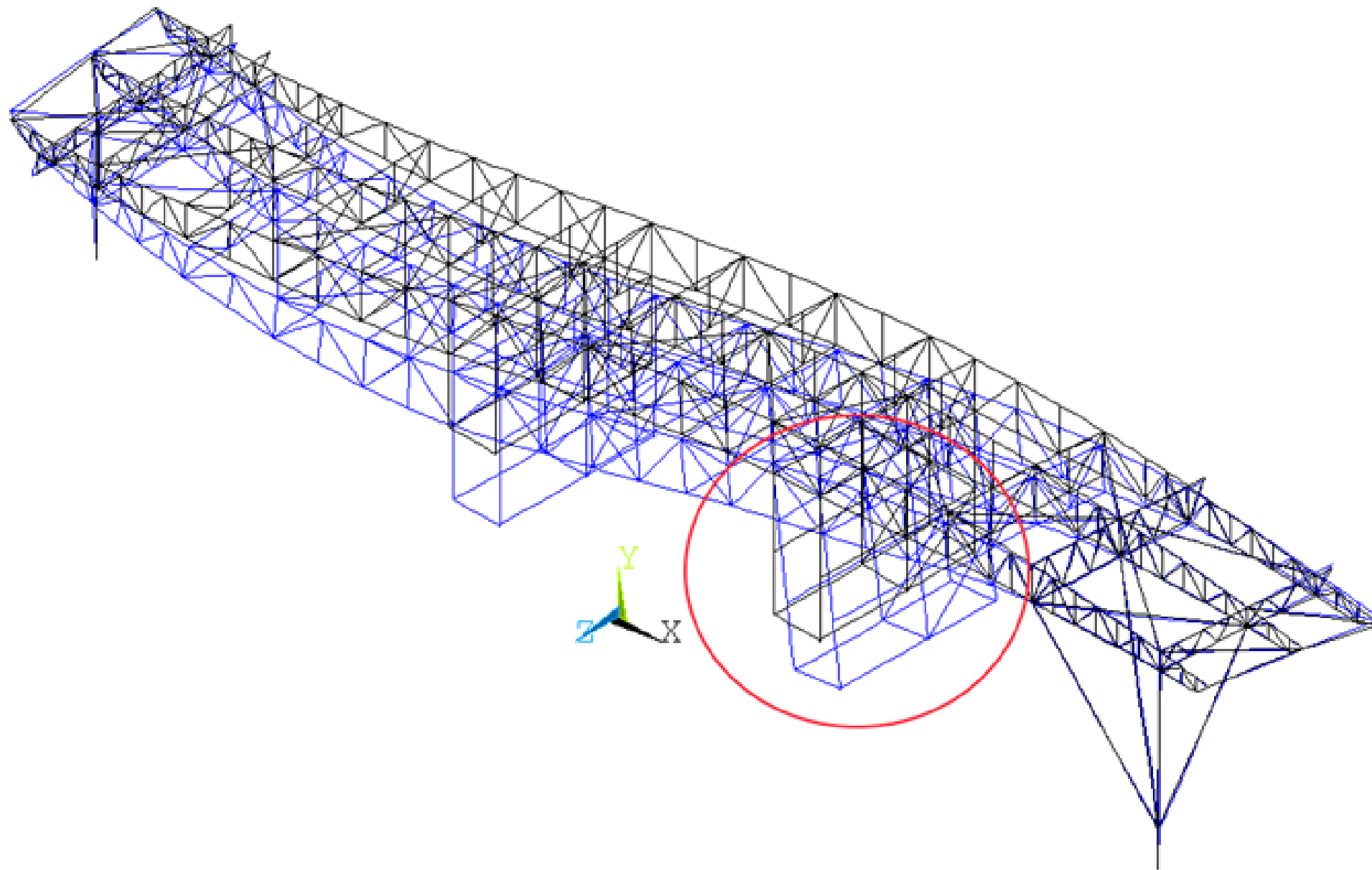


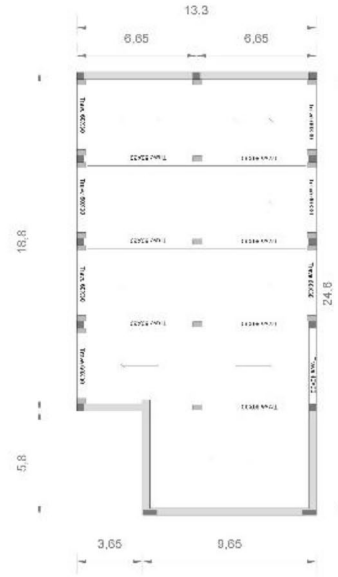
3º e 4º modos
 $T = 0,14 \text{ s}$



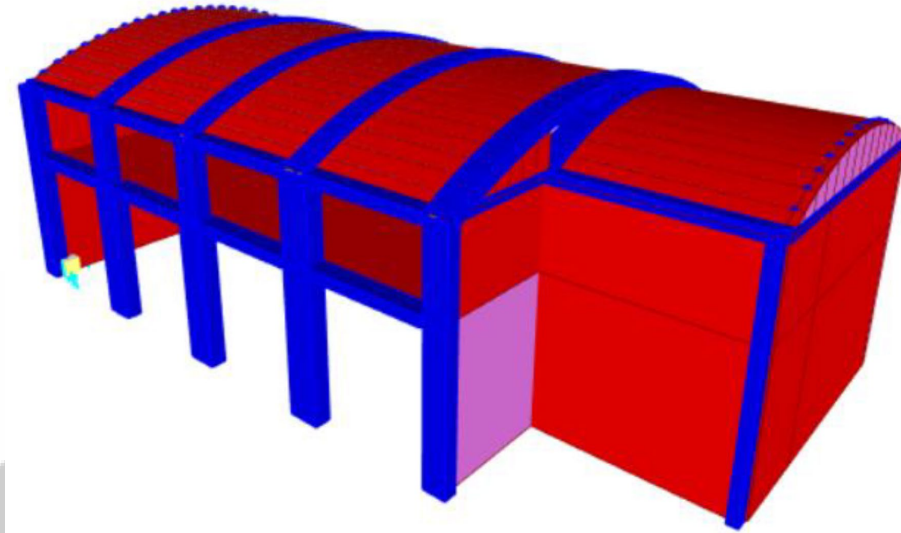
7º e 8º modos
 $T = 0,084 \text{ s}$



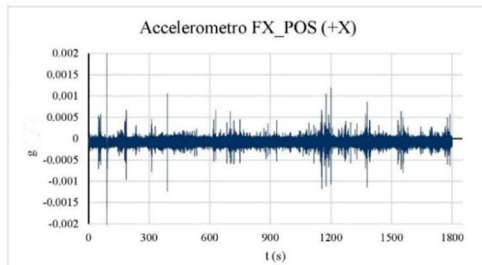




ZAC

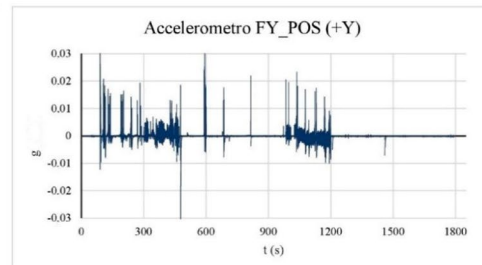


(a)



(a)

(b)



(b)



Deformed shape—Mode 1

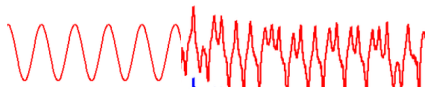


Deformed shape—Mode 2

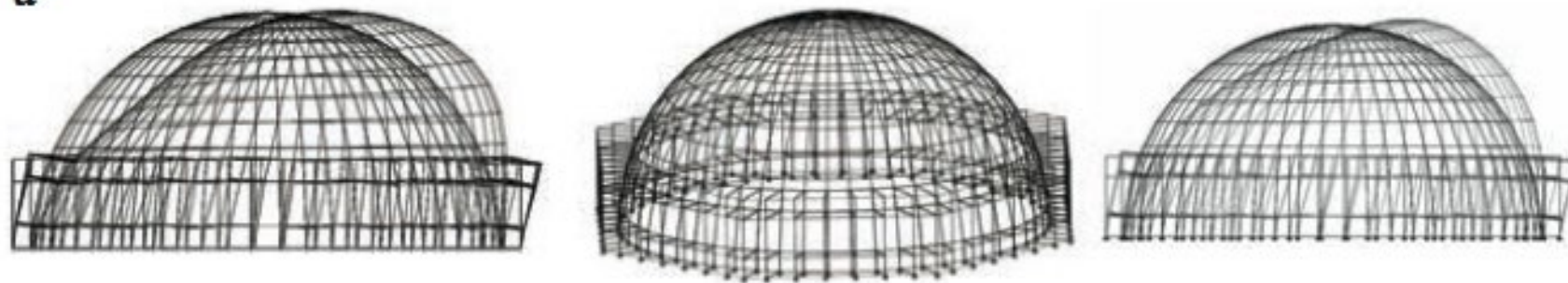


Deformed shape—Mode 3

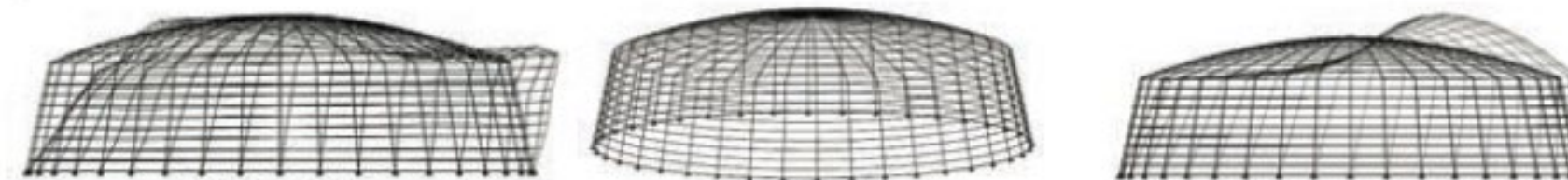
Structural Operativity Evaluation of Strategic Buildings through Finite Element (FE) Models Validated by Operational Modal Analysis (OMA), <https://doi.org/10.3390/s20113252>



a



b



c

